



Ονοματεπώνυμο: _____, AM: _____

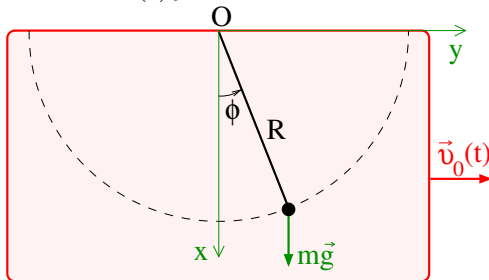
Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 4ης Δεκεμβρίου 2017: NAI ☐ OXI ☐

αν **NAI** μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2

Έχω παραδώσει τις εργασίες 1-7 ☐ (Μέρος Α) 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ (Μέρος Β)

Θέμα 1^ο:

Έστω ιδανικό εκκρεμές δεμένο στην οροφή ενός θαλάμου. Το νήμα έχει μήκος R , το σώμα έχει μάζα m και βάρος $mg\hat{x}$. Αρχικά (για $t = 0$) το σώμα είναι ακίνητο στην κατώτερη θέση ($\phi = 0$). Τον χρόνο αυτό αρχίζουμε να κινούμε τον θάλαμο οριζόντια με ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_0(t)\hat{y}$.



(α) Έστω $v_0(t) = U_0 \sin(3\omega_0 t)$, όπου $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ και η U_0 είναι αρκούντως μικρή ώστε να ισχύει $|\phi| \ll 1$ σε κάθε χρόνο.

(α₁) Βρείτε την εξίσωση κίνησης που δίνει την $\phi(t)$. Δίνεται η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a} = (\ddot{\omega} - \omega\dot{\phi}^2)\hat{\omega} + (\omega\dot{\phi} + 2\dot{\omega}\dot{\phi})\hat{\phi}$.

(α₂) Βρείτε την $\phi(t)$.

Ποια η περίοδος της κίνησης;

Πόσο μικρή πρέπει να είναι η U_0 ώστε να ισχύει πράγματι $|\phi| \ll 1$ σε κάθε χρόνο;

★ (α₃) Ποια η ταχύτητα $\vec{v}_a$ και η ολική ενέργεια E του σώματος ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή που βλέπει τον θάλαμο να κινείται με $\vec{v}_0$; (Δώστε τις σαν συναρτήσεις της $\phi(t)$ και παραγώγων της.)

Διατηρείται η ενέργεια E ;

(β) Έστω η κίνηση του θαλάμου είναι ομαλά επιταχυνόμενη, δηλ. $v_0(t) = a_0 t$ με σταθερή a_0 . Για ποιες τιμές της a_0 το σώμα δεν θα χτυπήσει την οροφή του θαλάμου; Απαντήστε χωρίς να κάνετε πράξεις.

Θέμα 2^ο:

(α) Σώμα κινείται σε πεδίο ελκτικής κεντρικής δύναμης $\vec{F} = -\frac{k}{r^\nu}\hat{r}$ και έχει στροφορμή L . Δείξτε ότι σε όλες τις πιθανές αψίδες της τροχιάς του (όπου $\dot{r} = 0$) η ακτίνα καμπυλότητας συνδέεται με την απόσταση από το κέντρο μέσω της σχέσης $\mathcal{R} = \frac{L^2 r^{\nu-2}}{mk}$.

(β) Έστω πετάμε κατακόρυφα προς τα πάνω σώμα. Αν λάβουμε υπόψη την περιστροφή της Γης η τροχιά του σώματος κατά την άνοδο αποκλίνει προς την ανατολή ή προς τη δύση; Αλλάζει η απάντηση στο νότιο ημισφαίριο;

(γ) Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα στο χώρο $x > 0$ υπό την επίδραση πεδίου δύναμης $F = \alpha x^{\gamma+1} + \beta x^\gamma$, όπου α, β, γ σταθερές.

(γ₁) Για ποια συνθήκη μεταξύ των σταθερών υπάρχει σημείο ισορροπίας και για ποια συνθήκη το σημείο αυτό είναι ευσταθές;

(γ₂) Όταν υπάρχει ευσταθές σημείο ισορροπίας ποια η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων;

(γ₃) Βρείτε σταθερές για τις οποίες η κίνηση είναι $x = 2 - \cos t$.

(γ₄) Σχεδιάστε το γράφημα του δυναμικού και το διάγραμμα φάσης αν $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -3$.

★ (γ₅) Ποια η περίοδος της κίνησης αν $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -3$ και $x|_{t=0} = 1, \dot{x}|_{t=0} = 1/2$;

Δίνεται το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} + \frac{b}{2(-a)^{3/2}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + \text{σταθερά}$, για $a < 0, b^2 > 4ac$.

Θέμα 3^ο:

Θέλουμε να διερευνήσουμε αν υπάρχει η δυνατότητα η Γη μας, ή κάποιος άλλος πλανήτης που κινείται γύρω από την Ήλιο σε μια βαρυτικά δέσμια τροχιά (αρνητικής ενέργειας), να μπορέσει μετά μια υποθετική σύγκρουσή του με ένα κομήτη - ή κάποιον «ξεστρατισμένο» αστεροειδή - να απελευθερωθεί από το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου και κινούμενος πλέον σε κάποια παραβολική ή υπερβολική τροχιά (μη αρνητικής ενέργειας) να φυγαδευθεί εκτός του ηλιακού μας συστήματος.

Έστω ότι ο πλανήτης κινείται γύρω από τον Ήλιο σε μια εκκεντρική τροχιά, με εκκεντρότητα e . Όταν ο πλανήτης μάζας M ευρίσκεται στο αφήλιο της τροχιάς του, συγκρούεται με ένα κομήτη μάζας m που κινείται στην εφαπτομενική διεύθυνση, δηλ. η σύγκρουση είναι μετωπική με τις ταχύτητες του πλανήτη και του κομήτη να είναι στην ίδια διεύθυνση

και φορά. Κατά τη μή ελαστική αυτή σύγκρουση των δύο σωμάτων διατηρείται η ορμή αλλά όχι και η ενέργεια. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να έχει ο κομήτης, έτσι ώστε μετά τη σύγκρουση ο πλανήτης να έχει μια μη αρνητική ενέργεια, δλδ η τροχιά του να είναι παραβολική ή υπερβολική.

(α) Να υπολογισθεί η ταχύτητα που έχει ο πλανήτης στο αφήλιο της τροχιάς του πριν την κρούση, συναρτήσει της αρχικής του ενέργειας $E_{\text{αρχ}}$ και της εκκεντρότητας της τροχιάς του e .

(β) Να υπολογισθεί η ελάχιστη απαιτούμενη ταχύτητα του πλανήτη μετά τη σύγκρουσή του με τον κομήτη έτσι ώστε η τροχιά του να μην είναι δέσμια στο πεδίο βαρύτητας του Ήλιου. Γνωστά θεωρούνται τα στοιχεία της αρχικής τροχιάς $E_{\text{αρχ}}$, e .

(γ) Από την διατήρηση της ορμής του συστήματος, πριν και μετά την σύγκρουση, να υπολογισθεί η ταχύτητα του κομήτη συναρτήσει της αρχικής και τελικής ταχύτητας του πλανήτη. Θεωρήστε ότι $m/M \ll 1$.

(δ) Ναδειχθεί ότι ο λόγος της ελάχιστης απαιτούμενης κινητικής ενέργειας του κομήτη προς την ολική αρχική ενέργεια του πλανήτη, έτσι ώστε η τροχιά του πλανήτη, μετά τη σύγκρουσή του με τον κομήτη, να μην είναι δέσμια στο πεδίο βαρύτητας του Ήλιου, δίδεται από την έκφραση

$$\frac{\text{Κινητική ενέργεια κομήτη}}{|\text{Ολική αρχική ενέργεια πλανήτη}|} = \frac{M}{m} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1-e})^2}{1+e}.$$

Δίδονται: Η ολική ενέργεια E συναρτήσει του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς a και η εξίσωση της τροχιάς ενός πλανήτη μάζας M ,

$$E = -\frac{GM_{\odot}M}{2a}, \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}.$$

Θέμα 4^ο:

Ένα σώμα μάζας m κινείται στο πεδίο της κεντρικής δύναμης $\vec{F} = f(r)\hat{r}$,

$$f(r) = -\frac{8a^2L^2}{mr^5},$$

με L τη στροφορμή του σωματιδίου καθώς αυτό κινείται σε μια τροχιά $r(\theta)$ με επιβατική ακτίνα την r από το ελκτικό κέντρο O , πολική γωνία θ από κάποια σταθερή διεύθυνση και a μια σταθερά.

(α) Να υπολογισθεί το δυναμικό $V(r)$ του πεδίου θεωρώντας $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$, καθώς και το υποθετικό δυναμικό $V'(r)$.

(β) Να γίνει μια ποιοτική γραφική παράσταση του υποθετικού δυναμικού $V'(r)$, προσδιορίζοντας:

(i) τις τιμές V_{max} του $V'(r)$ στα πιθανά ακρότατα που

υπάρχουν σε κάποιες αποστάσεις r_{max} ,

(ii) τις τιμές r_0 στα σημεία τομής της καμπύλης του υποθετικού δυναμικού $V'(r)$ με τον άξονα r , αλλά και τη συμπεριφορά της καμπύλης του υποθετικού δυναμικού:

(iii) κοντά στην αρχή $r = 0$ και

(iv) ασυμπτωτικά στο άπειρο, $r \rightarrow \infty$.

(γ) Ποια είναι τα επιτρεπτά όρια της τροχιάς του σωματιδίου, δλδ, σε ποιες επιτρεπτές αποστάσεις r από την αρχή μπορεί να κινηθεί το σωματίδιο στην ειδική περίπτωση όπου $E = 0$, αλλά και στη γενική περίπτωση όπου $E \neq 0$;

(δ) Έστω ότι η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι μηδέν, $E = 0$. Να υπολογισθεί σε αυτή την περίπτωση η εξάρτηση της απόστασης r με την πολική γωνία θ , δλδ η $r(\theta)$, αν για $t = 0$, $\theta = 0$ και $r = 2a$.

(ε) Να υπολογισθεί η σχέση που συνδέει το χρόνο t με τη γωνία θ , δλδ η $t(\theta)$, όταν $E = 0$ και για $t = 0$, $\theta = 0$ και $r = 2a$.

★ (στ) Να υπολογισθεί η σχέση που δίνει την $\theta(r)$ υπό μορφή ολοκληρώματος ως προς r , όταν $E \neq 0$.

Θέμα 1^ο:

(α₁) Ο νόμος Νεύτωνα στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς που κινείται με τον θάλαμο είναι $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_0$.

Η ταχύτητα του σώματος στο σύστημα αυτό είναι $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$, η επιτάχυνση $\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{\omega} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$ και οι δυνάμεις $\vec{T} = -T\hat{\omega}$, $m\vec{g} = mg\hat{x}$, $-m\vec{a}_0 = -m\vec{v}_0 = -m\dot{v}_0\hat{y}$.

Η εξίσωση κίνησης θα βρεθεί από την προβολή του νόμου Νεύτωνα στην $\hat{\phi}$ διεύθυνση (η οποία δεν περιέχει την άγνωστη $\vec{T}$). Έτσι προκύπτει $mR\ddot{\phi} = mg\hat{x} \cdot \hat{\phi} - m\dot{v}_0\hat{y} \cdot \hat{\phi} = -mg\sin\phi - m\dot{v}_0\cos\phi$, δηλ. η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{\phi} + \frac{g}{R}\sin\phi = -\frac{\dot{v}_0}{R}\cos\phi$.

Για την περίπτωση όπου $v_0(t) = U_0\sin(3\omega_0 t)$ προκύπτει $\ddot{\phi} + \frac{g}{R}\sin\phi = -\frac{3\omega_0 U_0}{R}\cos(3\omega_0 t)\cos\phi$.

(α₂) Για μικρές γωνίες $\sin\phi \approx \phi$ και $\cos\phi \approx 1$ (αρκεί να κρατήσουμε μέχρι πρώτης τάξης όρους). Άρα η εξίσωση κίνησης απλοποιείται σε

$\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = -\frac{3\omega_0 U_0}{R}\cos(3\omega_0 t)$, όπου $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$ και περιγράφει εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση.

Η λύση της ομογενούς είναι $\phi_{oh} = C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t)$, ενώ μια μερική λύση είναι $\phi_{μερ} = A\cos(3\omega_0 t)$ με την αντικατάσταση να δίνει $A = \frac{3U_0}{8\omega_0 R}$. Άρα η γενική λύση είναι $\phi = C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t) + \frac{3U_0}{8\omega_0 R}\cos(3\omega_0 t)$ και η παράγωγός της

$\dot{\phi} = \omega_0 C_1\cos(\omega_0 t) - \omega_0 C_2\sin(\omega_0 t) - \frac{9U_0}{8R}\sin(3\omega_0 t)$.

Από τις αρχικές συνθήκες $\phi|_{t=0} = 0$ και $\dot{\phi}|_{t=0} = 0$ (αρχικά το σώμα είναι ακίνητο και ως προς τον αδρανειακό και ως προς τον μη-αδρανειακό παρατηρητή, αφού ισχύει $\vec{v}_a|_{t=0} = \vec{v}_0|_{t=0} + \vec{v}|_{t=0}$ με $\vec{v}_0|_{t=0} = 0$) βρίσκουμε $C_1 = 0$ και $C_2 = -\frac{3U_0}{8\omega_0 R}$, οπότε η λύση

είναι $\phi = \frac{3U_0}{8\omega_0 R}[\cos(3\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)]$.

Η κίνηση είναι σύνθεση ταλαντώσεων, μίας με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος ω_0 και μίας με την συχνότητα του διεγέρτη.

Η περίοδος είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των δύο όρων, δηλ.

$$T = \text{ΕΚΠ} \left\{ \frac{2\pi}{3\omega_0}, \frac{2\pi}{\omega_0} \right\} = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Για να είναι πάντα $|\phi| \ll 1$ πρέπει $|U_0| \ll \omega_0 R$.

(α₃) $\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{v}$, όπου $\vec{v}_0 = U_0\sin(3\omega_0 t)\hat{y}$, $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$ με $\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$ και $\phi = \phi(t)$ η λύση που

έχουμε βρει.

Η ολική ενέργεια ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή είναι το άθροισμα της βαρυτικής δυναμικής $-mgR\cos\phi \approx -mgR\left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right)$ (κρατάμε μέχρι

δεύτερης τάξης όρους γιατί αυτοί είναι οι πρώτοι μη-τετριμμένοι όταν αναπτύσσουμε κατά Taylor ενέργειες) και της κινητικής $\frac{m\vec{v}_a^2}{2} = \frac{m(\vec{v}_0 + \vec{v})^2}{2} =$

$$\frac{m(v_0^2 + v^2 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v})}{2} = \frac{mU_0^2\sin^2(3\omega_0 t)}{2} + \frac{mR^2\dot{\phi}^2}{2} +$$

$$mU_0R\dot{\phi}\sin(3\omega_0 t)\hat{y} \cdot \hat{\phi} \approx \frac{mU_0^2\sin^2(3\omega_0 t)}{2} + \frac{mR^2\dot{\phi}^2}{2} +$$

$mU_0R\dot{\phi}\sin(3\omega_0 t)$ (κρατώντας μέχρι δεύτερης τάξης όρους). Άρα η ολική ενέργεια είναι $E =$

$$-mgR + \frac{mgR\phi^2}{2} + \frac{mU_0^2\sin^2(3\omega_0 t)}{2} + \frac{mR^2\dot{\phi}^2}{2} +$$

$$mU_0R\dot{\phi}\sin(3\omega_0 t).$$

Η ενέργεια αυτή δεν μένει σταθερή γιατί η τάση του νήματος παράγει έργο (είναι κάθετη στην $\vec{v}$, αλλά όχι στην $\vec{v}_a$). Μάλιστα ισχύει $\vec{T} \cdot \vec{v}_a = \frac{dE}{dt}$, δηλ. η ισχύς της $\vec{T}$ ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ολικής ενέργειας.

Αυτή η σχέση προκύπτει από την προβολή του νόμου Νεύτωνα πάνω στην ταχύτητα, στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, δηλ. $\vec{v}_a \cdot m\vec{v}_a = \vec{v}_a \cdot (\vec{T} + m\vec{g}) \Leftrightarrow \vec{T} \cdot \vec{v}_a = \vec{v}_a \cdot m\vec{v}_a - mg\hat{x} \cdot \vec{v}_a = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}_a^2}{2} - mgx \right) = \frac{dE}{dt}$.

Μπορεί επίσης να επαληθευτεί χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Η ενέργεια έχει υπολογιστεί πριν οπότε παραγωγίζοντας βρίσκουμε τον ρυθμό μεταβολής της, ενώ από την $\hat{\omega}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα προκύπτει $T = mR\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi - 3m\omega_0 U_0\cos(3\omega_0 t)\sin\phi$, οπότε $\vec{T} \cdot \vec{v}_a = -T\hat{\omega} \cdot [U_0\sin(3\omega_0 t)\hat{y} + R\dot{\phi}\hat{\phi}] = -TU_0\sin(3\omega_0 t)\sin\phi \approx -mgU_0\sin(3\omega_0 t)\phi$.

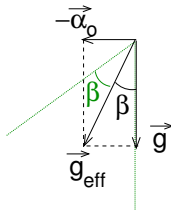
Το σώμα ασκεί στον θάλαμο δύναμη $-\vec{T}$ την οποία εξουδετερώνει αυτός που κινεί το θάλαμο, ο οποίος και δίνει την ισχύ $\frac{dE}{dt}$. Αν M είναι η μάζα του θαλάμου και $\vec{F}$ η δύναμη που ασκεί στον θάλαμο αυτός ο εξωτερικός παράγοντας, τότε ισχύει για τον θάλαμο $M\vec{\ddot{v}}_0 = \vec{F} - \vec{T} + M\vec{g}$. Πολλαπλασιάζοντας με $\vec{v}_0$

προκύπτει η ισχύς $\vec{F} \cdot \vec{v}_0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{M\vec{v}_0^2}{2} \right) + \vec{T} \cdot \vec{v}_0$. Το πρώτο μέρος της $\vec{F}$ αντιστοιχεί στον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του θαλάμου, ενώ το δεύτερο μέρος ισούται με $\vec{T} \cdot (\vec{v}_a - \vec{v}) = \vec{T} \cdot \vec{v}_a = \frac{dE}{dt}$.

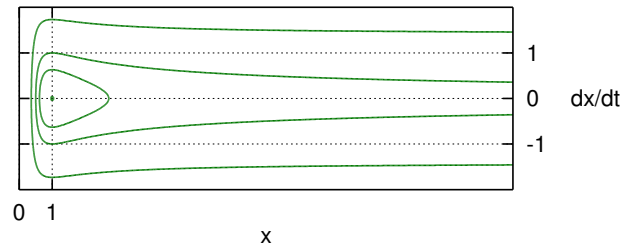
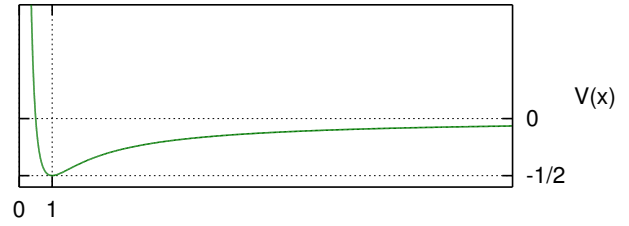
(β) Στο μη-αδρανειακό σύστημα του θαλάμου είναι $m\vec{a} = \vec{T} + m(\vec{g} - \vec{a}_0)$, δηλ. έχουμε εκκρεμές σε «ενεργό» βαρύτητα $\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g} - \vec{a}_0$.

Οι ακραίες θέσεις είναι συμμετρικές εκατέρωθεν της $\vec{g}_{\text{eff}}$. Αφού αρχικά το σώμα είναι ακίνητο (τόσο στο αδρανειακό όσο και στο μη-αδρανειακό σύστημα αφού $v_0|_{t=0} = 0$), η μία ακραία θέση είναι η αρχική (κατακόρυφη). Συνεπώς για να μην χτυπήσει το σώμα την οροφή πρέπει η γωνία μεταξύ κατακόρυφου και $\vec{g}_{\text{eff}}$ να είναι μικρότερη των 45° , δηλ. πρέπει $a_0 < g$.

Αλλιώς: Όμοια με το ερώτημα (α₁) καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης $\ddot{\phi} = -\frac{g \sin \phi + a_0 \cos \phi}{R}$, η οποία είναι ισοδύναμη με ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) = E$ με $V(\phi) = \int \frac{g \sin \phi + a_0 \cos \phi}{R} d\phi = \frac{-g \cos \phi + a_0 \sin \phi}{R}$ και $E = -\frac{g}{R}$ (η τιμή αυτή βρίσκεται από τις αρχικές συνθήκες). Για να μην χτυπήσει το σώμα την οροφή πρέπει οι $\phi = \pm\pi/2$ να είναι εκτός ορίων κίνησης, δηλ. να ισχύει $V(\pm\pi/2) > E \Leftrightarrow \pm a_0 > -g$ το οποίο ισχύει αν $a_0 < g$.



(γ₄) $V = - \int F dx = \int (x^{-2} - x^{-3}) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά). Το δυναμικό στο $x \rightarrow 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} V(x) = +\infty$, είναι φθίνουσα συνάρτηση για $0 < x < 1$, έχει ελάχιστο στο $x = 1$ ίσο με $V(1) = -1/2$ και είναι αύξουσα συνάρτηση για $1 < x < \infty$ με $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0$.



Στο τελευταίο διάγραμμα φαίνονται οι καμπύλες φάσης που αντιστοιχούν στην ελάχιστη ενέργεια (ισορροπία), σε αρνητική ενέργεια (κλειστή καμπύλη), σε μηδενική ενέργεια (το σώμα φτάνει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα) και σε θετική ενέργεια (το σώμα φτάνει στο άπειρο με πεπερασμένη ταχύτητα).

(γ₅) $\frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = E$ με $V(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$ όπως ήδη βρέθηκε. Η ενέργεια μπορεί να υπολογιστεί θέτοντας τις αρχικές συνθήκες $E = \frac{1}{8} + V(1) = -\frac{3}{8}$ και

άρα $\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{8} \Leftrightarrow |\dot{x}| = \frac{\sqrt{-3x^2 + 8x - 4}}{2x}$. Τα άκρα της τροχιάς είναι $V(x) = E \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0$, δηλ. $x_1 = 2/3$ και $x_2 = 2$. Άρα η περίοδος είναι $T = 2 \int_{2/3}^2 \frac{dx}{|\dot{x}|} = 4 \int_{2/3}^2 \frac{x dx}{\sqrt{-3x^2 + 8x - 4}}$.

Χρησιμοποιώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα με $a = -3$, $b = 8$, $c = -4$ βρίσκουμε $T = \frac{16}{3^{3/2}} \left[\arcsin \frac{6x-8}{4} \right]_{2/3}^2 = \frac{16\pi}{3^{3/2}}$.

Αλλιώς: Το δυναμικό $V(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$ έχει ίδια μορφή με το ενεργό δυναμικό κεντρικής βαρυτικής

δύναμης $V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2m^2 r^2}$. Άρα η κίνηση είναι ίδια με την ακτινική κίνηση σε ελλειπτική τροχιά σε βαρυτικό δυναμικό με $GM = 1$ και $L = m$. Ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς είναι $A = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4}{3}$ και σύμφωνα με τον 3ο νόμο

Kepler η περίοδος είναι $T = 2\pi \sqrt{\frac{A^3}{GM}} = \frac{16\pi}{3^{3/2}}$.

Θέμα 2^ο:

(α) Στις αψίδες η κάθετη στην τροχιά περνά από το κέντρο της δύναμης (η τροχιά είναι επίπεδη· το επίπεδό της είναι το κάθετο στην σταθερή στροφορμή).

Επομένως ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\frac{mv^2}{R} = \frac{k}{r^2}$. Από διατήρηση στροφορμής $v = \frac{L}{mr}$, οπότε $R = \frac{L^2 r^{\nu-2}}{mk}$.

(β) Για $\vec{v}_\sigma$ με φορά προς τα πάνω η δύναμη Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma$ έχει φορά προς τη δύση.

Το ίδιο και στο νότιο ημισφαίριο.

Αλλιώς: Ως προς αδρανειακό σύστημα με κέντρο το κέντρο της Γης, αρχικά το σώμα περιστρέφεται μαζί με την Γη, αλλά όσο απομακρύνεται η περιστροφική ταχύτητά του ελαττώνεται λόγω διατήρησης στροφορμής. Άρα μένει «πίσω», δηλ. κινείται δυτικά, σε σχέση με το σημείο εκκίνησης.

(γ₁) Η εξίσωση $F = 0$ έχει θετική λύση $x_0 = -\beta/\alpha$ αν τα α, β είναι ετερόσημα.

Για να είναι το σημείο αυτό ευσταθές πρέπει $F'(x_0) < 0$ (δύναμη επαναφοράς). Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $\beta > 0$ (οπότε πρέπει και $\alpha < 0$).

(γ₂) Η εξίσωση κίνησης με $q = x - x_0$, είναι $\ddot{q} = F'(x_0)q$, οπότε $\omega = \sqrt{-F'(x_0)} = (-\alpha)^{(1-\gamma)/2} \beta^{\gamma/2}$.

(γ₃) Αν $x = 2 - \cos t$ τότε $\dot{x} = \sin t$ και $\ddot{x} = \cos t = -x + 2$. Άρα η δύναμη είναι $\alpha x^{\gamma+1} + \beta x^\gamma = -x + 2$, δηλ. $\gamma = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$.

Θέμα 3^ο:

Σύγχρονες αστρονομικές παρατηρήσεις έχουν δείξει ότι υπάρχουν πολλοί πλανήτες, οι οποίοι δεν ευρίσκονται σε τροχιά γύρω από κάποιο μητρικό άστρο-ήλιο, αλλά περιφέρονται μόνοι τους γύρω από το κέντρο του Γαλαξία, δικαιολογώντας στην κυριολεξία το όνομά τους ως «αδέσποτοι πλανήτες» (rogue planets). Η ανακάλυψη αυτή έγινε με την τεχνική του «βαρυτικού μικροφακού», μια μέθοδο που παρατηρεί την καμπύλωση του φωτός ενός άστρου, όταν ανάμεσα σ' αυτό και τη Γη παρεμβάλλεται ένα άλλο μεγάλο ουράνιο σώμα (όπως ένας εξωπλανήτης), το οποίο, με βάση τη θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν, λειτουργεί ως φακός βαρύτητας, στρεβλώνοντας τη φωτεινή ακτινοβολία που φτάνει ως τον πλανήτη μας. Ο Αστροφυσικός Takahiro Sumi και οι συνεργάτες του στο Πανεπιστήμιο της Osaka στην Ιαπωνία, δημοσίευσαν τις παρατηρήσεις τους το 2011, όπου παρατήρησαν συστηματικά 50 εκατομμύρια αστέρες με το τηλεσκόπιο των 1.8 μέτρων στο Mount John Observatory της Νέας Ζηλανδίας και το τηλεσκόπιο των 1.3 μέτρων στο Las Campanas Observatory της Χιλής. Συγκεκριμένα, εντόπισαν 474 περιπτώσεις βαρυτικού μικροφακού, 10 από τις οποίες ήταν πολύ σύντομες και αντιστοιχούσαν στην περίπτωση πλανήτη μεγέθους του Δία κοντά στον οποίο δεν υπήρχε κάποιο άστρο σε απόσταση 10 έως 500 αστρονομικών μονάδων. Αυτοί οι 10 πλανήτες, βρίσκονται σε τόσο μεγάλες αποστάσεις από το πλησιέστερο σε αυτούς άστρο, έτσι ώστε να μπορεί να θεωρηθούν ότι είναι «ορφανοί» και κινούνται σαν «μοναχικά πουλιά» στη κοντινή μας «γειτονιά» του Γαλαξία. Υπενθυμίζεται ότι ο Δίας απέχει μόλις 5 αστρονομικές μονάδες από τον Ήλιο, ενώ ο Ποσειδώνας 30. Ένας αναγωγικός υπολογισμός δίνει ότι μπορεί να υπάρχουν δισεκατομμύρια τέτοιοι πλανήτες, ένας για κάθε 2 άστρα του Γαλαξία μας.



Ένας τέτοιος «ορφανός» πλανήτης είναι ο PSO J318.5-22, σε απόσταση περί τα 80 έτη φωτός, με μάζα 6 φορές τη μάζα του Δία και ηλικία μόλις 12 εκατομμυρίων ετών. Ο αστρονόμος Michael Liu του Ινστιτούτου Αστρονομίας στο Πανεπιστήμιο της Χαβάης ανέφερε: «Δεν έχουμε δει ποτέ ένα τέτοιο μοναχικό αντικείμενο στο Γαλαξία. Έχει όλα τα

χαρακτηριστικά των νέων πλανητών που περιφέρονται γύρω από τα μητρικά τους άστρα, αλλά αυτό το συγκεκριμένο φαίνεται να περιπλανιέται μόνο και έρημο». Μια πιθανότητα είναι αυτοί οι μοναχικοί εξωπλανήτες να σχηματίστηκαν σε κάποιο πλανητικό σύστημα και μετά, με κάποιο τρόπο, να εκσφενδονίστηκαν μακριά από αυτό. Το πρόβλημα διερευνά την πιθανότητα αυτό να συνέβη λόγω κάποιας σύγκρουσης του πλανήτη αυτού με ένα άλλο σώμα του οικείου πλανητικού συστήματος, όπως έναν κομήτη ή έναν αστεροειδή.

Έστω v η αρχική ταχύτητα του κομήτη (ή αστεροειδή), $v_{\alpha\phi\chi}$ η αρχική ταχύτητα του πλανήτη, $v_{\tau\epsilon\lambda}$ η τελική ταχύτητα του πλανήτη, $E_{\alpha\phi\chi}$ η αρχική ολική ενέργεια του πλανήτη και $E_{\tau\epsilon\lambda}$ η τελική ολική ενέργεια του πλανήτη. Να σημειωθεί ότι η τελική ενέργεια του συστήματος πλανήτη/κομήτη ισούται ουσιαστικά με την τελική ενέργεια του πλανήτη, επειδή η μάζα του κομήτη είναι αμελητέα ως προς τη μάζα του πλανήτη.

(α) Η ακτίνα του αηλίου της τροχιάς ($\theta = \pi$) είναι $r = a(1 + e)$. Η σχέση $E_{\alpha\phi\chi} = -\frac{GM_{\odot}M}{2a}$ δίνει την ακτίνα του μεγάλου ημιάξονα $a = -\frac{GM_{\odot}M}{2E_{\alpha\phi\chi}}$, οπότε

$$r = -\frac{GM_{\odot}M(1 + e)}{2E_{\alpha\phi\chi}}.$$

Από $E_{\alpha\phi\chi} = \frac{1}{2}Mv_{\alpha\phi\chi}^2 - \frac{GM_{\odot}M}{r}$ βρίσκεται η αρχική ταχύτητα $v_{\alpha\phi\chi} = \sqrt{\frac{-2E_{\alpha\phi\chi}}{M} \frac{1 - e}{1 + e}}$.

(β) Η αρνητική ολική ενέργεια που είχε ο πλανήτης πριν την σύγκρουση $E_{\alpha\phi\chi}$, αυξάνεται μετά τη σύγκρουση και θα γίνει $E_{\tau\epsilon\lambda} \geq 0$, έτσι ώστε η κίνηση του πλανήτη να μην είναι πλέον δέσμια στο πεδίο βαρύτητας του Ήλιου. Από $E_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}Mv_{\tau\epsilon\lambda}^2 - \frac{GM_{\odot}M}{r}$ για να είναι $E_{\tau\epsilon\lambda} \geq 0$ πρέπει

$$v_{\tau\epsilon\lambda} \geq \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{r}}, \text{ ή, } v_{\tau\epsilon\lambda} \geq \sqrt{\frac{-4E_{\alpha\phi\chi}}{M(1 + e)}}.$$

(γ) Από την αρχή διατήρησης της ορμής του συστήματος πριν και μετά την σύγκρουση έχουμε,

$$Mv_{\alpha\phi\chi} + mv = (M + m)v_{\tau\epsilon\lambda} \approx Mv_{\tau\epsilon\lambda}$$

επειδή $m/M \ll 1$ οπότε μπορούμε να αμελήσουμε μικρούς όρους. Έτσι έχουμε τελικά,

$$v = \frac{M}{m}(v_{\tau\epsilon\lambda} - v_{\alpha\phi\chi}).$$

(δ) Η ελάχιστη κινητική ενέργεια του κομήτη η οποία μπορεί να μετατρέψει την ολική ενέργεια του πλανήτη από αρνητική σε μηδενική ή θετική είναι,

$$(K.E.)_{\text{κομήτης}} = \frac{1}{2}mv^2 \text{ με}$$

$$v = \frac{M}{m} \left(\sqrt{\frac{-4E_{\alpha\phi\chi}}{M(1 + e)}} - \sqrt{\frac{-2E_{\alpha\phi\chi}}{M} \frac{1 - e}{1 + e}} \right).$$

Ο ζητούμενος λόγος προκύπτει

$$\frac{(K.E.)_{\text{κομ.}}}{|E_{\text{αρχ}}|} = \frac{M}{m} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1-e})^2}{1+e}.$$

Η τελευταία έκφραση λέγει ότι ο λόγος της κινητικής ενέργειας που πρέπει να έχει ο κομήτης προς την αρχική ενέργεια του πλανήτη, ισούται με τον όρο (M/m) που έχει μεγάλη τιμή επί τον όρο $\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1-e})^2}{1+e}$.

Για παράδειγμα, η μάζα της Γης είναι $M = 6 \times 10^{27}$ gr και η μάζα του κομήτη του Halley είναι $m = 2.2 \times 10^{17}$ gr, έτσι ώστε $M/m \sim 3 \times 10^{10}$!

Συμπερασματικά, απαιτείται πολύ μεγάλη ενέργεια για να μετατρέψει την ολική ενέργεια του πλανήτη από αρνητική σε μηδενική ή θετική, έτσι ώστε η κίνηση του πλανήτη να μην είναι πλέον δέσμια στο πεδίο βαρύτητας του Ήλιου.

Δηλ., συγκρούσεις πλανητών με κομήτες δεν είναι ικανές να εκσφενδονίσουν τους πλανήτες εκτός του ηλιακού μας συστήματος. Αλλά ακόμη και συγκρούσεις της Γης με το μεγαλύτερο αστεροειδή, όπως είναι η Δήμητρα (Ceres) με μάζα $M \sim 2 \times 10^{21}$ gr και λόγο $M/m \sim 10^6$ δεν θα κατάφερναν να εκσφενδονίσουν τη Γη και άλλους πλανήτες εκτός του ηλιακού μας συστήματος!

Θέμα 4^ο:

(α) Το δυναμικό $V(r)$ που αντιστοιχεί στο δεδομένο πεδίο $\vec{F}(\vec{r})$ και το υποθετικό δυναμικό $V'(r)$ είναι

$$V(r) = - \int_{\infty}^r f(r) dr = - \frac{2a^2 L^2}{mr^4},$$

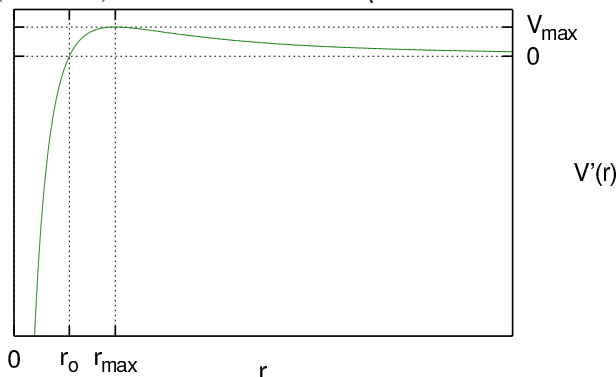
$$V'(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{L^2}{2mr^2} \left[1 - \frac{4a^2}{r^2} \right].$$

(β) $\frac{dV'}{dr} = - \frac{L^2}{mr^5} (r^2 - 8a^2)$ θετική για $r < 2a\sqrt{2}$ και αρνητική για $r > 2a\sqrt{2}$. Άρα υπάρχει μέγιστο

στο $r_{\text{max}} = 2a\sqrt{2}$ με $V'(r_{\text{max}}) = \frac{L^2}{32ma^2}$.

Το υποθετικό δυναμικό μηδενίζεται $V'(r_o) = 0$ στο $r_o = 2a$.

Η καμπύλη του υποθετικού δυναμικού τείνει στο $-\infty$ κοντά στην αρχή $r = 0$, ενώ όταν $r \rightarrow \infty$, $V'(r \rightarrow \infty) = 0$ από θετικές τιμές.



(γ) Τα επιτρεπτά όρια της τροχιάς του σωματιδίου ευρίσκονται από την απαίτηση ότι $E \geq V'(r)$ και στην ειδική περίπτωση όπου $E = 0$ είναι το διάστημα $0 \leq r \leq 2a$, δηλ εκεί όπου $V'(r) \leq 0$.

(δ) Το ολοκλήρωμα της ενέργειας μπορεί να γραφεί στη μορφή,

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left[\frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \right] = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V'(r).$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το ολοκλήρωμα, παίρνουμε για το $r(t)$, όταν $E = 0$,

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V'(r)]} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [-V'(r)]}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την έκφραση του dr/dt με το $dt/d\theta = mr^2/L$ παίρνουμε το $dr/d\theta$ και στη συνέχεια το $r(\theta)$,

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{\sqrt{2m}}{L} r^2 \sqrt{-V'(r)},$$

δηλ.,

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \sqrt{4a^2 - r^2} \Leftrightarrow \int \frac{dr}{\sqrt{4a^2 - r^2}} = \pm \int d\theta \Leftrightarrow$$

$$\arccos \frac{r}{2a} = \mp(\theta + C) \Leftrightarrow r = 2a \cos(\theta + C).$$

Από αρχικές συνθήκες $C = 0$ οπότε

$$r(\theta) = 2a \cos \theta.$$

(ε) Αντικαθιστώντας $r(\theta) = 2a \cos \theta$ στην $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ έχουμε

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{4ma^2 \cos^2 \theta},$$

οπότε

$$d\theta \cos^2 \theta = \frac{L dt}{4ma^2} \Leftrightarrow \left[\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right] d\theta = \frac{L dt}{4ma^2}.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$2\theta + \sin 2\theta = \frac{L t}{ma^2}.$$

(στ) Συνδυάζοντας τους νόμους διατήρησης ενέργειας και στροφορμής, προκύπτει για το συγκεκριμένο πεδίο μία σχέση που δίνει την $\theta(r)$ υπό τη μορφή ενός ολοκληρώματος ως προς r ,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2mE}{L^2} r^4 - r^2 + 4a^2},$$

οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\theta - \theta_o = \pm \int_{r_o}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} r^4 - r^2 + 4a^2}}.$$

Προφανώς όταν $E = 0$ το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη βοήθεια γνωστών συναρτήσεων, όπως κάναμε στο παραπάνω ερώτημα (δ).