Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 24 Σεπτεμβρίου 2018
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: ________________

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 4ης Δεκεμβρίου 2017: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐
αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2

Έχω παραδώσει τις εργασίες 1–7 ☐ (Μέρος Α) 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ (Μέρος Β)

Θέμα 1^o:

Σε σώμα μάζας m ασκείται κεντρική δύναμη $f(r)\hat{r}$ και δύναμη αντίστασης $-m\lambda\vec{v}$ (όπου λ σταθερά).
(α) Δείξτε ότι η ποσότητα $\vec{L}_0 = e^{\lambda t}\vec{r}\times m\vec{v}$ διατηρείται και ότι η κίνηση είναι επίπεδη.
(β) Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο της κίνησης και δείξτε ότι η εξίσωση που καθορίζει την $r(t)$ είναι $m\ddot{r}+m\lambda\dot{r} = f(r)+\dfrac{L_0^2}{mr^3}e^{-2\lambda t}$.
(γ) Βρείτε την δύναμη $f(r)$ για την οποία είναι δυνατή η κίνηση με $r = \dfrac{r_0}{2}\left(1+e^{-\lambda t}\right)$ και $r_0 = \sqrt{\dfrac{L_0}{2\pi m\lambda}}$.
(δ) Βρείτε την $\phi(t)$ και σχεδιάστε την τροχιά στην περίπτωση του προηγούμενου ερωτήματος.
Δίνεται η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a} = \left(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2\right)\hat{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi}$.

Θέμα 2^o:

Σώμα μάζας $m=1$ είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου πάνω σε ένα τραπέζι και στους χρόνους $t<0$ εκτελεί αρμονική ταλάντωση $x=\cos t$ (σε κατάλληλες μονάδες) στον άξονα x.
(Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στο τραπέζι, ενώ τριβές δεν υπάρχουν.)
(α) Αν στους χρόνους $t>0$ στο σώμα ασκείται επιπλέον η δύναμη $\vec{F} = 2e^{-t}\hat{x}$ (εκτός της δύναμης ελατηρίου), ποιο θα είναι το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελεί σε χρόνους $t \gg 1$;
★ (β) Αν στους χρόνους $t>0$ κινούμε το τραπέζι με ταχύτητα $\vec{v}_0 = 2(1-e^{-t})\hat{x}$, ποια θα είναι η κίνηση του σώματος ως προς το τραπέζι;
(γ) Αν στους χρόνους $t>0$ στο σώμα ασκείται η δύναμη ελατηρίου και επιπλέον η δύναμη $\vec{F} = \dfrac{c}{2}e^{1-x}\hat{x}$ με $c>0$ (το τραπέζι είναι ακίνητο) ποια θα είναι η ταχύτητα συναρτήσει της θέσης στην νέα κίνηση;
Τι το ιδιαίτερο έχει η υποπερίπτωση $c=2$;
(δ) Για το πεδίο δύναμης $\left(x_0 e^{x_0-x}-x\right)\hat{x}$, όπου x_0 θετική σταθερά, σχεδιάστε την δυναμική ενέργεια και το διάγραμμα φάσης. Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους.

Θέμα 3^o:

Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι προσεγγιστικά κυκλική (η εκκεντρότητα της γήινης τροχιάς είναι $e = 0.0167 \simeq 0$) ακτίνας α και ενέργειας E_o. Στα ακόλουθα θα θεωρήσουμε κάποια δυσοίωνα και απευκταία σενάρια για το μέλλον της Γης μας.
(α) Κάποτε, μετά από μερικά δισεκατομμύρια έτη, όταν τα καύσιμα του Ήλιου θα τελειώσουν, ο Ήλιος θα εκραγεί, χάνοντας, έστω, τη μισή του μάζα. Θεωρήστε ότι η έκρηξη είναι ακαριαία και κατά την διάρκειά της η θέση και η ταχύτητα της Γης παραμένουν σταθερές, όχι όμως και η ενέργειά της $E' \neq E_o$ η οποία θα αλλάξει αφού πλέον θα βρεθεί απότομα εντός διαφορετικού πεδίου βαρύτητας. Δείξτε ότι τότε η Γη θα χαθεί στο μακρινό διάστημα, αφού η τροχιά της γύρω από τον Ήλιο θα γίνει παραβολική.
(β) Θεωρήστε, σε ένα άλλο σενάριο, ότι η κυκλική κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο σταματά απότομα λόγω κάποιου εξωτερικού παράγοντα, π.χ., λόγω μιας σύγκρουσης με κάποιον εξωηλιακό πλανήτη που ήρθε στο δικό μας πλανητικό σύστημα, ή, κάποιον αστεροειδή και αυτή ακινητοποιείται. Υπολογίστε σε πόσο χρόνο σε ημέρες η ακινητοποιημένη Γη θα πέσει στον Ήλιο λόγω της ελκτικής του δύναμης, που στη διαδικασία αυτή τον θεωρούμε ακίνητο. (Αγνοήστε τις διαστάσεις των σωμάτων.)
(γ) Σε ένα τρίτο δυσοίωνο σενάριο, θεωρήστε ότι η Γη και ο Ήλιος κινούνται σε κυκλικές τροχιές γύρω από το κοινό τους κέντρο μάζας με περίοδο T. Αν κάποια στιγμή σταματήσει απότομα η κυκλική κίνησή τους, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, και αρχίσουν να έλκονται βαρυτικά στην ευθεία που τα συνδέει, δείξτε ότι θα συγκρουσθούν σε χρόνο $t = T\sqrt{2}/8$.
(δ) Στην προηγούμενη περίπτωση (γ) δείξτε ότι οι στιγμιαίες ταχύτητες των δύο σωμάτων $m_1 = M_\odot$ και $m_2 = M_\oplus$ δίδονται από τις εκφράσεις:
$$v_1 = m_2\sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_o}\right)}\,,\, v_2 = m_1\sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_o}\right)},$$
όπου $M = m_1+m_2$, r η απόσταση μεταξύ τους και r_o η αρχική της τιμή.
Σημείωση: Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{b}}}$ μπορεί να

υπολογιστεί με την αντικατάσταση $x = b\cos^2\xi$.

Θέμα 4^o:

Θεωρήστε έναν κομήτη ο οποίος κινείται σε παραβολική τροχιά, στο επίπεδο της εκλειπτικής, δλδ το επίπεδο της τροχιάς της Γης περί τον Ήλιο. Έστω $\lambda\alpha$, όπου $\lambda < 1$, η απόσταση του περιηλίου της τροχιάς του κομήτη (δλδ, η απόσταση της εγγύτερης απόστασης του κομήτη από τον Ήλιο), όπου α η ακτίνα της περίπου κυκλικής τροχιάς της Γης περί τον Ήλιο.

(α) Δείξτε ότι το χρονικό διάστημα σε έτη κατά το οποίο ο κομήτης ευρίσκεται σε απόσταση $r < \alpha$, δλδ ευρίσκεται εντός της τροχιάς της Γης περί τον Ήλιο δίδεται από την έκφραση

$$t = \sqrt{2(1-\lambda)} \cdot \frac{(1+2\lambda)}{3\pi} \text{ έτη.}$$

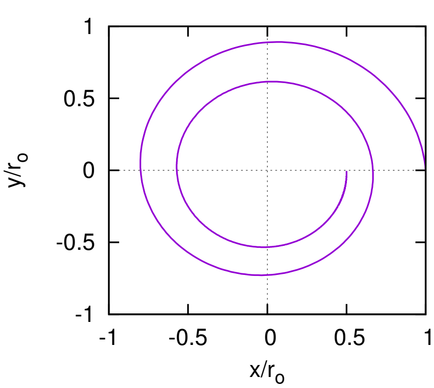
(β) Αν ο κομήτης πλησιάζει τον Ήλιο σε απόσταση ίση με την απόσταση της Αφροδίτης από τον Ήλιο, δλδ, 0.7α, για πόσες ημέρες ο κομήτης θα ευρίσκεται σε απόσταση $r < \alpha$;

Αγνοήστε την βαρυτική αλληλεπίδραση Γης–κομήτη.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) $\dot{\vec{L}}_0 = \lambda e^{\lambda t}\vec{r}\times m\vec{v} + e^{\lambda t}\vec{v}\times m\vec{v} + e^{\lambda t}\vec{r}\times m\vec{a}$ και χρησιμοποιώντας τον νόμο Νεύτωνα $m\vec{a} = f(r)\hat{r} - m\lambda\vec{v}$ βρίσκουμε $\dot{\vec{L}}_0 = 0$.
Η κίνηση γίνεται στο επίπεδο το κάθετο στο (σταθερό) διάνυσμα $\vec{L}_0$, αφού $\vec{L}_0\cdot\vec{r} = 0$.
(β) Σε πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο της κίνησης είναι $\vec{r} = r\hat{r}$, $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi}$, οπότε οι συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα είναι $m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) = f(r) - m\lambda\dot{r}$ και $m\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\right) = -m\lambda r\dot{\phi}$.
Η δεύτερη είναι ισοδύναμη με την διατήρηση του $\vec{L}_0 = e^{\lambda t}\vec{r}\times m\vec{v} = e^{\lambda t}mr^2\dot{\phi}\hat{z}$.
Είναι λοιπόν $\vec{L}_0 = L_0\hat{z}$ με $L_0 = e^{\lambda t}mr^2\dot{\phi}$.
Θέτοντας $\dot{\phi} = \dfrac{L_0}{mr^2}e^{-\lambda t}$ στην πρώτη βρίσκουμε την εξίσωση που καθορίζει την ακτίνα
$m\ddot{r} + m\lambda\dot{r} = f(r) + \dfrac{L_0^2}{mr^3}e^{-2\lambda t}$.
(γ) Θέτοντας στην τελευταία εξίσωση $r = \dfrac{r_0}{2}\left(1 + e^{-\lambda t}\right)$ και κατόπιν $e^{-\lambda t} = \dfrac{2r}{r_0} - 1$ βρίσκουμε $f(r) = -\dfrac{L_0^2}{mr^3}\left(\dfrac{2r}{r_0} - 1\right)^2$.
(δ) Από $\dot{\phi} = \dfrac{L_0}{mr^2}e^{-\lambda t} = \dfrac{4L_0}{mr_0^2}\dfrac{e^{-\lambda t}}{(1+e^{-\lambda t})^2}$ προκύπτει $\phi = 8\pi\displaystyle\int_0^t \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{(1+e^{-\lambda t})^2}dt = 8\pi\left[\dfrac{1}{1+e^{-\lambda t}}\right]_0^t = 4\pi\dfrac{1-e^{-\lambda t}}{1+e^{-\lambda t}} = 4\pi\tanh\dfrac{\lambda t}{2}$ (θεωρώντας χωρίς βλάβη γενικότητας $\phi|_{t=0} = 0$).



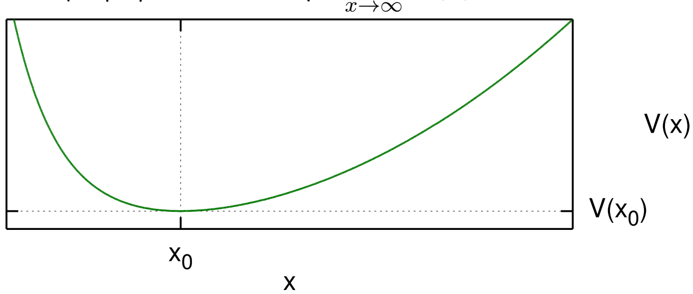
Η αρχική ακτίνα είναι r_0 και καθώς ο χρόνος αυξάνεται μειώνεται μέχρι την τιμή $r_0/2$ (την οποία αποκτά πρακτικά σε χρόνο $5/\lambda$). Η γωνία ϕ αυξάνεται από την μηδενική αρχική τιμή ως 4π (δηλ. συμπληρώνονται δύο πλήρεις περιστροφές).

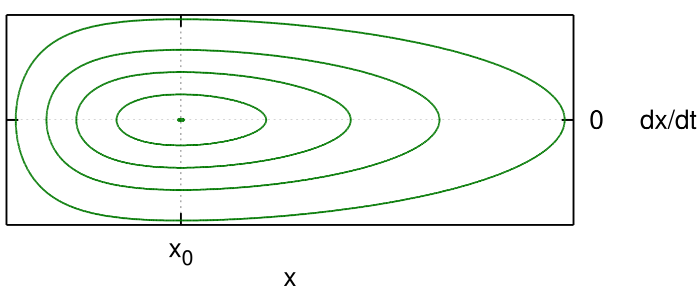
Θέμα 2ο:

(α) Η εξίσωση κίνησης για $t < 0$ είναι $m\ddot{x} + kx = 0$. Αφού έχει λύση $x = \cos t$ και $m = 1$, είναι $k = 1$.
Η εξίσωση κίνησης για $t > 0$ είναι $\ddot{x} + x = 2e^{-t}$. Η λύση της ομογενούς είναι $C_1\cos t + C_2\sin t$ ενώ μια μερική λύση είναι Ae^{-t} με την αντικατάσταση να δίνει $A = 1$.
Άρα η γενική λύση είναι $x = C_1\cos t + C_2\sin t + e^{-t}$ και η παράγωγός της $\dot{x} = -C_1\sin t + C_2\cos t - e^{-t}$. Από τις αρχικές συνθήκες για $t = 0$ (δηλ. τις τελικές συνθήκες της κίνησης με $x = \cos t$, $\dot{x} = -\sin t$ που ισχύει για $t < 0$), έχουμε $x|_{t=0} = 1 \Leftrightarrow C_1 + 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 0$ και $\dot{x}|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow C_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 1$.
Άρα για $t > 0$ η κίνηση είναι $x = \sin t + e^{-t}$.
Σε μεγάλους χρόνους ($t \gtrsim 5$) το εκθετικό μηδενίζεται οπότε το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με μοναδιαίο πλάτος.
(β) Για την μελέτη στο μη-αδρανειακό σύστημα που κινείται με το τραπέζι πρέπει να προσθέσουμε την υποθετική δύναμη $-m\vec{a}_0 = -m\dot{\vec{v}}_0 = 2e^{-t}\hat{x}$. Άρα η κίνηση είναι ίδια με αυτή του προηγούμενου ερωτήματος, $x = \sin t + e^{-t}$.
(γ) Η εξίσωση κίνησης για $t > 0$ είναι $\ddot{x} = \dfrac{c}{2}e^{1-x} - x$.
Υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{v^2}{2} + V(x) = E$ με $V(x) = -\displaystyle\int\left(\dfrac{c}{2}e^{1-x} - x\right)dx = \dfrac{c}{2}e^{1-x} + \dfrac{x^2}{2}$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά), δηλ. ισχύει $\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{c}{2}e^{1-x} + \dfrac{x^2}{2} = E$. Η τιμή της ενέργειας βρίσκεται από τις αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = 1$, $v|_{t=0} = 0$ και είναι $E = \dfrac{c+1}{2}$. Άρα η ταχύτητα συναρτήσει της θέσης στην νέα κίνηση είναι $v = \pm\sqrt{c + 1 - x^2 - c\,e^{1-x}}$ (το πρόσημο ανάλογα με την φορά της κίνησης).
Στην υποπερίπτωση $c = 2$ η επιπλέον δύναμη εξουδετερώνει την δύναμη ελατηρίου στην αρχική θέση $x = 1$ όπου το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο, επομένως το σώμα θα μείνει για πάντα ακίνητο στο $x = 1$.
Στο σημείο $x = 1$ η δυναμική ενέργεια έχει ελάχιστο οπότε η ισορροπία είναι ευσταθής.
Στην γενική περίπτωση, στην αρχική θέση όπου το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο η δύναμη είναι $\left(\dfrac{c}{2} - 1\right)\hat{x}$. Επομένως για $c > 2$ το σώμα αρχικά θα κινηθεί προς μεγαλύτερα x. Μελετώντας την $V(x)$ συμπεραίνουμε ότι έχει ένα ελάχιστο. Επομένως το σώμα θα κινηθεί προς μεγαλύτερα x μέχρι το σημείο $x_{\max}$ όπου $V(x) = E$, δηλ. θα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ του αρχικού σημείου $x = 1$ και

του $x_{\max}$.
Όμοια συμπεραίνουμε ότι για $c < 2$ το σώμα εκτελεί ταλάντωση και το αρχικό σημείο είναι το μέγιστο x (το ελάχιστο είναι η λύση της εξίσωσης $V(x) = E$).

(δ) Είναι ίδιο πεδίο δύναμης με αυτό του προηγούμενου ερωτήματος, με $c = 2x_0 e^{x_0 - 1}$.
Όπως πριν βρίσκουμε δυναμική ενέργεια $V(x) = -\int \left(x_0 e^{x_0 - x} - x\right) dx = x_0 e^{x_0 - x} + \frac{x^2}{2}$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά).
Είναι $V'(x) = x - x_0 e^{x_0 - x}$ και $V''(x) = 1 + x_0 e^{x_0 - x}$. Μηδενισμός της $V'(x)$ σημαίνει $\frac{x}{x_0} = e^{x_0 - x}$. Αυτό συμβαίνει μόνο στο σημείο $x = x_0$ (αφού οι γραφικές παραστάσεις της $\frac{x}{x_0}$ και της $e^{x_0 - x}$ έχουν προφανώς μόνο ένα σημείο τομής). Για $x > x_0$ είναι $V'(x) > 0$ (αφού $\lim_{x \to \infty} V'(x) = +\infty$) και για $x < x_0$ είναι $V'(x) < 0$ (αφού $\lim_{x \to -\infty} V'(x) = -\infty$). Επομένως η $V(x)$ στο $x \to -\infty$ είναι $\lim_{x \to -\infty} V(x) = +\infty$, είναι φθίνουσα συνάρτηση για $x < x_0$, έχει ελάχιστο στο $x = x_0$ ίσο με $V(x_0) = x_0 + x_0^2/2$ και είναι αύξουσα συνάρτηση για $x > x_0$ με $\lim_{x \to \infty} V(x) = \infty$.





Σημείο ισορροπίας είναι το $x = x_0$ και είναι ευσταθές αφού η δυναμική ενέργεια σε αυτό είναι ελάχιστη.

Θέμα 3ο:

Η αρχική τροχιά της Γης είναι κυκλική ακτίνας α, οπότε η αρχική ταχύτητα είναι $v = \sqrt{GM_\odot/\alpha}$ και η ενέργεια $E_o = \frac{M_\oplus v^2}{2} - \frac{GM_\odot M_\oplus}{\alpha}$.
(α) Μετά την απότομη αλλαγή του βαρυτικού πεδίου η ενέργεια είναι $E' = \frac{M_\oplus v^2}{2} - \frac{G(M_\odot/2)M_\oplus}{\alpha} = \frac{GM_\odot M_\oplus}{2\alpha} - \frac{G(M_\odot/2)M_\oplus}{\alpha} = 0$. Άρα η τροχιά θα είναι παραβολική.

(β) Η κίνηση είναι ευθύγραμμη και το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\frac{M_\oplus \dot{r}^2}{2} - \frac{GM_\odot M_\oplus}{r} = E = -\frac{GM_\odot M_\oplus}{\alpha}$, οπότε η ταχύτητα σε κάθε θέση είναι $\dot{r} = -\sqrt{2GM_\odot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)}$.
Η Γη θα πέσει στον Ήλιο όταν η ακτίνα μηδενιστεί (αγνοώντας τις διαστάσεις των σωμάτων), σε χρόνο $t = \int_\alpha^0 \frac{dr}{\dot{r}} = \int_\alpha^0 \frac{dr}{-\sqrt{2GM_\odot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)}}$.
Θέτοντας $r = \alpha \cos^2 \phi$ προκύπτει $t = \sqrt{\frac{2\alpha^3}{GM_\odot}} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \ \ d\phi$. Το ολοκλήρωμα είναι $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \ \ d\phi = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} d\phi = \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin(2\phi)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$ οπότε $t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2\alpha^3}{GM_\odot}}$. Ένα έτος, δηλ. 365 ημέρες, ισούται με $2\pi\sqrt{\frac{\alpha^3}{GM_\odot}}$, επομένως ο χρόνος σε ημέρες είναι $t = \frac{\sqrt{2}}{8} \times 365 = 64.5$.

(γ) Έστω $\vec{r}$ το διάνυσμα από τον Ήλιο $m_1 = M_\odot$ στην Γη $m_2 = M_\oplus$. Από το πρόβλημα των δύο σωμάτων γνωρίζουμε ότι $\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}$ όπου $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ και $\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\hat{r}$ η βαρυτική δύναμη που ασκεί το m_1 στο m_2. Δηλ. ισχύει $\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$ όπου $M = m_1 + m_2$ και άρα η λύση για το διάνυσμα $\vec{r}$ είναι ακριβώς ίδια με την θέση σώματος στο πεδίο βαρύτητας ακίνητης μάζας M.
Η περίοδος της αρχικής κίνησης είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{r_o^3}{GM}}$ και από την στιγμή που τα σώματα στιγμιαία ακινητοποιούνται, θα συγκρουστούν σε χρόνο (χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος) $t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2r_o^3}{GM}} = \frac{T\sqrt{2}}{8}$.

(δ) Αν r_1 και r_2 είναι οι αποστάσεις των σωμάτων από το κέντρο μάζας τους ισχύουν $m_1 r_1 = m_2 r_2$ και $r_1 + r_2 = r$, δηλ. $r_1 = \frac{m_2}{M} r$, $r_2 = \frac{m_1}{M} r$. Παραγωγίζοντας, τα μέτρα των ταχυτήτων είναι $v_1 = \frac{m_2}{M}|\dot{r}|$, $v_2 = \frac{m_1}{M}|\dot{r}|$.
Το $|\dot{r}|$ προκύπτει από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{GM}{r} = \text{σταθερά} = -\frac{GM}{r_o}$ (από αρχικές συν-

θήκες), δηλ. $|\dot{r}| = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o}\right)}$.

Θέμα 4^o:

(α) Η τροχιά είναι παραβολική, επομένως η ενέργεια είναι $E = 0$, δηλ. $\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GM_\odot m}{r} = 0 \Leftrightarrow$ $|\dot{r}| = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}}$.
Στο περιήλιο $r = \lambda\alpha$ είναι $\dot{r} = 0$ επομένως η προηγούμενη σχέση δίνει $L = m\sqrt{2GM_\odot\lambda\alpha}$.
Η ακτινική ταχύτητα σε κάθε απόσταση είναι λοιπόν $|\dot{r}| = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r} - \frac{2GM_\odot\lambda\alpha}{r^2}}$.
Ολοκληρώνοντας την $dt = dr/\dot{r}$ βρίσκουμε τον ζητούμενο χρόνο. Ο χρόνος που κινείται από $r = \alpha$ σε $r = \lambda\alpha$ είναι ίσος με τον χρόνο που κινείται από $r = \lambda\alpha$ σε $r = \alpha$, επομένως ο συνολικός χρόνος που κινείται ο κομήτης σε $r < \alpha$ είναι $t = 2\int_{\lambda\alpha}^{\alpha}\frac{dr}{\dot{r}} = \int_{\lambda\alpha}^{\alpha}\frac{2\,dr}{\sqrt{\frac{2GM_\odot}{r} - \frac{2GM_\odot\lambda\alpha}{r^2}}} =$
$\sqrt{\frac{2}{GM_\odot}}\int_{\lambda\alpha}^{\alpha}\frac{r\,dr}{\sqrt{r-\lambda\alpha}}$.
Με την αντικατάσταση $r = x + \lambda\alpha$ βρίσκουμε

$$t = \sqrt{\frac{2}{GM_\odot}}\int_0^{(1-\lambda)\alpha}\left(x^{1/2} + \lambda\alpha x^{-1/2}\right)dx$$
$$= \sqrt{\frac{2}{GM_\odot}}\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\lambda\alpha x^{1/2}\right]_0^{(1-\lambda)\alpha}$$
$$= \sqrt{\frac{2\alpha^3(1-\lambda)}{GM_\odot}}\,\frac{2(1+2\lambda)}{3}.$$

Ένα έτος ισούται με $2\pi\sqrt{\frac{\alpha^3}{GM_\odot}}$, επομένως ο χρόνος σε έτη είναι $t = \sqrt{2(1-\lambda)}\,\frac{1+2\lambda}{3\pi}$ έτη.
(β) Για $\lambda = 0.7$ βρίσκουμε
$t = \sqrt{2(1-0.7)}\,\frac{1+2\times 0.7}{3\pi}\times 365 = 72$ ημέρες.