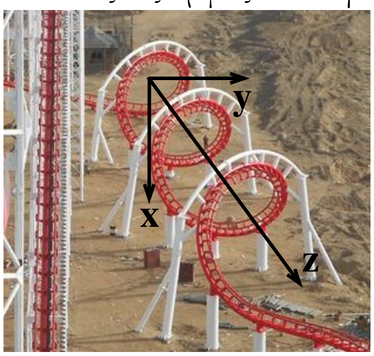
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 4 Δεκεμβρίου 2017
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Θέμα 1ο:

Οι ράγες του σχήματος έχουν ελικοειδές σχήμα που περιγράφεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες από $\{\varpi = 4\,,\ z = 3\,\phi\}$, σε κατάλληλες μονάδες. Στις μονάδες αυτές η επιτάχυνση βαρύτητας είναι $\vec{g} = \hat{x}$. Ένα βαγόνι βρίσκεται αρχικά στην κατώτερη θέση $\phi = 0$ και έχει ταχύτητα μέτρου v_0. Θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση του βαγονιού πάνω στις ράγες, προς μεγαλύτερα ϕ, θεωρώντας το σημειακό σώμα και αγνοώντας τις τριβές ολίσθησης.



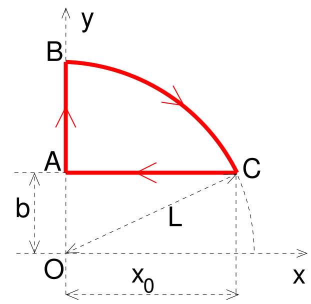
(α) Γράψτε τις εκφράσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες, συναρτήσει της γωνίας $\phi(t)$ και παραγώγων της.
(β) Βρείτε σε κάθε θέση τα μοναδιαία πάνω στην τροχιά ($\hat{\varepsilon}$) και προς το κέντρο καμπυλότητας ($\hat{n}$) καθώς και την επιτρόχια και κεντρομόλο επιτάχυνση, συναρτήσει της γωνίας $\phi(t)$ και παραγώγων της.
Ποια η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς;
(γ) Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης είναι
$\dfrac{25\dot{\phi}^2}{2} - 4\cos\phi = \dfrac{v_0^2}{2} - 4$ ή ισοδύναμα $\ddot{\phi} + \dfrac{4}{25}\sin\phi = 0.$
(δ) Για ποιες τιμές της v_0 το βαγόνι περνά όλο το μήκος των ραγών;
(ε) Αν $v_0 = 2$ σε ποια θέση το βαγόνι σταματά στιγμιαία;
(στ) Αν $v_0 \ll 1$ σε πόσο χρόνο το βαγόνι σταματά στιγμιαία;
★ (ζ) Βρείτε την επιτάχυνση που νοιώθουν οι επιβάτες του βαγονιού σε κάθε θέση (συναρτήσει μόνο του ϕ, όχι παραγώγων της $\phi(t)$).
Βρείτε επίσης την δύναμη ανά μάζα που ασκούν οι ράγες στο βαγόνι σε κάθε θέση.
★ (η) Αν στο βαγόνι ασκείται και αντίσταση αέρα με μέτρο ίσο με το $1/5$ της κινητικής του ενέργειας (σε κατάλληλες μονάδες) βρείτε το μέτρο της ταχύτητας σε κάθε θέση.
Αν $v_0 = 2$ σε ποια θέση το βαγόνι σταματά στιγμιαία;
Δίνεται η επιτάχυνση σε κυλινδρικές συντεταγμένες
$\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (\varpi\ddot{\phi} + 2\dot{\varpi}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}.$

Θέμα 2ο:

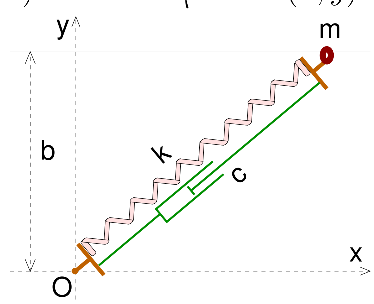
Έστω πεδίο δύναμης (με k, μ, L θετικές σταθερές)

$$\vec{F} = k\left(\frac{Lx}{\sqrt{x^2+y^2}} - x\right)\hat{x} + \mu\left(\frac{Ly}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\right)\hat{y}.$$

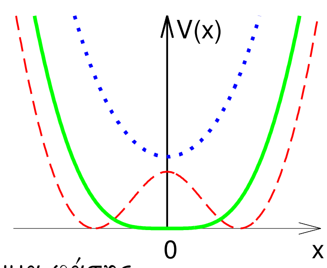
(α) Δείξτε ότι το έργο του για την δίπλα διαδρομή (το BC είναι τμήμα κύκλου ακτίνας L με κέντρο την αρχή O) είναι $W = \dfrac{1}{2}(\mu - k)(L-b)^2$.



(β) Δείξτε ότι η $\vec{F}$ είναι συντηρητική αν $\mu = k$ και η δυναμική ενέργεια είναι $V = \dfrac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+y^2} - L\right)^2$, δηλ. αντιστοιχεί σε ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους L με σταθερό άκρο στο $O(0,0)$ και ελεύθερο στο (x,y).
(γ) Δαχτυλίδι μάζας m συνδέεται στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές στην οριζόντια ευθεία $y = b$, με $0 < b < L$, δηλ. έχει θέση $\vec{r} = x\hat{x} + b\hat{y}$.



(γ_1) Ποια η εξίσωση κίνησης που καθορίζει την $x(t)$;
(γ_2) Ποια από τις καμπύλες του δίπλα σχήματος αποτελεί το γράφημα της δυναμικής ενέργειας;
Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και σχολιάστε την ευστάθειά τους.



(γ_3) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.
(γ_4) Ποια είναι τα σημεία ισορροπίας αν όλο το σύστημα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $\hat{x}$;
(γ_5) Όμοια, αν η περιστροφή γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω γύρω από τον άξονα $\hat{y}$ ή γύρω από τον άξονα $\hat{z}$. Αγνοήστε την βαρύτητα.
★ (γ_6) Δείξτε ότι αν υπάρχει και αποσβεστήρας που ασκεί δύναμη $-c\dot{r}\hat{r} = -c\,(\vec{v}\cdot\hat{r})\hat{r}$, η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{x} = k\left(\dfrac{Lx}{\sqrt{x^2+b^2}} - x\right) - c\dot{x}\dfrac{x^2}{x^2+b^2}$.
Μελετήστε τις μικρές φθίνουσες ταλαντώσεις γύρω από ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας για την περίπτωση ασθενούς απόσβεσης. Ποια η περίοδος των ταλαντώσεων; Σε πόσο χρόνο το δαχτυλίδι καταλήγει στο σημείο ισορροπίας;

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z} = \dot{\phi}(4\hat{\phi} + 3\hat{z})$,
$\vec{a} = -4\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + \ddot{\phi}(4\hat{\phi} + 3\hat{z})$.

(β) $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\vec{v}}{v}$ με $v = |\vec{v}| = |\dot{\phi}|\sqrt{4^2+3^2} = 5\dot{\phi}$ (μελετούμε την κίνηση με $\dot{\phi} > 0$), δηλ. $\hat{\varepsilon} = \dfrac{4\hat{\phi}+3\hat{z}}{5}$.
Η επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι $\vec{a}_\varepsilon = (\vec{a}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon} = 5\ddot{\phi}\hat{\varepsilon}$. (Το ίδιο προκύπτει από $\vec{a}_\varepsilon = \dot{v}\hat{\varepsilon}$.)
Η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι $\vec{a}_\kappa = \vec{a} - \vec{a}_\varepsilon = -4\dot{\phi}^2\hat{\varpi}$.
Το μοναδιαίο προς το κέντρο καμπυλότητας είναι $\hat{n} = \dfrac{\vec{a}_\kappa}{|\vec{a}_\kappa|} = -\hat{\varpi}$.
Από $|\vec{a}_\kappa| = \dfrac{v^2}{\mathcal{R}}$ η ακτίνα καμπυλότητας είναι $\mathcal{R} = \dfrac{25}{4}$.

(γ) Ισχύει η διατήρηση ενέργειας ανά μάζα $\dfrac{v^2}{2} + V = E$, με δυναμικό $V = -gx = -g\varpi\cos\phi = -4\cos\phi$ και ενέργεια $E = \dfrac{v_0^2}{2} + V|_{\phi=0} = \dfrac{v_0^2}{2} - 4$, οπότε $\dfrac{25\dot{\phi}^2}{2} - 4\cos\phi = \dfrac{v_0^2}{2} - 4$.
Παραγωγίζοντας την εξίσωση αυτή προκύπτει η ισοδύναμη μορφή $\ddot{\phi} + \dfrac{4}{25}\sin\phi = 0$ (η οποία είναι ίδια με εξίσωση ιδανικού, επίπεδου εκκρεμούς).
Η μορφή αυτή θα προέκυπτε κατευθείαν από την προβολή του νόμου Νεύτωνα $\vec{a} = \vec{g} + \vec{N}$ πάνω στην ταχύτητα, θέτοντας $\vec{N}\cdot\hat{\varepsilon} = 0$ αφού η δύναμη ανά μάζα από τις ράγες είναι $\vec{N}\perp\vec{v}$, δηλ. από $\vec{a}\cdot\hat{\varepsilon} = \vec{g}\cdot\hat{\varepsilon}$ με $\vec{g} = \hat{x} = (\hat{x}\cdot\hat{\varpi})\hat{\varpi} + (\hat{x}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} = \cos\phi\hat{\varpi} - \sin\phi\hat{\phi}$.

(δ) Στην ανώτερη θέση $x = -4$ το δυναμικό είναι $V_{\max} = 4$, επομένως πρέπει $E > 4 \Leftrightarrow \dfrac{v_0^2}{2} - 4 > 4 \Leftrightarrow v_0 > 4$.
Αυτό προκύπτει και με βάση την γραφική μελέτη του δυναμικού $V(\phi) = -4\cos\phi$.

(ε) Θα σταματήσει στιγμιαία όταν $V = E \Leftrightarrow -4\cos\phi = v_0^2/2 - 4 \Leftrightarrow \cos\phi = 1/2 \Leftrightarrow \phi = \pi/3$.

(στ) Αν $v_0 \ll 1$ το βαγόνι θα κινηθεί στην γειτονιά του αρχικού σημείου $\phi = 0$. Για μικρές γωνίες είναι $\sin\phi \approx \phi$ και η εξίσωση κίνησης απλοποιείται σε $\ddot{\phi} + \dfrac{4}{25}\phi = 0$. Αυτή είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{2}{5}$, επομένως η περίοδος της ταλάντωσης είναι $\dfrac{2\pi}{\omega} = 5\pi$. Αφού αρχικά το βαγόνι βρίσκεται στη θέση ισορροπίας, θα σταματήσει στιγμιαία στο ένα τέταρτο της περιόδου, δηλ. σε χρόνο $5\pi/4$.
Η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $\phi|_{t=0} = 0$ και $\dot{\phi}|_{t=0} = \dfrac{v_0}{5}$ είναι η $\phi = \dfrac{v_0}{5\omega}\sin(\omega t)$.
Τα ίδια προκύπτουν αναπτύσσοντας κατά Taylor το ολοκλήρωμα ενέργειας, δηλ. θέτοντας $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$, οπότε προκύπτει εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή $25\dot{\phi}^2 + 4\phi^2 = v_0^2$.

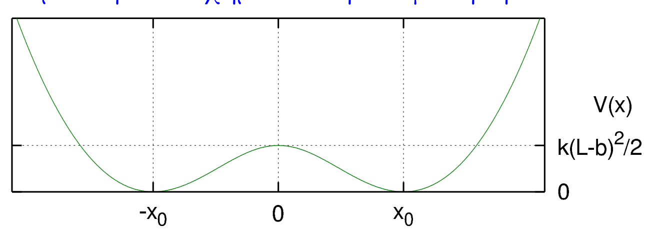
(ζ) Χρησιμοποιώντας τις $\dot{\phi}^2 = \dfrac{v_0^2 - 8 + 8\cos\phi}{25}$ και $\ddot{\phi} = -\dfrac{4}{25}\sin\phi$ (που προκύπτουν από τις μορφές της εξίσωσης κίνησης του (γ) ερωτήματος) βρίσκουμε $\vec{a} = -\dfrac{4}{5}\sin\phi\,\hat{\varepsilon} + 4\dfrac{v_0^2 - 8 + 8\cos\phi}{25}\hat{n}$.
Το μέτρο της επιτάχυνσης σε κάθε θέση είναι $a = \dfrac{4}{25}\sqrt{39\cos^2\phi + 16(v_0^2-8)\cos\phi + (v_0^2-8)^2 + 25}$.
Μελετώντας την έκφραση αυτή και λαμβάνοντας υπόψη ότι για $v_0 > 4$ είναι $\cos\phi \in [-1, 1]$ ενώ για $v_0 \leq 4$ είναι $\cos\phi \geq 1 - v_0^2/8$, προκύπτει ότι για $v_0 > \dfrac{20}{\sqrt{89}}$ η μέγιστη επιτάχυνση είναι $a_{\max} = \dfrac{4v_0^2}{25}$ και υλοποιείται στην κατώτερη θέση $\phi = 0$, ενώ για $v_0 < \dfrac{20}{\sqrt{89}}$ η μέγιστη επιτάχυνση είναι $a_{\max} = \dfrac{2v_0}{5}\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{16}}$ και υλοποιείται στην ανώτερη θέση $\phi_{\max} = \arccos\dfrac{8 - v_0^2}{8}$ όπου η ταχύτητα μηδενίζεται.

Από τον νόμο Νεύτωνα $\vec{N} = \vec{a} - \vec{g}$. Θέτοντας $\vec{g} = \hat{x} = (\hat{x}\cdot\hat{\varpi})\hat{\varpi} + (\hat{x}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} = \cos\phi\hat{\varpi} - \sin\phi\hat{\phi}$ προκύπτει $\vec{N} = \dfrac{3}{25}\sin\phi\hat{\phi}(3\hat{\phi} - 4\hat{z}) - \dfrac{4(v_0^2-8) + 57\cos\phi}{25}\hat{\varpi}$ (όπως περιμέναμε είναι κάθετη στην ταχύτητα).

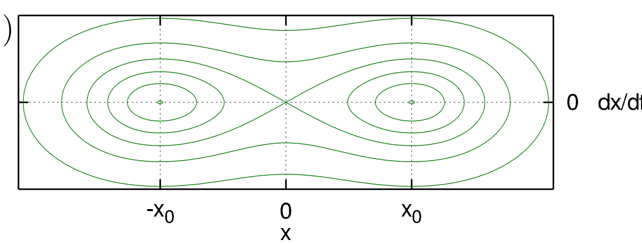
(η) Ο νόμος Νεύτωνα είναι $\vec{a} = \vec{g} + \vec{N} - \dfrac{1}{5}\dfrac{v^2}{2}\hat{\varepsilon}$, όπου $\vec{N}\perp\vec{v}$. Η προβολή πάνω στην κίνηση (στο $\hat{\varepsilon}$) δίνει $\dot{v} = \hat{x}\cdot\dfrac{4\hat{\phi}+3\hat{z}}{5} - \dfrac{1}{10}v^2 = -\dfrac{4}{5}\sin\phi - \dfrac{1}{10}v^2$. Θέτοντας $\dot{v} = \dfrac{dv}{d\phi}\dot{\phi} = \dfrac{dv}{d\phi}\dfrac{v}{5} = \dfrac{1}{10}\dfrac{dv^2}{d\phi}$ προκύπτει $\dfrac{dv^2}{d\phi} + v^2 = -8\sin\phi$. Η γραμμική, μη-ομογενής εξίσωση αυτή έχει μερική λύση $v^2_{\mu\varepsilon\rho} = 4\cos\phi - 4\sin\phi$ (προκύπτει δοκιμάζοντας μορφή $A\cos\phi + B\sin\phi$) και λύση ομογενούς $v^2_{o\mu} = Ce^{-\phi}$ (προκύπτει δοκιμάζοντας λύση $e^{\lambda t}$). Επομένως η γενική λύση είναι $v^2 = Ce^{-\phi} + 4\cos\phi - 4\sin\phi$. Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $v|_{\phi=0} = v_0$ προκύπτει $C = v_0^2 - 4$, επομένως $v = \sqrt{(v_0^2-4)e^{-\phi} + 4\cos\phi - 4\sin\phi}$.
Αν $v_0 = 2$ το βαγόνι σταματά στιγμιαία στην θέση όπου $v = 0 \Leftrightarrow \cos\phi = \sin\phi \Leftrightarrow \phi = \pi/4$.

Θέμα 2ο:

(α) Για την διαδρομή AB είναι $d\vec{r} = dy\ \hat{y}$, $x = 0$, $y = b \to L$, οπότε $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \mu\,(L-y)\,dy$ και $W_{AB} = \int_b^L \mu\,(L-y)\,dy = \mu\left[Ly - \frac{y^2}{2}\right]_b^L = \frac{1}{2}\mu(L-b)^2$.
Για την διαδρομή BC είναι $\sqrt{x^2+y^2} = L$ οπότε $\vec{F} = 0$ και $W_{BC} = 0$.
Για την διαδρομή CA είναι $d\vec{r} = dx\ \hat{x}$, $y = b$, $x = x_0 \to 0$ όπου $x_0 = \sqrt{L^2-b^2}$, οπότε $\vec{F} \cdot d\vec{r} = k\left(\frac{Lx}{\sqrt{x^2+b^2}} - x\right)dx$ και $W_{CA} = \int_{x_0}^0 k\left(\frac{Lx}{\sqrt{x^2+b^2}} - x\right)dx = k\left[L\sqrt{x^2+b^2} - \frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^0 = -\frac{1}{2}k(L-b)^2$.
Το συνολικό έργο είναι $W = \frac{(\mu-k)(L-b)^2}{2}$.
(β) Είναι $\frac{\partial V}{\partial x} = k\left(\sqrt{x^2+y^2} - L\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ και $\frac{\partial V}{\partial y} = k\left(\sqrt{x^2+y^2} - L\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, οπότε πράγματι ισχύει $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ αν $\mu = k$.
Αφού υπάρχει συνάρτηση V για την οποία ισχύει $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ η δύναμη $\vec{F}$ είναι συντηρητική.
(γ_1) Το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{mv^2}{2} + V(x) = E$ με $\vec{v} = \dot{x}\hat{x}$ και $V(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+b^2} - L\right)^2$, αποτελεί την εξίσωση κίνησης που καθορίζει την $x(t)$.
(Το βάρος ακόμα και αν υπάρχει δεν παίζει ρόλο γιατί είναι κάθετο στην οριζόντια ευθεία πάνω στην οποία κινείται το δαχτυλίδι.)
Αλλιώς: Ο νόμος Νεύτωνα είναι $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}$, όπου $\vec{F}$ η δύναμη του ελατηρίου (το δεδομένο πεδίο με $\mu = k$, $y = b$) και $\vec{N} = N\hat{y}$ η κάθετη αντίδραση από την ευθεία $y = b$. Η προβολή του στον άξονα $\hat{x}$ δίνει την εξίσωση κίνησης $m\ddot{x} = k\left(\frac{Lx}{\sqrt{x^2+b^2}} - x\right)$. Αυτή είναι ισοδύναμη με το ολοκλήρωμα ενέργειας που δόθηκε παραπάνω αφού το δεξιό μέλος γράφεται $-\frac{dV}{dx}$ με $V(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+b^2} - L\right)^2$.
(γ_2) Η συνάρτηση $V(x)$ είναι άρτια και αρκεί να μελετηθεί στα θετικά x. Η παράγωγος $V'(x) = kx\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)$ μηδενίζεται στα σημεία ισορροπίας $x = 0$ και $x = x_0 = \sqrt{L^2-b^2}$. Η δεύτερη παράγωγος $V''(x) = k\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2+b^2}}\right) + \frac{kLx^2}{(x^2+b^2)^{3/2}}$ στο πρώτο σημείο είναι $V''(0) = k(1 - L/b) < 0$ αφού $b < L$, άρα το σημείο είναι μέγιστο, ενώ στο δεύτερο $V''(x_0) = kx_0^2/L^2 > 0$ άρα το σημείο είναι ελάχιστο. Στο διάστημα $0 < x < x_0$ είναι $V'(x) < 0$ και άρα η $V(x)$ είναι φθίνουσα ενώ στο $x > x_0$ είναι $V'(x) > 0$ και άρα η $V(x)$ είναι αύξουσα, δηλ. το σωστό διάγραμμα είναι η κόκκινη (διακεκομμένη) καμπύλη.
Το $x = 0$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας (αφού η $V(x)$ έχει τοπικό μέγιστο σε αυτό το σημείο) ενώ το $x = x_0$ και το συμμετρικό $x = -x_0$ είναι ευσταθή (η $V(x)$ έχει ελάχιστα σε αυτά τα σημεία).
Αυτά είναι αναμενόμενα, αφού για $b < L$ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος στις θέσεις $x = \pm x_0 = \pm\sqrt{L^2-b^2}$. Για $-x_0 < x < x_0$ είναι συσπειρωμένο οπότε η δύναμη είναι απωστική (δηλ. έχει θετική προβολή στον x άξονα για $x > 0$ και αρνητική για $x < 0$), ενώ για $x > x_0$ και $x < -x_0$ είναι επιμηκυμένο οπότε η δύναμη είναι ελκτική (δηλ. έχει αρνητική προβολή στον x άξονα για θετικά x και θετική προβολή για αρνητικά x).
Όμοια, για $b > L$ το ελατήριο είναι πάντα επιμηκυμένο, άρα υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας στο $x = 0$ (όπου η δύναμη είναι κάθετη στην ευθεία $y = b$) στο οποίο η ισορροπία είναι ασταθής. Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι η μπλε (στικτή) καμπύλη του σχήματος της εκφώνησης.
Η περίπτωση $b = L$ αντιστοιχεί στην πράσινη (συνεχή) καμπύλη του σχήματος της εκφώνησης.



(γ_3)



(γ_4) Έστω $\vec{\Omega} = \Omega\hat{x}$ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.
Η Coriolis είναι μηδενική αφού $\vec{v} \parallel \vec{\Omega}$.
Η φυγόκεντρος είναι $m\Omega^2\vec{r}_\perp = m\Omega^2 b\hat{y}$, δηλ. είναι κάθετη στην κίνηση και δεν την επηρεάζει (εξουδετερώνεται από την κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ που ασκεί η ευθεία $y = b$ στο δαχτυλίδι).
Η υποθετική δύναμη $-m\dot{\Omega}\hat{x} \times \vec{r}$, η οποία υπάρχει αν η Ω μεταβάλλεται, είναι επίσης κάθετη στην κίνηση.
Το βάρος είναι επίσης συνεχώς κάθετο στην κίνηση αφού η ευθεία $y = b$ παραμένει οριζόντια.
Άρα η περιστροφή γύρω από τον άξονα $\hat{x}$ δεν επηρεάζει την κίνηση του δαχτυλιδιού. Τα σημεία ισορροπίας παραμένουν $x = 0$ και $x = \pm x_0$.

(γ_5) Η Coriolis δεν παίζει ρόλο σαν κάθετη στην κίνηση.
Για την περιστροφή γύρω από τον άξονα $\hat{y}$ η φυγόκεντρος είναι $m\Omega^2\vec{r}_\perp = m\Omega^2 x\hat{x}$ και προσθέτει δυναμική ενέργεια $-\dfrac{m\Omega^2 r_\perp^2}{2} = -\dfrac{m\Omega^2 x^2}{2}$. Το ολοκλήρωμα «ενέργειας» είναι τώρα $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) - \dfrac{m\Omega^2 x^2}{2} = E$. Τα σημεία ισορροπίας είναι τα ακρότατα της ολικής δυναμικής ενέργειας, δηλ. λύσεις της $V'(x) - m\Omega^2 x = 0 \Leftrightarrow x\left(k - m\Omega^2 - \dfrac{kL}{\sqrt{x^2+b^2}}\right) = 0$.
Ισοδύναμα $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow \vec{F}\cdot\hat{x} + m\Omega^2 x = 0$.
Το $x = 0$ είναι σε κάθε περίπτωση σημείο ισορροπίας, ενώ αν ισχύει $k > m\Omega^2$ υπάρχουν άλλα δύο σημεία ισορροπίας στις θέσεις όπου $\sqrt{x^2+b^2} = \dfrac{kL}{k-m\Omega^2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\left(\dfrac{kL}{k-m\Omega^2}\right)^2 - b^2}$.
(Το υπόριζο είναι θετικό γιατί $\dfrac{kL}{k-m\Omega^2} > L > b$.)
Για την περιστροφή γύρω από τον άξονα $\hat{z}$ η φυγόκεντρος είναι $m\Omega^2\vec{r}_\perp = m\Omega^2(x\hat{x}+b\hat{y})$. Η $\hat{y}$ συνιστώσα της δεν παίζει ρόλο σαν κάθετη στην κίνηση, ενώ η $\hat{x}$ συνιστώσα είναι ίδια με πριν, επομένως τα σημεία ισορροπίας είναι ίδια με αυτά που προέκυψαν όταν το σύστημα περιστρεφόταν γύρω από τον άξονα $\hat{y}$.
Αυτό φαίνεται και από το ολοκλήρωμα «ενέργειας» το οποίο δεν αλλάζει, αφού η δυναμική ενέργεια της φυγόκεντρου $-\dfrac{m\Omega^2 r_\perp^2}{2} = -\dfrac{m\Omega^2 x^2}{2} - \dfrac{m\Omega^2 b^2}{2}$ είναι ίδια με πριν (πέρα από μια σταθερά).
Γενικά αν η περιστροφή γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega} = \Omega_x\hat{x} + \Omega_y\hat{y} + \Omega_z\hat{z}$ γύρω από άξονα που περνά από το O τότε η δυναμική ενέργεια της φυγόκεντρου $V_\phi = -\dfrac{m\Omega^2 r_\perp^2}{2}$, θέτοντας $\Omega^2 r_\perp^2 = \Omega^2 r^2 - \Omega^2 r_\parallel^2 = \Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}\cdot\vec{r})^2$ με $\vec{r} = x\hat{x} + b\hat{y}$, προκύπτει $V_\phi = -\dfrac{m}{2}\left[\Omega^2(x^2+b^2) - (\Omega_x x + \Omega_y b)^2\right] = m\Omega_x\Omega_y bx - \dfrac{m(\Omega_y^2+\Omega_z^2)x^2}{2} +$ σταθερά.
Το ολοκλήρωμα «ενέργειας» είναι τώρα $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) + m\Omega_x\Omega_y bx - \dfrac{m(\Omega_y^2+\Omega_z^2)x^2}{2} =$ σταθερά και τα σημεία ισορροπίας είναι τα ακρότατα της ολικής δυναμικής ενέργειας, δηλ. λύσεις της $kx\left(1 - \dfrac{L}{\sqrt{x^2+b^2}}\right) + m\Omega_x\Omega_y b - m(\Omega_y^2+\Omega_z^2)x = 0$.
(γ_6) Ο νόμος του Νεύτωνα είναι $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_a + \vec{N}$, όπου $\vec{F} = -k(r-L)\hat{r}$ είναι η δύναμη του ελατηρίου (το δεδομένο πεδίο με $\mu = k$, $y = b$), $\vec{F}_a = -c\dot{r}\hat{r} = -c(\vec{v}\cdot\hat{r})\hat{r}$ η δύναμη από τον αποσβεστήρα και $\vec{N} = N\hat{y}$ η κάθετη αντίδραση από την ευθεία $y = b$. Η προβολή του στον άξονα $\hat{x}$, θέτοντας $\vec{v} = \dot{x}\hat{x}$, $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x}$ και $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \dfrac{x\hat{x}+b\hat{y}}{\sqrt{x^2+b^2}}$, δίνει την εξίσωση κίνησης $m\ddot{x} = k\left(\dfrac{Lx}{\sqrt{x^2+b^2}} - x\right) - c\dot{x}\dfrac{x^2}{x^2+b^2}$.
Γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας $x = x_0 = \sqrt{L^2-b^2}$, θέτοντας $x = x_0 + q$ με $|q| \ll x_0$, αναπτύσσοντας κατά Taylor ως προς q και κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους, η εξίσωση κίνησης γίνεται $m\ddot{q} = k\left[\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{Lx}{\sqrt{x^2+b^2}} - x\right)\right]_{x=x_0} q - c\dot{q}\dfrac{x_0^2}{x_0^2+b^2} \Leftrightarrow$
$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$, όπου $\gamma = \dfrac{cx_0^2}{2mL^2}$ και $\omega_0^2 = \dfrac{kx_0^2}{mL^2}$.
Η γραμμική και ομογενής αυτή εξίσωση δέχεται λύσεις της μορφής $e^{\lambda t}$. Η αντικατάσταση δίνει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$. Η φθίνουσα ταλάντωση ασθενούς απόσβεσης αντιστοιχεί σε $\gamma < \omega_0$ οπότε προκύπτουν μιγαδικές λύσεις $\lambda = -\gamma \pm i\omega$ με $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Η γενική λύση είναι $q = De^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi_0)$. Η περίοδος είναι $\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} = \dfrac{4\pi mL^2}{\sqrt{4kmL^2(L^2-b^2) - c^2(L^2-b^2)^2}}$.
Λόγω του όρου $e^{-\gamma t}$ το πλάτος πρακτικά μηδενίζεται και το δαχτυλίδι καταλήγει στο σημείο ισορροπίας $q = 0$ σε χρόνο $\dfrac{5}{\gamma} = \dfrac{10mL^2}{cx_0^2} = \dfrac{10mL^2}{c(L^2-b^2)}$.