Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, Τμήμα Α (Ν. Βλαχάκη), 3 Δεκεμβρίου 2018
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Θέμα 1ο:

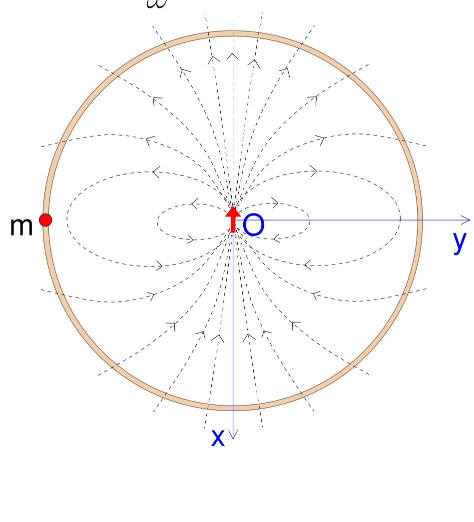
Η θέση σώματος που κινείται στο επίπεδο xy είναι σε κάθε χρόνο (σε κατάλληλες μονάδες)

$$x = 2t + \sin(2t), \quad y = 1 + \cos(2t).$$

(α) Βρείτε την ταχύτητα $\vec{v}$ και την επιτάχυνση $\vec{a}$.
(β) Βρείτε την επιτρόχια και κεντρομόλο συνιστώσα της επιτάχυνσης σε κάθε χρόνο, καθώς και τα μοναδιαία $\hat{\varepsilon}$, $\hat{n}$ πάνω και κάθετα στην τροχιά.
(γ) Βρείτε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς.
(δ) Πόσο μήκος διανύει το σώμα για $0 < t < \pi/2$;
(ε) Δείξτε ότι μια δύναμη της μορφής $\vec{C} + \vec{v} \times \vec{D}$ θα μπορούσε να είναι υπεύθυνη για την κίνηση του σώματος, για συγκεκριμένα σταθερά διανύσματα $\vec{C}$ και $\vec{D}$ τα οποία και να βρείτε. Θεωρήστε την μάζα του σώματος μοναδιαία.
(στ) Έστω το σώμα είναι ένας οριζόντιος δίσκος τον οποίο κινούμε παράλληλα στον εαυτό του στο οριζόντιο επίπεδο xy ώστε να ακολουθεί την δοσμένη τροχιά. Αν πάνω στο δίσκο υπάρχει ένα ποτήρι, ποιος είναι ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής ώστε να μη γλιστρήσει; Θεωρήστε $g = 10$ (στις κατάλληλες μονάδες).
Δίνονται οι τριγωνομετρικές ταυτότητες
$\cos(2\phi) = 2\cos^2\phi - 1\,, \quad \sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi$.

Θέμα 2ο:

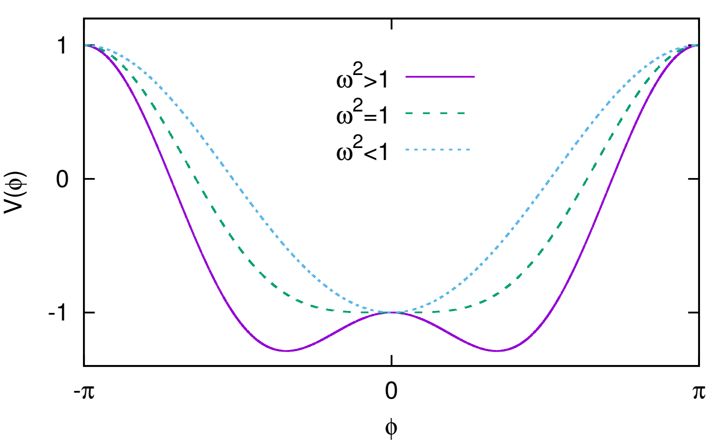
Ένα φορτισμένο δαχτυλίδι μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβές περασμένο σε μια σταθερή κυκλική στεφάνη ακτίνας R από μονωτικό υλικό. Στο κέντρο της στεφάνης υπάρχει ένα σταθερό δίπολο που ασκεί δύναμη στο δαχτυλίδι. Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια του δαχτυλιδιού είναι $V = -\lambda \dfrac{\hat{x}\cdot\hat{r}}{r^2}$ όπου λ θετική σταθερά, δηλ. σε πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο της στεφάνης, $V = -\lambda \dfrac{\cos\phi}{\varpi^2}$. Αγνοήστε την βαρύτητα.



Αρχικά το δαχτυλίδι κρατείται ακίνητο στην θέση του σχήματος $\phi = -\pi/2$.
(α) Περιγράψτε τι κίνηση θα κάνει όταν το αφήσουμε.
(β) Ποιο το μέτρο της ταχύτητάς του σε κάθε θέση;
(γ) Ποια η δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί το δίπολο στο δαχτυλίδι και ποια η δύναμη που ασκεί η στεφάνη στο δαχτυλίδι σε κάθε θέση;
★ (δ) Πως θα κινούνταν το δαχτυλίδι αν δεν υπήρχε καθόλου η στεφάνη; (Οι αρχικές συνθήκες παραμένουν ίδιες.)
Δίνεται η έκφραση της κλίσης σε πολικές συντεταγμένες $\vec{\nabla}V = \dfrac{\partial V}{\partial \varpi}\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$.

Θέμα 3ο:

Έστω περιστρέφουμε την στεφάνη του προηγούμενου προβλήματος με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα x.
Μπορείτε να θέσετε για απλούστευση $m = \lambda = R = 1$.
(α) Αιτιολογήσετε ότι υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» με δυναμική ενέργεια $V = -\dfrac{\cos\phi}{\varpi^2} - \dfrac{\omega^2\varpi^2\sin^2\phi}{2}$ και γράφημα όπως το παρακάτω (για $\varpi = 1$ και διάφορα ω).



(β) Ποια τα ευσταθή σημεία ισορροπίας για $\omega^2 > 1$ και ποια η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων γύρω τους;
(γ) Όμοια για $\omega^2 < 1$.
★ (δ) Όμοια για $\omega^2 = 1$.
(ε) Αν αρχικά το δαχτυλίδι είναι ακίνητο στην θέση $\phi = -\pi/2$ περιγράψτε την κίνησή του. (Διερευνήστε για διάφορα ω.)
Σχεδιάστε τις αντίστοιχες τροχιές στο χώρο φάσης.
★ (στ) Αν το δαχτυλίδι ισορροπεί ως προς την στεφάνη, υπάρχει ω για το οποίο η στεφάνη δεν του ασκεί δύναμη;
Δίνεται $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} = 1.311$.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α) $\dot{x} = 2 + 2\cos(2t) = 4\cos^2 t$,
$\dot{y} = -2\sin(2t) = -4\sin t\cos t$.
Άρα $\vec{v} = 4\cos t\,(\cos t\,\hat{x} - \sin t\hat{y}\,)$.
$\ddot{x} = -4\sin(2t) = -8\sin t\cos t$,
$\ddot{y} = -4\cos(2t) = 4 - 8\cos^2 t$.
Άρα $\vec{a} = -8\sin t\cos t\,\hat{x} + (4 - 8\cos^2 t)\,\hat{y}$.

(β) $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{\cos t}{|\cos t|}\,(\cos t\,\hat{x} - \sin t\hat{y}\,)$.
Η επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι $\vec{a}_\varepsilon = (\vec{a}\cdot\hat{\varepsilon})\,\hat{\varepsilon} = -4\dfrac{\cos t}{|\cos t|}\sin t\,\hat{\varepsilon}$.
Αλλιώς από $\vec{a}_\varepsilon = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}\hat{\varepsilon}$ με $|\vec{v}| = 4|\cos t|$.
Η κεντρομόλος συνιστώσα είναι $\vec{a}_\kappa = \vec{a} - \vec{a}_\varepsilon = -4\cos t\,(\sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y})$.
Αλλιώς από $\vec{a}_\kappa = (\hat{\varepsilon}\times\vec{a})\times\hat{\varepsilon}$.
$\hat{n} = \dfrac{\vec{a}_\kappa}{|\vec{a}_\kappa|} = -\dfrac{\cos t}{|\cos t|}\,(\sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y})$.
Αλλιώς: Από $\dfrac{\hat{n}}{\mathcal{R}} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{|\vec{v}|dt}$, το $\hat{n}$ είναι το μοναδιαίο στην διεύθυνση του $\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt} = \dfrac{\cos t}{|\cos t|}\,(-\sin t\,\hat{x} - \cos t\hat{y}\,)$, δηλ. $\hat{n} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt}\Big/\left|\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt}\right| = \dfrac{\cos t}{|\cos t|}\,(-\sin t\,\hat{x} - \cos t\hat{y}\,)$.

(γ) $|\vec{a}_\kappa| = \dfrac{v^2}{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \mathcal{R} = 4|\cos t|$.
Αλλιώς: $\dfrac{\hat{n}}{\mathcal{R}} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{|\vec{v}|dt} \Rightarrow \dfrac{1}{\mathcal{R}} = \dfrac{1}{|\vec{v}|}\left|\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt}\right| = \dfrac{1}{4|\cos t|}$.

(δ) Το μήκος είναι $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |\vec{v}|\,dt = \int_0^{\pi/2} 4|\cos t|dt = 4$.

(ε) $\vec{a} = \vec{C} + \vec{v}\times\vec{D} = \vec{C} + \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & 0 \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} a_x = C_x + D_z v_y \\ a_y = C_y - D_z v_x \\ 0 = C_z + D_y v_x - D_x v_y \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} C_x - D_z 4\sin t\cos t = -8\sin t\cos t \\ C_y - D_z 4\cos^2 t = 4 - 8\cos^2 t \\ C_z + D_y 4\cos^2 t + D_x 4\sin t\cos t = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} C_x = 0\,, D_z = 2\,, \\ C_y = 4\,, D_z = 2\,, \\ C_z = 0\,, D_y = 0\,, D_x = 0\,. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{C} = 4\hat{y}\,, \\ \vec{D} = 2\hat{z}\,. \end{array}\right.$$

(στ) Η μόνη οριζόντια δύναμη στο ποτήρι είναι η στατική τριβή, άρα $\vec{T} = m\vec{a}$. Όσο το ποτήρι δεν γλιστράει η στατική τριβή είναι μικρότερη της $\mu N = \mu mg$ (η δύναμη από το δίσκο στο ποτήρι N εξουδετερώνει το βάρος mg), οπότε πρέπει να ισχύει σε κάθε χρόνο $|\vec{a}| \le \mu g$. Το μέτρο της επιτάχυνσης υπολογίζεται $|\vec{a}| = \sqrt{(-8\sin t\cos t)^2 + (4 - 8\cos^2 t)^2} = 4$, οπότε πρέπει να ισχύει $4 \le 10\mu$, δηλ. $\mu \ge 0.4$.

Θέμα 2^o:

(α) Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{\lambda\cos\phi}{R^2} = E$.
Αρχικά $\phi = -\dfrac{\pi}{2}$ και $v = 0$ οπότε η ενέργεια είναι $E = 0$.
Τα όρια της κίνησης βρίσκονται μέσω της ανισότητας $V(\phi) \le E \Leftrightarrow \cos\phi \ge 0 \Leftrightarrow \phi \in [-\pi/2, +\pi/2]$. Στο άκρο $\phi = \pi/2$ η ταχύτητα μηδενίζεται ξανά. Επομένως το δαχτυλίδι κινείται αρχικά προς μεγαλύτερες γωνίες (προς τα κάτω στο σχήμα) μέχρι το $\phi = \pi/2$ (αντιδιαμετρικό της αρχικής θέσης), εκεί ανακλάται και επιστρέφει στην αρχική θέση, κ.ο.κ.
Τα παραπάνω προκύπτουν και μέσω του γραφήματος της $V(\phi) = -\dfrac{\lambda\cos\phi}{R^2}$.

(β) Από το ολοκλήρωμα ενέργειας (για $E = 0$) προκύπτει $v = \sqrt{\dfrac{2\lambda\cos\phi}{mR^2}}$.

(γ) Η δύναμη από το δίπολο είναι $\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\dfrac{\partial V}{\partial\varpi}\hat{\varpi} - \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\phi} = -\dfrac{\lambda}{\varpi^3}\left(2\cos\phi\hat{\varpi} + \sin\phi\hat{\phi}\right)$ με $\varpi = R$.
Η ακτινική ($\hat{\varpi}$) συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}$, όπου $\vec{N} = N\hat{\varpi}$ η δύναμη από την στεφάνη, γράφεται $-\dfrac{mv^2}{R} = -\dfrac{2\lambda\cos\phi}{R^3} + N$. Αντικαθιστώντας την ταχύτητα προκύπτει $N = 0$.

(δ) Η κίνηση παραμένει ίδια!

Θέμα 3^o:

(α) Η V συμπεριλαμβάνει την συνεισφορά από το δίπολο $-\dfrac{\lambda\cos\phi}{\varpi^2}$ και από την φυγόκεντρο $-\dfrac{m\omega^2 r_\perp^2}{2}$ όπου $r_\perp = \varpi\sin\phi$ η απόσταση από τον άξονα περιστροφής.
Η Coriolis δεν παίζει ρόλο σαν κάθετη στην κίνηση, άρα υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» $T + V = E =$ σταθερά, όπου $T = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{\dot{\phi}^2}{2}$ η κινητική ενέργεια (η ταχύτητα είναι $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$).
Η E δεν είναι η πραγματική ενέργεια του δαχτυλιδιού.
Για $\varpi = 1$ είναι $V = V(\phi) = -\cos\phi - \dfrac{\omega^2}{2}\sin^2\phi$, συνάρτηση περιοδική (με περίοδο 2π) και άρτια, επομένως αρκεί να μελετηθεί στο $\phi \in [0, \pi]$. Είναι $V'(\phi) = (1 - \omega^2\cos\phi)\sin\phi$, $V''(\phi) = \cos\phi - \omega^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)$.
Ακρότατα αντιστοιχούν σε ρίζες της $V'(\phi) = 0$.

• Αν $\omega^2 > 1$ η $V'(\phi)$ μηδενίζεται όταν $\sin\phi = 0 \Leftrightarrow \phi = 0, \pi$ και όταν $\cos\phi = 1/\omega^2 \Leftrightarrow \phi = \phi_0 = \arccos(1/\omega^2)$. Κοιτώντας το πρόσημο της παραγώγου στις διάφορες περιοχές συμπεραίνουμε ότι η V στο διάστημα $(0, \phi_0)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση, ελαττώνεται από $V(0) = -1$ σε $V(\phi_0) = -\dfrac{1}{2\omega^2} - \dfrac{\omega^2}{2}$, ενώ στο διάστημα (ϕ_0, π) είναι αύξουσα συνάρτηση, αυξάνεται από $V(\phi_0)$ σε $V(\pi) = 1$.

• Αν $\omega^2 < 1$ η $V'(\phi)$ μηδενίζεται μόνο όταν $\sin\phi = 0 \Leftrightarrow \phi = 0, \pi$ (διότι η εξίσωση $\cos\phi = 1/\omega^2$ δεν έχει λύση). Κοιτώντας το πρόσημο της παραγώγου συμπεραίνουμε ότι η V είναι αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $(0, \pi)$, αυξάνεται από $V(0) = -1$ σε $V(\pi) = 1$.

• Αν $\omega^2 = 1$ επίσης η $V'(\phi)$ μηδενίζεται μόνο όταν $\phi = 0, \pi$ (η μόνη διαφορά είναι ότι η $\phi = 0$ είναι διπλή λύση) και είναι θετική στο διάστημα $(0, \pi)$. Άρα η V αυξάνεται από $V(0) = -1$ σε $V(\pi) = 1$.

(β) Αν $\omega^2 > 1$ τα ελάχιστα (ευσταθής ισορροπία) είναι τα $\pm\phi_0 = \pm\arccos(1/\omega^2)$.

Θέτοντας $\phi = \pm\phi_0 + q$ έχουμε $V(\phi) \approx V(\pm\phi_0) + \dfrac{1}{2}V''(\pm\phi_0)q^2 = V(\pm\phi_0) + \dfrac{1}{2}(\omega^2 - 1/\omega^2)q^2$.

Επομένως η εξίσωση κίνησης (το ολοκλήρωμα «ενέργειας») είναι $\dfrac{\dot{q}^2}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\omega^2 - \dfrac{1}{\omega^2}\right)q^2 =$ σταθερά, ή παραγωγίζοντας $\ddot{q} + \Omega^2 q = 0$ με $\Omega = \sqrt{\omega^2 - 1/\omega^2}$. Η περίοδος μικρών ταλαντώσεων είναι $\dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{2\pi\omega}{\sqrt{\omega^4 - 1}}$.

(γ) Αν $\omega^2 < 1$ το μόνο ελάχιστο είναι το $\phi = 0$. Γύρω από αυτό $V(\phi) \approx V(0) + \dfrac{1}{2}V''(0)\phi^2 = -1 + \dfrac{1}{2}(1 - \omega^2)\phi^2$.

Επομένως η εξίσωση κίνησης (το ολοκλήρωμα «ενέργειας») είναι $\dfrac{\dot{\phi}^2}{2} + \dfrac{1}{2}\left(1 - \omega^2\right)\phi^2 =$ σταθερά, ή παραγωγίζοντας $\ddot{\phi} + \Omega^2\phi = 0$ με $\Omega = \sqrt{1 - \omega^2}$. Η περίοδος μικρών ταλαντώσεων είναι $\dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1 - \omega^2}}$.

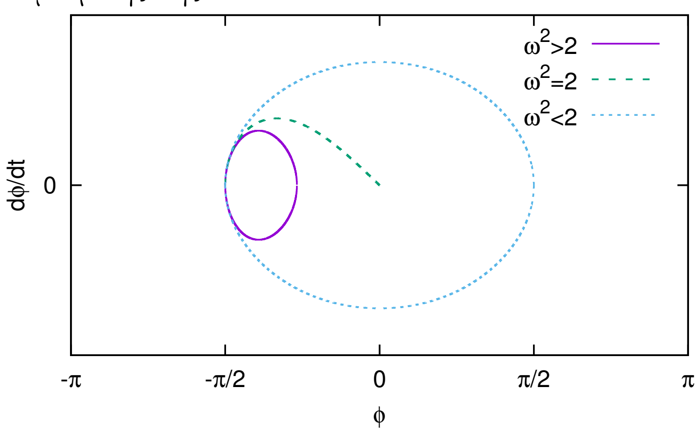
(δ) Αν $\omega^2 = 1$ το μόνο ελάχιστο είναι το $\phi = 0$ και το σώμα μπορεί να εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από αυτό, όπως φαίνεται από το γράφημα της V. Όμως δεν θα είναι αρμονικές διότι $V''(0) = 0$. Στο σημείο $\phi = 0$ η πρώτη μη-μηδενική παράγωγος είναι η τέταρτη, επομένως για κινήσεις κοντά σε αυτό είναι $V(\phi) \approx V(0) + V'(0)\phi + \dfrac{1}{2}V''(0)\phi^2 + \dfrac{1}{3!}V'''(0)\phi^3 + \dfrac{1}{4!}V^{(4)}(0)\phi^4 = -1 + \dfrac{\phi^4}{8}$. Η εξίσωση κίνησης είναι $\dfrac{\dot{\phi}^2}{2} + \dfrac{\phi^4}{8} = E + 1 = \dfrac{\phi_{\max}^4}{8}$ και η περίοδος είναι ίση με $4\displaystyle\int_0^{\phi_{\max}} \frac{d\phi}{\dot{\phi}} = 8\int_0^{\phi_{\max}} \frac{d\phi}{\sqrt{\phi_{\max}^4 - \phi^4}}$. Θέτοντας $\phi = \phi_{\max}\xi$ η περίοδος είναι $\dfrac{8}{\phi_{\max}}\displaystyle\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^4}} = \frac{10.49}{\phi_{\max}}$.

(ε) Η ενέργεια είναι $E = V(-\pi/2) = -\omega^2/2$. Όπως φαίνεται από το γράφημα της V η κίνηση διαφοροποιείται ανάλογα με το αν η E είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη του $V(0) = -1$.

• Αν $E < -1 \Leftrightarrow \omega^2 > 2$ η εξίσωση $V(\phi) = E$ έχει τέσσερις λύσεις. Η κίνηση γίνεται μεταξύ των δύο αρνητικών λύσεων, $V(\phi) = E \Leftrightarrow \cos\phi(\cos\phi - 2/\omega^2) = 0$, δηλ. $-\pi/2 \le \phi \le -\arccos(2/\omega^2)$.

• Αν $E = -1 \Leftrightarrow \omega^2 = 2$ η εξίσωση $V(\phi) = E \Leftrightarrow \cos\phi = \cos^2\phi$ έχει τρεις λύσεις, τις $\pm\pi/2$ και την $\phi = 0$ στην οποία η V είναι μέγιστη. Επομένως το δαχτυλίδι θα πλησιάζει επ' άπειρον το σημείο $\phi = 0$.

• Αν $E > -1 \Leftrightarrow \omega^2 < 2$ η κίνηση γίνεται μεταξύ των δύο λύσεων της εξίσωσης $V(\phi) = E$ οι οποίες είναι οι $\phi = \pm\pi/2$. Δηλ. το δαχτυλίδι κινείται στις γωνίες $\pi/2 \le \phi \le \pi/2$, μεταξύ της αρχικής θέσης και της αντιδιαμετρικής της.



(στ) Ο νόμος Νεύτωνα δίνει $0 = \vec{N} - \vec{\nabla}V$ όπου ο όρος $-\vec{\nabla}V$ συμπεριλαμβάνει την δύναμη από το δίπολο και την φυγόκεντρο (η επιτάχυνση και η δύναμη Coriolis είναι μηδενικές αφού το δαχτυλίδι είναι ακίνητο στο περιστρεφόμενο σύστημα). Άρα ισχύει $\vec{N} = \vec{\nabla}V = \dfrac{\partial V}{\partial\varpi}\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\phi} = \left(\dfrac{2\cos\phi}{\varpi^3} - \omega^2\varpi\sin^2\phi\right)\hat{\varpi} + \left(\dfrac{\sin\phi}{\varpi^3} - \omega^2\varpi\sin\phi\cos\phi\right)\hat{\phi}$ με $\varpi = 1$. Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα, μηδενίζεται στα σημεία ισορροπίας που έχουμε ήδη βρει $\phi = 0, \pi, \pm\phi_0$. Για να μηδενίζεται ταυτόχρονα και η $\hat{\varpi}$ συνιστώσα πρέπει να ισχύει $2\cos\phi = \omega^2\sin^2\phi$, κάτι που μπορεί να συμβεί μόνο στα $\phi = \pm\phi_0$. Τότε είναι $\cos\phi_0 = 1/\omega^2$, $\sin^2\phi_0 = 1 - \cos^2\phi_0 = 1 - 1/\omega^4$ και $2\cos\phi_0 = \omega^2\sin^2\phi_0 \Leftrightarrow 2/\omega^2 = \omega^2(1 - 1/\omega^4) \Leftrightarrow \omega^4 = 3$. Άρα η στεφάνη δεν ασκεί δύναμη αν $\omega^2 = \sqrt{3}$.

Δηλ. για $\omega^2 = \sqrt{3}$ ακόμα και αν δεν υπήρχε η στεφάνη το δαχτυλίδι θα έμενε ακίνητο στις θέσεις $x = \cos\phi_0 = 1/\sqrt{3}$, $y = \pm\sin\phi_0 = \pm\sqrt{2/3}$ (στο αδρανειακό σύστημα θα περιστρεφόταν με ω γύρω από τον άξονα $\hat{x}$).