Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 9 Μαΐου 2018
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: ________________

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 4ης Δεκεμβρίου 2017: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐
αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2

Έχω παραδώσει τις εργασίες 1–7 ☐ (Μέρος Α) 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ (Μέρος Β)

Θέμα 1^o:

Έστω σφαιρικός πλανήτης μάζας M και ακτίνας R.
Σώμα μάζας m βάλλεται ακτινικά από την επιφάνεια του πλανήτη με ταχύτητα $v_0\hat{r}$ και κινείται υπό την επίδραση του βάρους του $-\dfrac{GMm}{r^2}\hat{r}$ και αντίστασης μέτρου $\dfrac{1}{2}C\rho S v^2$, όπου C και S σταθερές, v το μέτρο της ταχύτητας και ρ η πυκνότητα της ατμόσφαιρας του πλανήτη.
Σε όλα τα επόμενα η κίνηση του m είναι μόνο ακτινική και η πυκνότητα της ατμόσφαιρας θεωρείται αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από το κέντρο, δηλ. $\rho = \rho_0 \dfrac{R^2}{r^2}$, όπου ρ_0 σταθερά (η πυκνότητα στην επιφάνεια).
(α) Δείξτε ότι όσο το σώμα απομακρύνεται η κινητική του ενέργεια T συνδέεται με την βαρυτική δυναμική ενέργεια V μέσω της σχέσης $(1+\lambda T)\, e^{\lambda V} =$ σταθερά, όπου $\lambda = \dfrac{C\rho_0 R^2 S}{GMm^2}$.
Όμοια δείξτε ότι όταν το σώμα πλησιάζει τον πλανήτη ισχύει $(1-\lambda T)\, e^{-\lambda V} =$ σταθερά.
(β) Ποια η ταχύτητα διαφυγής v_δ του σώματος;
(γ) Αν το σώμα βάλλεται με ταχύτητα $v_0 < v_\delta$ με τι ταχύτητα επιστρέφει στην επιφάνεια του πλανήτη;
★ (δ) Δείξτε ότι το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος παραμένει ίδιο αν το σώμα κινείται ακτινικά υπό την επίδραση ελκτικής κεντρικής δύναμης $-\dfrac{dV}{dr}\hat{r}$ και αντίστασης μέτρου $\lambda T \dfrac{dV}{dr}$, ανεξάρτητα με το ποια είναι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(r)$.
Βρείτε την ταχύτητα διαφυγής στην γενική αυτή περίπτωση.

Θέμα 2^o:

Έστω πεδίο δύναμης $\vec{F} = -x\cos y\,\hat{x} + \lambda x^n \sin y\,\hat{y}$ (σε κατάλληλες μονάδες) με λ, n σταθερές.
(α) Πότε είναι συντηρητικό και ποια είναι τότε η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας;
(β) Σώμα μάζας $m=1$ κινείται χωρίς τριβές πάνω στην ευθεία $y=y_0$ μέσα στο παραπάνω πεδίο. Αρχικά βρίσκεται στο σημείο $x=0$, $y=y_0$ και έχει ταχύτητα $v_0\hat{x}$. Για ποια y_0 το σώμα ξαναγυρνά στην αρχική θέση;
★ (γ) Σώμα μάζας $m=1$ κινείται πάνω στην ευθεία $y=\pi/3$ μέσα στο παραπάνω πεδίο. Αρχικά βρίσκεται στο σημείο $x=0$, $y=\pi/3$ και έχει ταχύτητα $\hat{x}$. Έστω $n=\lambda=1$ και υπάρχει τριβή ολίσθησης μεταξύ του σώματος και της ευθείας $y=\pi/3$ με συντελεστή $\mu = 1/\sqrt{3}$. Ποια η θέση του σώματος σε κάθε χρόνο;
(δ) Σώμα μάζας $m=1$ κινείται χωρίς τριβές πάνω στην ευθεία $x=1$ μέσα στο παραπάνω πεδίο. Αρχικά βρίσκεται στο σημείο $x=1$, $y=0$ και έχει ταχύτητα $v_0\hat{y}$. Βρείτε δυναμικό για την μονοδιάστατη αυτή κίνηση και με την βοήθεια του γραφήματός του αποφανθείτε για ποιες v_0 το σώμα ξαναγυρνά στην αρχική θέση.
(Υπόδειξη: Διακρίνετε περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο του λ.)

Θέμα 3ο:

Στο μεσοαστρικό χώρο παρατηρούνται πολύ χαμηλής πυκνότητας γιγάντια μοριακά νεφελώματα (ΓΜΝ) αερίου υδρογόνου, μάζας M και διαστάσεων R. Επίσης παρατηρούνται μικρά και πυκνά μεσοαστρικά «σφαιρίδια» (Bok Globules) (Σ), δλδ, περιοχές αερίου και σκόνης που έχουν πολύ μεγαλύτερη πυκνότητα και πολύ μικρή μάζα $m \ll M$ και ακτίνα, σε σχέση με τα ΓΜΝ. Ένα τέτοιο σφαιρίδιο κινείται στο μεσοαστρικό χώρο, σε απόσταση r απο το κέντρο ενός ακίνητου ΓΜΝ, όπου $0 < r < \infty$. Θεωρούμε ότι το ΓΜΝ είναι σφαιρικό με ακτίνα R, έχει σταθερή πυκνότητα και αμελούμε όλες τις μη βαρυτικές αλληλεπιδράσεις.

(α) Να υπολογισθεί το δυναμικό $V(r)$ και η δύναμη $\vec{F}(r)$ που αισθάνεται το Σ καθώς κινείται στο μεσοαστρικό χώρο, εντός ή εκτός του ΓΜΝ, δλδ σε αποστάσεις r: (i) $0 < r \leq R$ και (ii) $R \leq r < \infty$. Κάνετε ένα πρόχειρο διάγραμμα του $V(r)$ σημειώνοντας τις τιμές του δυναμικού για $r = R$ και $r = 0$. (Η τιμή του δυναμικού σε άπειρη απόσταση θεωρείται μηδενική.)

(β) Έστω ότι ένα Σ έχει ολική ενέργεια $E = -\dfrac{5GMm}{4R}$ και στροφορμή γύρω απο το $r = 0$ ίση με $L = m\left(\dfrac{GMR}{32}\right)^{1/2}$.
Παραμένει το Σ πάντα εντός του ΓΜΝ, εκτός του ΓΜΝ, ή κινείται μερικώς εντός του ΓΜΝ και μερικώς έξω από αυτό ;

(γ) Δείξτε ότι η τροχιά του Σ είναι επίπεδη και ελλειπτική. Υπολογίστε το περίκεντρο και το απόκεντρο αυτής. Για απλούστευση, θεωρείστε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$, το Σ ευρίσκεται σε σημείο του άξονα x και έχει ταχύτητα παράλληλη στον άξονα y, σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy με την αρχή του στο κέντρο του ΓΜΝ.

(δ) ★ Να υπολογισθεί η εξίσωση της τροχιάς του Σ σε πολικές συντεταγμένες $r(\theta)$ για τις δεδομένες τιμές της ενέργειας και στροφορμής του. Επαληθεύστε και από αυτή την πολική εξίσωση $r(\theta)$ τις αποστάσεις του περικέντρου και του αποκέντρου που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Δίδεται: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{-2cx - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$.

Θέμα 4ο:

Η εξίσωση κίνησης ενός σημειακού ηλεκτρικού φορτίου $-e$, μάζας m, στο χώρο ενός μαγνητικού μονοπόλου μαγνητικού φορτίου g που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, είναι

$$m\ddot{\vec{r}} = -eg\frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{r}}{r^3}\,.$$

Θεωρείστε το μαγνητικό μονόπολο πολύ μεγάλης μάζας, δλδ, πρακτικά ακίνητο.

(α) Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια $T = \dfrac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^{\,2}$ είναι μια σταθερά της κινήσεως.

(β) Δείξτε ότι η ποσότητα $\vec{J} = \vec{L} + \dfrac{eg\vec{r}}{r}$ είναι επίσης μια σταθερά της κινήσεως.

(γ) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του (β) για να δείξετε ότι το ηλεκτρικό φορτίο κινείται πάνω στην επιφάνεια ενός κώνου με άξονα συμμετρίας το $\vec{J}$ και γωνία ανοίγματος ϕ που δίδεται από την σχέση

$$\cos\phi = \frac{eg}{|\vec{J}|}\,.$$

Δίδεται: $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) \vec{B} - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) \vec{C}$.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

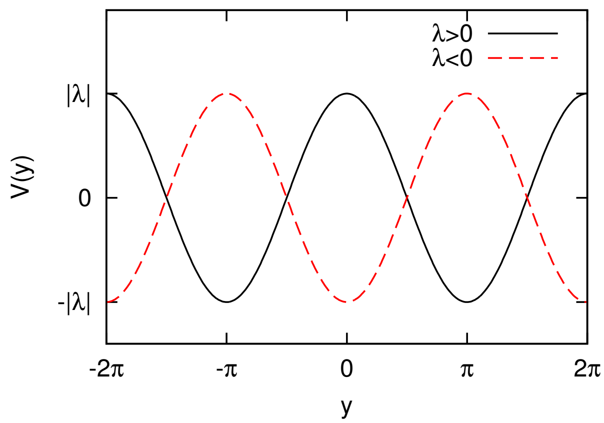
(α) Ο νόμος Νεύτωνα, με $\vec{v} = v\hat{r}$, $\vec{a} = \dot{v}\hat{r}$ είναι $m\dot{v} = -\dfrac{GMm}{r^2} \mp \dfrac{C\rho_0 R^2 S v^2}{2r^2}$, όπου το πάνω πρόσημο αντιστοιχεί στην απομάκρυνση και το κάτω στο πλησίασμα. Αυτή πρέπει να είναι ισοδύναμη με την $(1 \pm \lambda T)\, e^{\pm\lambda V} =$ σταθερά. Παραγωγίζοντας την τελευταία έχουμε $\dot{T} + \dot{V}(1 \pm \lambda T) = 0$. Θέτοντας $\dot{T} = mv\dot{v}$, $\dot{V} = \dfrac{GMm}{r^2} v$ και χρησιμοποιώντας τον νόμο Νεύτωνα βλέπουμε ότι πράγματι ισχύει.
Άμεση απόδειξη: Το αριστερό μέλος του νόμου Νεύτωνα γράφεται $m\dot{v} = m\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dv}{dr} = mv\dfrac{dv}{dr} = \dfrac{dT}{dr}$. Αλλάζοντας μεταβλητή από r στην δυναμική ενέργεια $V = -\dfrac{GMm}{r}$ γράφεται $\dfrac{dT}{dV}\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{GMm}{r^2}\dfrac{dT}{dV}$. Άρα ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\dfrac{GMm}{r^2}\dfrac{dT}{dV} = -\dfrac{GMm}{r^2} \mp \dfrac{C\rho_0 R^2 S v^2}{2r^2} \Leftrightarrow \dfrac{dT}{dV} \pm \lambda T = -1$. Μια μερική λύση είναι η $\mp\dfrac{1}{\lambda}$ ενώ η λύση της ομογενούς είναι $De^{\mp\lambda V}$ όπου D σταθερά. Άρα η γενική λύση είναι $T = \mp\dfrac{1}{\lambda} + De^{\mp\lambda V} \Leftrightarrow (1 \pm \lambda T)\, e^{\pm\lambda V} = \pm\lambda D =$ σταθερά.
(β) Για να διαφύγει το σώμα πρέπει οριακά να φτάσει στο άπειρο (όπου $V_\infty = 0$) με μηδενική ταχύτητα, δηλ. $T_\infty = 0$. Αν $T_0 = \dfrac{mv_\delta^2}{2}$ η αρχική κινητική ενέργεια και $V_0 = -\dfrac{GMm}{R}$ η αρχική δυναμική ενέργεια, είναι $(1 + \lambda T_0)\, e^{\lambda V_0} = (1 + \lambda T_\infty)\, e^{\lambda V_\infty} \Leftrightarrow \left(1 + \lambda\dfrac{mv_\delta^2}{2}\right) e^{-\frac{\lambda GMm}{R}} = 1 \Leftrightarrow$ $v_\delta = \sqrt{\dfrac{2}{m\lambda}\left(e^{\frac{\lambda GMm}{R}} - 1\right)}$, ή αντικαθιστώντας το λ, $v_\delta = \sqrt{\dfrac{2GMm}{C\rho_0 R^2 S}\left(e^{\frac{C\rho_0 RS}{m}} - 1\right)}$.
(γ) Κατά την απομάκρυνση από την επιφάνεια μέχρι το ανώτερο σημείο όπου η ταχύτητα είναι μηδενική, ισχύει $(1 + \lambda T_0)\, e^{\lambda V_0} = (1 + 0)\, e^{\lambda V_m}$, όπου V_m η δυναμική ενέργεια στο ανώτερο σημείο. Κατά την επιστροφή ισχύει όμοια $(1 - 0)\, e^{-\lambda V_m} = (1 - \lambda T_0')\, e^{-\lambda V_0}$, όπου T_0' η κινητική ενέργεια όταν το σώμα ξαναγυρίσει στην επιφάνεια του πλανήτη. Απαλείφοντας το V_m βρίσκουμε $\dfrac{1}{T_0'} = \dfrac{1}{T_0} + \lambda \Leftrightarrow$ $T_0' = \dfrac{T_0}{1 + \lambda T_0}$. Η ταχύτητα επιστροφής είναι $v_0' = \dfrac{v_0}{\sqrt{1 + \dfrac{\lambda m v_0^2}{2}}}$.

(δ) Ο νόμος Νεύτωνα είναι $m\dot{v} = -\dfrac{dV}{dr} \mp \lambda T\dfrac{dV}{dr}$. Το αριστερό μέλος γράφεται $m\dot{v} = mv\dfrac{dv}{dr} = \dfrac{dT}{dr}$. Αλλάζοντας μεταβλητή από r στην δυναμική ενέργεια $V(r)$ γράφεται $\dfrac{dT}{dV}\dfrac{dV}{dr}$, άρα ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\dfrac{dT}{dV} \pm \lambda T = -1$ ανεξαρτήτως του ποια είναι η συνάρτηση $V(r)$. Η γενική λύση είναι $(1 \pm \lambda T)\, e^{\pm\lambda V} =$ σταθερά.
Όμοια με πριν, μεταξύ του αρχικού σημείου όπου $V = V_0$ και της μέγιστης απόστασης όπου $V = V_m$ ισχύει $(1 + \lambda T_0)\, e^{\lambda V_0} = (1 + 0)\, e^{\lambda V_m}$ κατά την απομάκρυνση και $(1 - 0)\, e^{-\lambda V_m} = (1 - \lambda T_0')\, e^{-\lambda V_0}$ κατά την επιστροφή, άρα $\dfrac{1}{T_0'} = \dfrac{1}{T_0} + \lambda \Leftrightarrow T_0' = \dfrac{T_0}{1 + \lambda T_0}$.
Υποπερίπτωση αποτελεί η κίνηση σε ομογενές πεδίο, όπως στο βαρυτικό πεδίο της Γης κοντά στην επιφάνειά της, υπό την επίδραση αντίστασης ανάλογης του τετραγώνου της ταχύτητας (ανεξάρτητης της απόστασης).
Για να διαφύγει το σώμα πρέπει οριακά να φτάσει στο άπειρο με $T_\infty = 0$. Αν $T_0 = \dfrac{mv_\delta^2}{2}$ η αρχική κινητική ενέργεια και V_0 η αρχική δυναμική ενέργεια, είναι $\left(1 + \lambda\dfrac{mv_\delta^2}{2}\right) e^{\lambda V_0} = (1 + 0)\, e^{\lambda V_\infty}$ οπότε η ταχύτητα διαφυγής είναι συνάρτηση της διαφοράς δυναμικής ενέργειας $v_\delta = \sqrt{\dfrac{2}{m\lambda}\left[e^{\lambda(V_\infty - V_0)} - 1\right]}$.

Θέμα 2^o:

(α) Είναι συντηρητικό αν υπάρχει συνάρτηση $V(x, y, x)$ τέτοια ώστε $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, δηλ. πρέπει να ισχύουν $\dfrac{\partial V}{\partial x} = x\cos y$, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = -\lambda x^n \sin y$, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0$. Η τρίτη δίνει $V = V(x, y)$. Η πρώτη δίνει $V = \dfrac{x^2}{2}\cos y + C(y)$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε $-\dfrac{x^2}{2}\sin y + \dfrac{d}{dy}C(y) = -\lambda x^n \sin y$. Για να ισχύει η τελευταία για κάθε x και y, πρέπει $n = 2$, $\lambda = \dfrac{1}{2}$ και $C(y) =$ σταθερά. Άρα το πεδίο είναι συντηρητικό αν $n = 2$, $\lambda = \dfrac{1}{2}$ και η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $V = \dfrac{x^2}{2}\cos y$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά).
Αλλιώς: Το πεδίο είναι συντηρητικό αν $\vec{\nabla} \times \vec{F} =$

$0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \Leftrightarrow \lambda n x^{n-1} \sin y = x \sin y$, δηλ. αν $n = 2$ και $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
Η δυναμική ενέργεια θα βρεθεί από $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$, δηλ. πρέπει να ισχύουν $\dfrac{\partial V}{\partial x} = x \cos y$, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = -\dfrac{1}{2} x^2 \sin y$, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0$. Η τρίτη δίνει $V = V(x, y)$. Η πρώτη δίνει $V = \dfrac{x^2}{2} \cos y + C(y)$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε $\dfrac{d}{dy} C(y) = 0 \Leftrightarrow C =$ σταθερά. Άρα η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $V = \dfrac{x^2}{2} \cos y$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά). (Η σχέση $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ εξασφαλίζει ότι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων για την V έχει λύση.)
(β) Είναι $\vec{r} = x\hat{x} + y_0\hat{y}$, $\vec{v} = \dot{x}\hat{x}$, $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x}$. Η $\hat{x}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $\ddot{x} = -x \cos y_0$ είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή (οπότε το σώμα ξαναγυρνά στο αρχικό σημείο) αν $\cos y_0 > 0$, δηλ. αν $y_0 \in \left(2\nu\pi - \dfrac{\pi}{2}, 2\nu\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ με οποιοδήποτε ακέραιο ν.
(γ) Είναι $\vec{r} = x\hat{x} + \dfrac{\pi}{3}\hat{y}$, $\vec{v} = \dot{x}\hat{x}$, $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x}$. Η δύναμη από το πεδίο είναι $\vec{F} = -\dfrac{x}{2}\,\hat{x} + \dfrac{x\sqrt{3}}{2}\,\hat{y}$. Η δύναμη $\vec{N}$ που ασκεί η ευθεία στο σώμα εξουδετερώνει την F_y και άρα είναι $\vec{N} = -\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\,\hat{y}$. Επομένως η τριβή ολίσθησης όσο το σώμα κινείται προς μεγαλύτερα x είναι $\vec{T} = -\mu|\vec{N}|\hat{x} = -\dfrac{x}{2}\,\hat{x}$. Η $\hat{x}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{T}$ είναι $\ddot{x} = -x$, δηλ. εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με λύση $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Από τις αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = 0$, $\dot{x}|_{t=0} = 1$ βρίσκουμε $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, επομένως όσο το σώμα κινείται προς μεγαλύτερα x είναι $x = \sin t$.
Σε χρόνο $\pi/2$ το σώμα φτάνει στην θέση $x = 1$ όπου η ταχύτητα στιγμιαία μηδενίζεται. Στο σημείο αυτό η $F_x = -\dfrac{1}{2}$ δεν μπορεί να υπερνικήσει την στατική τριβή (η οποία είναι τουλάχιστον ίση με την τριβή ολίσθησης $\vec{T} = \mu|\vec{N}|\hat{x} = \dfrac{1}{2}\,\hat{x}$). Άρα το σώμα θα μείνει για πάντα στο $x = 1$.
Συνοψίζοντας, $x = \begin{cases} \sin t & \text{αν } 0 \le t \le \pi/2\,, \\ 1 & \text{αν } t \ge \pi/2\,. \end{cases}$
(δ) Είναι $\vec{r} = \hat{x} + y\hat{y}$, $\vec{v} = \dot{y}\hat{y}$, $\vec{a} = \ddot{y}\hat{y}$. Η $\hat{y}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα είναι $\ddot{y} = \lambda \sin y$ (είναι εξίσωση εκκρεμούς). Ισοδυναμεί με ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot{y}^2}{2} + V(y) = E$, όπου $V(y) = -\int \lambda \sin y \; dy = \lambda \cos y$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά). Παρακάτω φαίνεται το γράφημα της $V(y)$ για θετικά και αρνητικά λ (είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π).



Αφού αρχικά το σώμα βρίσκεται στο $y = 0$ και έχει ταχύτητα v_0 η ενέργεια είναι $E = \dfrac{v_0^2}{2} + V(0) = \dfrac{v_0^2}{2} + \lambda$. Για να ξαναγυρίσει το σώμα στο αρχικό σημείο πρέπει να υπάρχει σημείο ανάκλασης όπου $E = V(y)$, δηλ. πρέπει να ισχύει $E < V_{\max} \Leftrightarrow E < |\lambda|$.
Αν $\lambda \ge 0$ είναι $E = \dfrac{v_0^2}{2} + \lambda > |\lambda|$, οπότε αυτό δεν είναι δυνατόν. (Ισχύει $E > V(y)$ για όλα τα y, επομένως η φορά κίνησης δεν αλλάζει.)
Αν $\lambda < 0$ ισχύει $E < |\lambda|$ όταν $\dfrac{v_0^2}{2} - |\lambda| < |\lambda| \Leftrightarrow |v_0| < 2\sqrt{|\lambda|}$.
Άρα το σώμα γυρνά στο αρχικό σημείο αν $\lambda < 0$ και $|v_0| < 2\sqrt{|\lambda|}$.

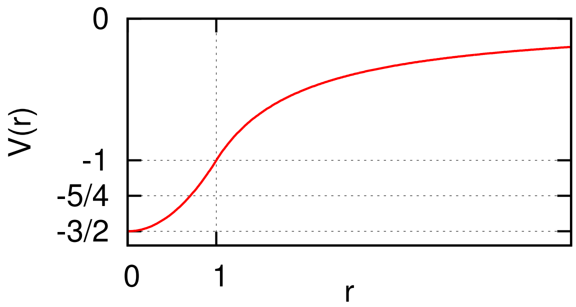
Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

(α) Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Νεύτωνα για τον υπολογισμό του δυναμικού εντός κοίλης σφαίρας (βλ. Εισαγωγή στη Θεωρητική Μηχανική, ΚΤ, σελ. 332) προκύπτει,

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2), & \text{όταν } 0 < r \le R\,, \\ -\dfrac{GM}{r} & \text{όταν } R \le r < \infty\,. \end{cases}$$

και η δύναμη, $\vec{F} = -m\vec{\nabla} V(r)$,

$$\vec{F}(r) = \begin{cases} -\dfrac{GMm}{R^3}\vec{r}, & \text{όταν } 0 < r \le R\,, \\ -\dfrac{GMm}{r^3}\vec{r}, & \text{όταν } R \le r < \infty\,. \end{cases}$$



(β) Από $mv^2/2+mV(r)=E$ προκύπτει ότι ισχύει $mV(r)\leq E$.
(Η λύση της ανισότητας αυτής είναι υπερσύνολο της περιοχής κίνησης, η οποία δίνεται από $mV'\leq E$ όπου $V'=V+v_\theta^2/2$ το υποθετικό δυναμικό.)
Όπως φαίνεται από το προηγούμενο διάγραμμα του δυναμικού $V(r)$, όταν η ολική ενέργεια είναι ίση με $E=-5GMm/4R$, το Σ μπορεί να κινηθεί μόνο εντός του ΓΜΝ, επειδή ισχύει : $-3GMm/2R<-5GMm/4R<-GMm/R$.

(γ) Η δύναμη που ασκείται στο Σ, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα είναι της μορφής $\vec{F}=-k\vec{r}$ με $k=GMm/R^3$.
Επομένως, $\vec{r}\times\vec{F}=d\vec{L}/dt=0$, $d\vec{L}/dt=0$ και η στροφορμή $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, οπότε η τροχιά είναι επίπεδη, στο επίπεδο $x-y$. Έτσι, η εξίσωση της κίνησης του σωματιδίου $m\ddot{\vec{r}}=-k\vec{r}$ στις Καρτεσιανές συντεταγμένες $x-y$ είναι,

$$\ddot{x}+\omega^2x=0\,,\quad \ddot{y}+\omega^2y=0\,,$$

με $\omega^2=k/m=GM/R^3$ και με γενική λύση,

$$x=C_1\sin(\omega t)+C_2\cos(\omega t)\,,$$

$$y=C_3\sin(\omega t)+C_4\cos(\omega t)\,.$$

Λόγω των αρχικών συνθηκών, $x(t=0)=r_o$, $y(t=0)=0$, $\dot{x}(t=0)=0$, $\dot{y}(t=0)=v_o$ η λύση είναι,

$$x=r_o\cos(\omega t),\ y=(v_o/\omega)\sin(\omega t)\,,$$

οπότε η τροχιά ικανοποιεί την εξίσωση της έλλειψης,

$$\frac{x^2}{r_o^2}+\frac{y^2}{(v_o/\omega)^2}=1\,,$$

δλδ η τροχιά του Σ είναι ελλειπτική.
Η κίνηση του Σ περατώνεται στις αψίδες, όπου ισχύει,

$$\dot{r}=0\,,\quad rmv_\theta=m\sqrt{\frac{GMR}{32}}\,,$$

$$\frac{GMm}{2R^3}(r^2-3R^2)+\frac{mv_\theta^2}{2}=-\frac{5GMm}{4R}\,.$$

Απαλείφοντας την v_θ προκύπτει ότι η απόσταση των αψίδων ικανοποιεί την εξίσωση

$$32\left(\frac{r}{R}\right)^4-16\left(\frac{r}{R}\right)^2+1=0\,,$$

με λύσεις,

$$r_\pm=\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{2}}{8}}R\Longrightarrow(r_+\simeq0.65R,r_-\simeq0.27R)\,,$$

που δίδουν τις αποστάσεις του απόκεντρου και περίκεντρου της τροχιάς του Σ.
Το ίδιο προκύπτει από την εξίσωση $mV'=E$ που ισχύει στα σημεία όπου η ακτίνα r είναι ακρότατη και άρα η ακτινική ταχύτητα μηδενική, θέτοντας $mV'=mV+\dfrac{L^2}{2mr^2}=-\dfrac{GMm}{2R^3}(3R^2-r^2)+\dfrac{GMmR}{64r^2}$ και $E=-\dfrac{5GMm}{4R}$.
Ένας άλλος τρόπος να βρεθούν οι ακρότατες αποστάσεις είναι να χρησιμοποιηθεί η περιγραφή της τροχιάς σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Προφανώς αντιστοιχούν στους ημιάξονες της ελλειπτικής τροχιάς, δηλ. $r_+=\max\{r_o,|v_o|/\omega\}$ και $r_-=\min\{r_o,|v_o|/\omega\}$.
Οι τιμές των r_o και v_o μπορούν να βρεθούν από τις $E=\dfrac{mv_o^2}{2}+V(r_o)\Leftrightarrow-\dfrac{5GMm}{4R}=\dfrac{mv_o^2}{2}+\dfrac{GMm}{2R^3}(r_o^2-3R^2)$ και $L=mr_o|v_o|\Leftrightarrow m\sqrt{\dfrac{GMR}{32}}=mr_o|v_o|$. Οι λύσεις είναι $r_o=\sqrt{\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{8}}R$, $|v_o|/\omega=\sqrt{\dfrac{2\mp\sqrt{2}}{8}}R$, επομένως η ελάχιστη απόσταση είναι $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{8}}R\approx0.27R$ και η μέγιστη $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{8}}R\approx0.65R$.

(δ) Από τη διατήρηση ενέργειας και στροφορμής έχουμε,

$$E=V(r)+\frac{m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)}{2}\,,\quad L=mr^2\dot{\theta}\,,$$

και αντικαθιστώντας

$$\dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}\,,\dot{r}=\dot{\theta}\frac{dr}{d\theta}=\frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\,,$$

έχουμε

$$\frac{GMm}{2R^3}(r^2-3R^3)+\frac{m}{2}\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]\frac{GMR}{32}=$$

$$-\frac{5GMm}{4R},$$

ή,

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^2\left[-32(\frac{r}{R})^4 + 16(\frac{r}{R})^2 - 1\right],$$

ή,

$$d\theta = \pm\left[-32(\frac{r}{R})^4 + 16(\frac{r}{R})^2 - 1\right]^{-1/2}\frac{dr}{r}.$$

Έστω $x = (r/R)^{-2}$,

$$\mp 2d\theta = \frac{dx}{\sqrt{-32+16x-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{32-(x-8)^2}},$$

$$\alpha \mp 2\theta = \sin^{-1}\frac{x-8}{\sqrt{32}},$$

$x = 8+4\sqrt{2}\sin(\alpha\mp 2\theta) = 8+4\sqrt{2}\cos(2\theta+\beta)$,

δηλ.,

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{4[2+\sqrt{2}\cos(2\theta+\beta)]},$$

όπου β είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης. Στις αψίδες, το r είναι μέγιστο ή ελάχιστο, δλδ, $\cos(2\theta+\beta) = \pm 1$ και επομένως εκεί

$$r_\pm = \sqrt{\frac{2\pm\sqrt{2}}{8}}R.$$

Θέμα 4^o:

(α)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2\right) = m\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\cdot\left(-ge\frac{\dot{\vec{r}}\times\vec{r}}{r^3}\right) = 0.$$

(β)

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{J}} &= \frac{d}{dt}\left(m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} + \frac{eg\vec{r}}{r}\right)\\
&= m\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} + m\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}} + \frac{eg\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{eg\vec{r}}{r^2}\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r}\\
&= \vec{r}\times\left(-eg\frac{\dot{\vec{r}}\times\vec{r}}{r^3}\right) + 0 + \frac{eg\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{eg\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3}\\
&= -eg\frac{r^2\dot{\vec{r}} - (\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\vec{r}}{r^3} + \frac{eg\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{eg\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3} = 0.
\end{aligned}$$

Έτσι το διάνυσμα $\vec{J}$ είναι μιά σταθερά της κινήσεως.

(γ) Έχουμε,

$$\vec{r}\cdot\vec{J} = \vec{r}\cdot\left(m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} + \frac{eg\vec{r}}{r}\right) = egr.$$

Επομένως, $r|\vec{J}|\cos\phi = egr$, ή,

$$\cos\phi = \frac{eg}{|\vec{J}|} = \text{σταθ.}$$

δλδ, το φορτίο κινείται στην επιφάνεια ενός κώνου ανοίγματος γωνίας ϕ, το συνημίτονο της οποίας ικανοποιεί την προηγούμενη εξίσωση.