Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 25 Σεπτεμβρίου 2017
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ______________

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 5ης Δεκεμβρίου 2016: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

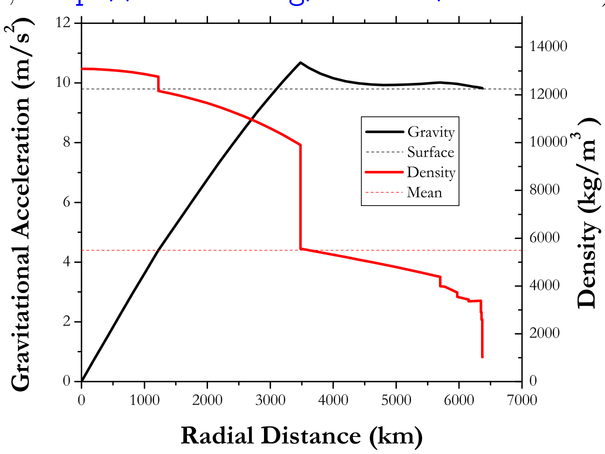
Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

Υποθέστε ότι υπάρχει ένα τούνελ που διαπερνά τη Γη, πάνω σε μια διάμετρό της. Ένα σώμα ξεκινά από την επιφάνεια και κινείται μέσα σε αυτό το τούνελ υπό την επίδραση μόνο του βάρους του.

(α) Εκτιμήστε διαστατικά σε πόσο χρόνο το σώμα θα φτάσει στο κέντρο της Γης, θεωρώντας τον συνάρτηση των G, $M_\oplus$ και $R_\oplus$. Εκφράστε το αποτέλεσμα συναρτήσει της μέσης πυκνότητας της Γης $\bar\rho$.

(β) Αν θεωρήσουμε την πυκνότητα της Γης σταθερή, η επιτάχυνση της βαρύτητας σε θέση $\vec r$ από το κέντρο της είναι $\vec g = -\omega^2 \vec r$, όπου $\omega = \sqrt{4\pi G\bar\rho/3}$.
Βρείτε τη θέση του σώματος σε κάθε χρόνο.
Σε πόσο χρόνο φτάνει στο κέντρο της Γης;

(γ) Σεισμικά δεδομένα δίνουν την εσωτερική δομή της Γης, δηλ. την πυκνότητα, άρα και την επιτάχυνση βαρύτητας (Klotz, A. R. 2015, Am. J. Phys. 83, 231, http://dx.doi.org/10.1119/1.4898780).



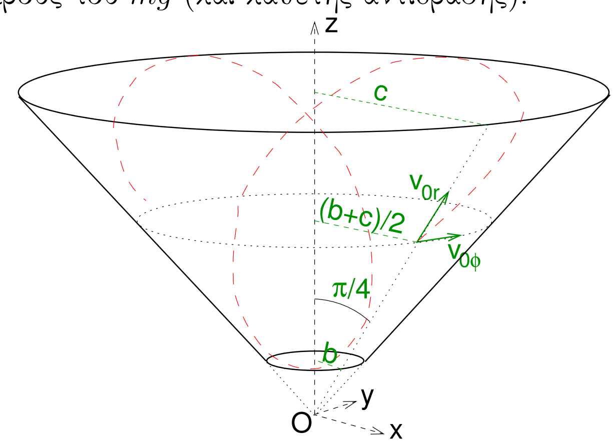
Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο για την επιτάχυνση βαρύτητας είναι σταθερή από την επιφάνεια μέχρι ακτίνα $r_1 = \lambda R$ και γραμμική από την ακτίνα r_1 μέχρι το κέντρο, δηλ.

$$|\vec g| = \begin{cases} \omega^2 R\,, & \lambda R \le r \le R\,, \\ \dfrac{\omega^2}{\lambda} r\,, & 0 \le r \le \lambda R\,. \end{cases}$$

Βρείτε σε πόσο χρόνο το σώμα θα φτάσει στο κέντρο της Γης. Εφαρμόστε για $\lambda = 1,\ 1/2$ και 0.
Μεταξύ του να θεωρήσουμε σε όλη την κίνηση σταθερή την πυκνότητα ή την επιτάχυνση βαρύτητας, τι είναι προτιμότερο;
Δίνεται η σταθερά $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-1}}$ και η μέση πυκνότητα της Γης $\bar\rho = 5514\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$.

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

Έστω ο κατακόρυφος κόλουρος κώνος του σχήματος με ημιάνοιγμα $\theta = \pi/4 = 45^\circ$, ελάχιστη κυλινδρική ακτίνα b και μέγιστη κυλινδρική ακτίνα $c = 7b$. Σημειακό σώμα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στην εσωτερική του επιφάνεια, υπό την επίδραση του βάρους του $m\vec g$ (και κάθετης αντίδρασης).



Για να απλουστευθούν οι πράξεις θέσατε $m = 1$, $g = 1$, $b = 1$, $c = 7$.

(α) Γράψτε την έκφραση της ταχύτητας σε σφαιρικές συντεταγμένες.

(β) Αιτιολογήστε γιατί διατηρούνται οι ποσότητες $L = mr^2 \sin^2\theta\ \dot\phi$ και $E = \dfrac{mv^2}{2} + mgr\cos\theta$.

(γ) Δείξτε ότι η κίνηση ανάγεται σε «μονοδιάστατη» με ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot r^2}{2} + V_{\rm eff}(r) = E$, όπου $V_{\rm eff}(r) = \dfrac{L^2}{r^2} + \dfrac{r}{\sqrt2}$. Σχεδιάστε το γράφημα της $V_{\rm eff}(r)$.

(δ) Έστω βάλουμε το σώμα από σημείο του κώνου που ισαπέχει από τις βάσεις, δηλ. από θέση με $r_0 = 4\sqrt2$.

(δ$_1$) Αν $L = 4\sqrt2$ και $E = 5$ δείξτε τα όρια της κίνησης στο γράφημα της $V_{\rm eff}(r)$.

★ (δ$_2$) Ποια πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα $\vec v_0 = v_{0r}\hat r + v_{0\phi}\hat\phi$ ώστε το σώμα να περάσει από όλη την επιφάνεια του κόλουρου κώνου χωρίς να φύγει έξω από αυτήν;
(Υπολογίσετε τις τιμές των L και E απαιτώντας η κίνηση να καλύπτει την περιοχή $\sqrt2 \le r \le 7\sqrt2$ και κατόπιν βρείτε τις $v_{0\phi}$ και v_{0r}).

Θέμα 3^o:

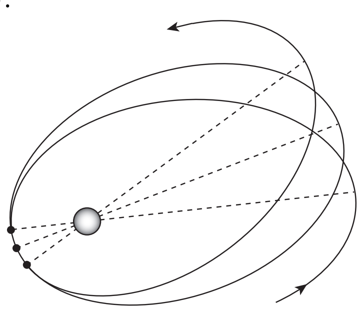
Θεωρείστε το ακόλουθο βαρυτικό δυναμικό,

$$V(r) = -\frac{k}{r} - \frac{c}{5r^5}\,,$$

όπου $k = GM_\oplus m > 0$ και c μια μικρή σταθερά.
Πρόκειται για το γνωστό δυναμικό μιας σφαιρικής κατανομής μάζας $M_\oplus$, αλλά περιέχει επιπλέον και ένα δεύτερο όρο που περιγράφει μια διόρθωση.
(α) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα ω και στροφορμή L μιας κυκλικής τροχιάς ακτίνας α μιας μάζας m εντός του δυναμικού αυτού.
(β) Δείξτε ότι για μικρές διαταραχές της κυκλικής τροχιάς της μάζας m, η γωνιακή συχνότητα ω_r των μικρών ακτινικών ταλαντώσεων της μάζας γύρω από αυτή την κυκλική τροχιά είναι,

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k\alpha^4 - 3c}{m\alpha^7}}\,.$$

(γ) Για μια τροχιά της μάζας m που αποκλίνει ελάχιστα από την κυκλική ακτίνας $r = \alpha$, δλδ, $r = \alpha + \delta r$, ή $u \equiv 1/r = u_o + \delta u$, με $u_o = 1/\alpha$, να δειχθεί ότι η τροχιά της μάζας m είναι ελλειπτική της οποίας ο μεγάλος άξονας (η γραμμή των αψίδων) μεταπίπτει (βλ. Σχήμα).



(δ) Σύμφωνα με το ανωτέρω αποτέλεσμα, μια σχεδόν κυκλική τροχιά είναι στην πραγματικότητα προσεγγιστικά μια έλλειψη που οι άξονές της μεταπίπτουν. Δείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης της γραμμής των αψίδων είναι,

$$\Omega = \sqrt{\frac{k\alpha^4 + c}{m\alpha^7}} - \sqrt{\frac{k\alpha^4 - 3c}{m\alpha^7}}\,.$$

★ (ε) Στο όριο όπου $c/k\alpha^4 << 1$, δλδ η διαταρακτική δύναμη είναι πολύ μικρότερη της βαρυτικής δύναμης απο το κεντρικό σώμα με σφαιρική κατανομή μάζας $M_\oplus$, δείξτε ότι

$$\Omega \simeq \frac{2c}{k\alpha^4}\omega\,.$$

Υπενθυμίζεται η γνωστή διαφορική εξίσωση,

$$\frac{L^2 u^2}{m}(u'' + u) = -f(1/u)\,.$$

που ικανοποιεί η τροχιά $r(\theta) = 1/u(\theta)$ σε ένα κεντρικό πεδίο δυνάμεων $f(1/u) = f(r)$.

Θέμα 4^o:

(α) Ένα διάχυτο σφαιρικό νέφος ομογενούς πυκνότητος ρ_o και αρχικής ακτίνας R ευρίσκεται σε ισορροπία. Κάποια στιγμή, λόγω μιας εξωτερικής διαταραχής, αρχίζει να καταρρέει υπό την επίδραση της δικής του βαρύτητας. Να υπολογισθεί η ακτινική ταχύτητα ενός σωματιδίου του νέφους το οποίο ξεκινά από την ηρεμία σε κάποια απόσταση r_o απο το κέντρο του νέφους και φθάνει σε τυχούσα άλλη απόσταση $r < r_o$.
(β) Να αποδειχθεί ότι κάθε σωματίδιο του νέφους φθάνει στο κέντρο του νέφους στον ίδιο χρόνο, ανεξαρτήτως της αρχικής απόστασης αφετηρίας r_o.
Δείξτε ότι ο χρόνος αυτός, t_{ff} (free fall time, χρόνος ελεύθερης πτώσης), είναι,

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_o}} = \frac{\pi}{2}\frac{R^{3/2}}{\sqrt{2GM}}\,,$$

όπου M είναι η συνολική μάζα του νέφους $M = 4\pi\rho_o R^3/3$.
Υπόδειξη: η αντικατάσταση $r = r_o \sin^2\theta$ ίσως είναι χρήσιμη σε κάποια ολοκλήρωση.
(γ) Εκτιμήστε το χρόνο κατάρρευσης t_{ff} για ένα σώμα με μέση πυκνότητα $\sim 1\ \mathrm{gr/cm^3}$, όπως η Γη και ο Ήλιος.
(δ) Ως γνωστόν η Γη μάζας m κινείται σε μια περίπου κυκλική τροχιά γύρω από τον Ήλιο μάζας M και ακτίνας R με μια ταχύτητα περί τα 30 km/sec. Αν κάποιο αόρατο και ισχυρό «χέρι» σταματούσε την κίνησή της τότε η Γη θα κατέρρεε κινούμενη ακτινικά προς το κέντρο του Ήλιου. Δείξτε ότι ο χρόνος αυτός της κατάρρευσης t_o είναι,

$$t_o = \frac{\pi}{2}\frac{R^{3/2}}{\sqrt{2GM}}\,.$$

Μπορείτε να θεωρήσετε μια οριακή ελλειπτική τροχιά της Γης με εκκεντρότητα $e = 1$ και μεγάλο ημιάξονα $R/2$.
(ε) Υπολογίστε το χρόνο κατάρρευσης της Γης στον Ήλιο σε ημέρες.
Δίδεται η σταθερά της παγκοσμίου έλξεως, $G = 6.67 \times 10^{-8}$ CGS $= 6.67 \times 10^{-11}$ SI.

<u>ΛΥΣΕΙΣ:</u>

<u>Θέμα 1ο:</u>

(α) $t \propto G^a M_\oplus^b R_\oplus^c$, $[G] = [L]^3[M]^{-1}[T]^{-2}$ (από $GM/r = v^2$), οπότε $[T] = [L]^{c+3a}[M]^{b-a}[T]^{-2a}$ από την οποία προκύπτουν $a = -1/2$, $b = -1/2$, $c = 3/2$. Άρα $t \propto \sqrt{R_\oplus^3/GM_\oplus}$, ή $t \propto 1/\sqrt{G\bar{\rho}}$.

(β) Η κίνηση είναι μονοδιάσταση και περιγράφεται από $m\ddot{r} = -m\omega^2 r \Leftrightarrow \ddot{r} + \omega^2 r = 0$, δηλ. είναι αρμονική ταλάντωση. Η λύση η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες ($r = R$ και $\dot{r} = 0$ για $t = 0$) είναι $r = R\cos(\omega t)$.

Το σώμα φτάνει στο κέντρο σε χρόνο $\dfrac{\pi}{2\omega} = \sqrt{\dfrac{3\pi}{16G\bar{\rho}}} = 21.1$ λεπτά.

(γ) Η αρχική φάση της κίνησης είναι ομαλά επιταχυνόμενη με $\ddot{r} = -\omega^2 R \Leftrightarrow \dot{r} = -\omega^2 R t \Leftrightarrow r = R - \omega^2 R t^2/2$. Φτάνει στη θέση $r_1 = \lambda R$ σε χρόνο t_1 στον οποίο $r_1 = R - \omega^2 R t_1^2/2 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{\sqrt{2-2\lambda}}{\omega}$.

Τότε έχει ταχύτητα $v_1 = -\omega^2 R t_1 = -\omega R\sqrt{2-2\lambda}$.

Στη δεύτερη φάση για $t > t_1$ είναι $\ddot{r} + \dfrac{\omega^2}{\lambda} r = 0 \Leftrightarrow r = C_1 \sin(\omega' t') + C_2 \cos(\omega' t')$, όπου $\omega' = \dfrac{\omega}{\sqrt{\lambda}}$ και $t' = t - t_1$. Οι αρχικές συνθήκες αυτής της φάσης είναι $r|_{t'=0} = \lambda R$, $\dot{r}|_{t'=0} = -\omega R\sqrt{2-2\lambda}$ και δίνουν $C_1 = -R\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}$, $C_2 = \lambda R$. Άρα $r = -R\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}\sin(\omega' t') + \lambda R\cos(\omega' t')$.

Το σώμα φτάνει στο κέντρο όταν $r = 0 \Leftrightarrow \tan(\omega' t') = \sqrt{\dfrac{\lambda}{2-2\lambda}} \Leftrightarrow t' = \dfrac{1}{\omega'}\sqrt{\dfrac{\lambda}{2-2\lambda}}$, δηλ. σε $t(\lambda) = \dfrac{1}{\omega}\left(\sqrt{2-2\lambda} + \sqrt{\lambda}\arctan\sqrt{\dfrac{\lambda}{2-2\lambda}}\right)$.

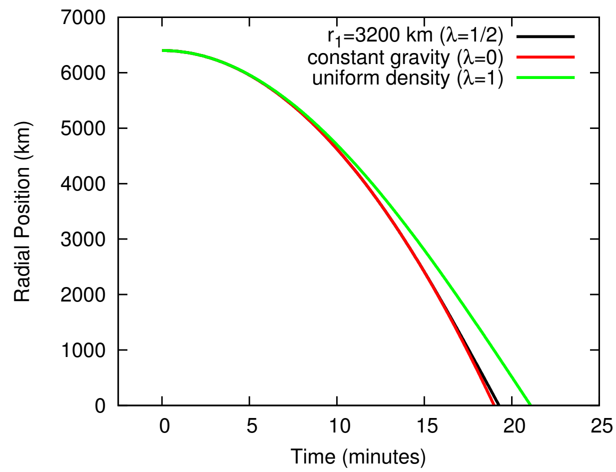
Για $\lambda = 1$, δηλ. θεωρώντας σε όλη την κίνηση $|\vec{g}| = \omega^2 r$, ή ισοδύναμα την πυκνότητα σταθερή, προκύπτει $t = \pi/2\omega = 21.1$ λεπτά.

Για $\lambda = 1/2$ προκύπτει $t = 1.435/\omega = 19.3$ λεπτά.

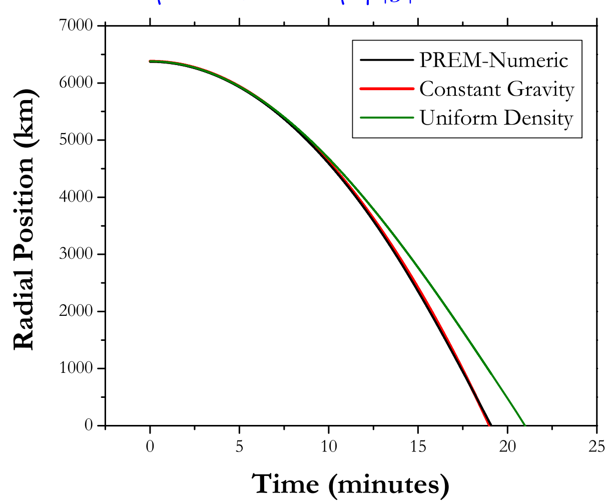
Για $\lambda = 0$, δηλ. θεωρώντας σε όλη την κίνηση σταθερή $|\vec{g}| = \omega^2 R$, προκύπτει $t = \sqrt{2}/\omega = 19$ λεπτά. (Το ίδιο προκύπτει και από την εξίσωση ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης σε σταθερό g, $r = R - gt^2/2$, άρα το σώμα φτάνει στο κέντρο σε χρόνο $t = \sqrt{2R/g}$.)

Τελικά είναι προτιμότερη η προσέγγιση σταθερού $|\vec{g}|$! Ο λόγος είναι ότι τον περισσότερο χρόνο το σώμα τον περνά όταν κινείται αργά, κάτι που συμβαίνει μακρυά από το κέντρο όπου η $|\vec{g}|$ είναι σταθερή. (Από $r = R$ μέχρι $r = R/2$ έχει περάσει χρόνος $\sqrt{R/g} = 1/\omega = 13.5$ λεπτά.) Μάλιστα το μέγιστο του $|\vec{g}|$ σε ακτίνα $\sim R/2$ (όπου η $|\vec{g}|$ είναι μεγαλύτερη από την τιμή επιφάνειας $\omega^2 R$) συνεισφέρει στη μείωση του σφάλματος, αφού εξουδετερώνει μερικώς το ότι η $|\vec{g}|$ είναι μικρή κοντά στο κέντρο.

Τα επόμενα αποτελέσματα δείχνουν πόσο κοντά είναι οι λύσεις με $\lambda = 0$ (σταθερή $|\vec{g}|$) και $\lambda = r_1/R = 3200/6400 = 1/2$ (το οποίο προσεγγίζει την επιτάχυνση βαρύτητας από τα σεισμικά δεδομένα).



Στο παρακάτω διάγραμμα από την εργασία του Klotz η μαύρη καμπύλη δείχνει τα αριθμητικά αποτελέσματα (PREM-Numeric) λαμβάνοντας υπόψη την $g(r)$ όπως προκύπτει από τα σεισμικά δεδομένα. Υπάρχει εντυπωσιακή συμφωνία με την λύση που προκύπτει θεωρώντας σταθερή $|\vec{g}|$.



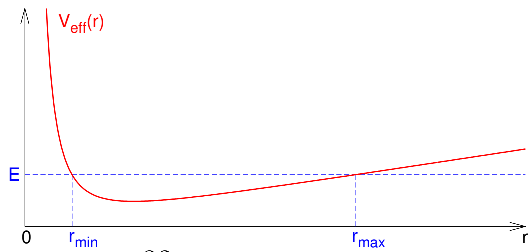
<u>Θέμα 2ο:</u>

(α) Σε σφαιρικές συντεταγμένες, με $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, ισχύει $\vec{r} = r\hat{r}$, $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} = \dot{r}\hat{r} + \dfrac{r}{\sqrt{2}}\dot{\phi}\hat{\phi}$.

(β) Αφού δεν υπάρχει δύναμη στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής διατηρείται, δηλ. $m\varpi^2\dot{\phi} = L =$ σταθερά, ή ισοδύναμα, με $\varpi = r\sin\theta = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ και $m = 1$, $\dot{\phi} = \dfrac{2L}{r^2}$.

Ισχύει επίσης η διατήρηση της ενέργειας, αφού το βάρος είναι συντηρητική δύναμη με δυναμική ενέργεια $mgz = mgr\cos\theta$ (δεν υπάρχουν τριβές και άρα το έργο της αντίδρασης σαν κάθετη στην κίνηση είναι μηδενικό), δηλ. $\dfrac{mv^2}{2} + mgr\cos\theta = E =$ σταθερά, ή ισοδύναμα $\dfrac{\dot{r}^2}{2} + \dfrac{r^2\dot{\phi}^2}{4} + \dfrac{r}{\sqrt{2}} = E$.

(γ) Αντικαθιστώντας $\dot{\phi} = \dfrac{2L}{r^2}$ προκύπτει το ολοκλήρωμα ενέργειας της «μονοδιάστατης» κίνησης $\dfrac{\dot{r}^2}{2} + V_{\rm eff}(r) = E$, όπου $V_{\rm eff}(r) = \dfrac{L^2}{r^2} + \dfrac{r}{\sqrt{2}}$.



(δ_1) $V_{\rm eff}(r) = \dfrac{32}{r^2} + \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. Στην αρχική θέση είναι $V_{\rm eff} = 5 = E$ και $V'_{\rm eff} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} > 0$. Άρα η αρχική θέση είναι η ακραία με το μέγιστο r. (Η άλλη ακραία θέση είναι η μικρότερη θετική λύση της $V_{\rm eff}(r) = E$.)

Αλλιώς: Στα όρια κίνησης $V_{\rm eff}(r) = E \Leftrightarrow \dfrac{r^3}{\sqrt{2}} - 5r^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow (r - 4\sqrt{2})\left(\dfrac{r^2}{\sqrt{2}} - r - 4\sqrt{2}\right) = 0$. Οι θετικές λύσεις είναι $r = \dfrac{1+\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ και $r = 4\sqrt{2}$, δηλ. η αρχική θέση είναι η ακραία με το μέγιστο r. (Η μικρότερη κυλινδρική ακτίνα είναι $\dfrac{1+\sqrt{17}}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 1$, επομένως το σώμα μένει πάντα πάνω στον κόλουρο κώνο.)

(δ_2) Πρέπει στις ακραίες ακτίνες $r = \sqrt{2}$ και $r = 7\sqrt{2}$ η ταχύτητα να είναι μόνο εφαπτομενική, δηλ. πρέπει $V_{\rm eff}(\sqrt{2}) = V_{\rm eff}(7\sqrt{2}) = E$.

Η ισότητα $V_{\rm eff}(\sqrt{2}) = V_{\rm eff}(7\sqrt{2})$ δίνει τη στροφορμή: $\dfrac{L^2}{2} + 1 = \dfrac{L^2}{98} + 7 \Leftrightarrow L = \pm\dfrac{7}{2}$.

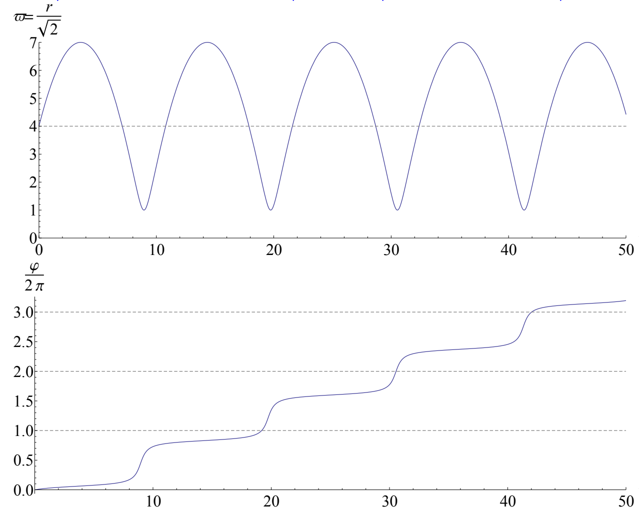
Η ενέργεια είναι $E = V_{\rm eff}(\sqrt{2}) = \dfrac{57}{8}$.

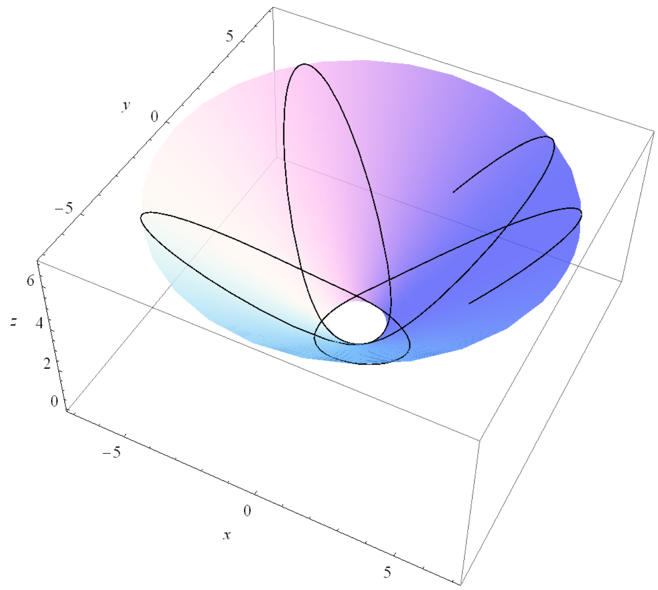
Στην αρχική θέση $r_0 = 4\sqrt{2}$ είναι $\dot{\phi}_0 = \dfrac{2L}{r_0^2} = \pm\dfrac{7}{32}$ και $v_{0\phi} = \dfrac{r_0}{\sqrt{2}}\dot{\phi}_0 = \pm\dfrac{7}{8}$.

$\dfrac{\dot{r}^2}{2} = E - V_{\rm eff}(4\sqrt{2}) \Leftrightarrow v_{0r} = \dot{r} = \pm\dfrac{3\sqrt{39}}{8}$.

Άρα η αρχική ταχύτητα πρέπει να έχει αζιμουθιακή συνιστώσα $v_{0\phi} = \pm\dfrac{7}{8}$ (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) και ακτινική συνιστώσα $v_{0r} = \pm\dfrac{3\sqrt{39}}{8}$ (από ή προς το σημείο O).

Τα παρακάτω γραφήματα δείχνουν τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης για $r|_{t=0} = 4\sqrt{2}$, $\phi|_{t=0} = 0$, $\dot{r}|_{t=0} = +3\sqrt{39}/8$, $\dot{\phi}|_{t=0} = +7/32$.



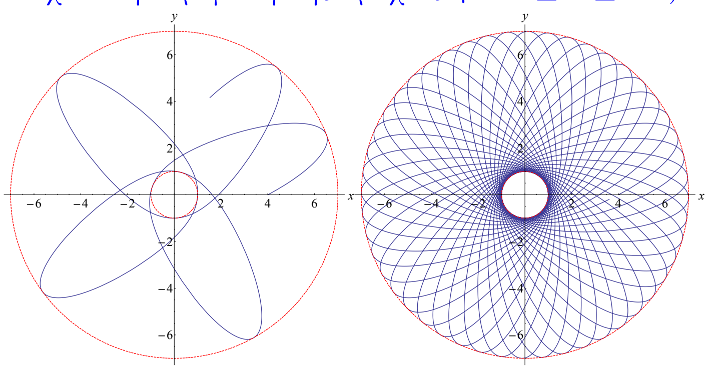


Η περίοδος της ακτινικής κίνησης είναι $T_r = 2\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{7\sqrt{2}} \frac{dr}{\dot{r}} = \int_{\sqrt{2}}^{7\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}\,dr}{\sqrt{E - V_{\rm eff}(r)}} \approx 10.7923$.

Στο χρόνο αυτό το διάνυσμα θέσης του σώματος έχει στραφεί κατά $\Delta\phi = 2\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{7\sqrt{2}} \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}}dr = \int_{\sqrt{2}}^{7\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}L/r^2}{\sqrt{E - V_{\rm eff}(r)}}dr \approx 0.7708 \times 2\pi$.

Το σώμα θα γυρίσει στην αρχική θέση αφού στραφεί κατά γωνία ίση με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $\Delta\phi$ και 2π. Αυτή είναι θεωρητικά άπειρη γωνία αν ο λόγος $\dfrac{\Delta\phi}{2\pi}$ είναι άρρητος αριθμός, οπότε το σώμα περνά από κάθε σημείο του κώνου.

Πρακτικά όμως ο λόγος $\dfrac{\Delta\phi}{2\pi}$ είναι κοντά σε κάποιο ρητό αριθμό, στην περίπτωσή μας στον $\dfrac{\Delta\phi}{2\pi} \approx \dfrac{37}{48}$, οπότε μετά από 37 πλήρεις περιστροφές το σώμα γυρνά πολύ κοντά στο αρχικό σημείο. Αυτό συμβαίνει μετά από 48 περιόδους της ακτινικής κίνησης, δηλ. σε χρόνο $48T_r \approx 518$, και φαίνεται στο κάτω δεξιά σχήμα που δείχνει την προβολή της τροχιάς στο επίπεδο xy για $0 \leq t \leq 517.8$ (το αρχικό σημείο είναι το $x = 4$, $y = 0$, ενώ φαίνεται το σώμα να πλησιάζει στο σημείο αυτό στον τελικό χρόνο). (Το κάτω αριστερά δείχνει την προβολή της τροχιάς για $0 \leq t \leq 50$.)



Θέμα 3^o:

(α)

$V = -\frac{k}{r} - \frac{c}{5r^5}$, $\frac{dV}{dr} = \frac{k}{r^2} + \frac{c}{r^6}$,

$\frac{d^2V}{dr^2} = -\frac{2k}{r^3} - \frac{6c}{r^7}$, $\quad F = -\frac{dV}{dr} = -\frac{k}{r^2} - \frac{c}{r^6}$,

$m\omega^2\alpha = |F| = \frac{k}{\alpha^2} + \frac{c}{\alpha^6} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k\alpha^4 + c}{m\alpha^7}}$.

$L = m\omega\alpha^2 = \sqrt{\frac{m(k\alpha^4 + c)}{\alpha^3}}$.

(β) $V' = V + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{k}{r} - \frac{c}{5r^5} + \frac{k\alpha^4 + c}{2\alpha^3 r^2}$,

$\frac{dV'}{dr} = \frac{k}{r^2} + \frac{c}{r^6} - \frac{k\alpha^4 + c}{\alpha^3 r^3}$,

$\frac{d^2V'}{dr^2} = -\frac{2k}{r^3} - \frac{6c}{r^7} + 3\frac{k\alpha^4 + c}{\alpha^3 r^4}$.

Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται στην κυκλική ακτίνα, $\left.\frac{dV'}{dr}\right|_{r=\alpha} = 0$, συνθήκη που ισοδυναμεί με την $m\omega^2\alpha = |F|$.

Επομένως, για $r \approx \alpha$ και θέτοντας $r = r_o + x$, $|x| << r_o$ η εξίσωση τροχιάς είναι $m\ddot{r} = -\frac{dV'}{dr} \Leftrightarrow$ $\ddot{x} + \frac{1}{m}\left.\frac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r=\alpha} x = 0$ η οποία δίνει ταλαντωτική λύση με συχνότητα

$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r=\alpha}} = \sqrt{\frac{k\alpha^4 - 3c}{m\alpha^7}}$.

(γ) Η τροχιά ικανοποιεί τη γνωστή διαφορική εξίσωση,

$$\frac{L^2u^2}{m}(u'' + u) = ku^2 + cu^6\,.$$

Για μια τροχιά που αποκλίνει ελαφρά από κυκλική, γράφουμε $u = u_o + \delta u$, $|\delta u| \ll u$. Έτσι, η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{L^2}{m}\left[\frac{d^2(\delta u)}{d\theta^2} + u_o + \delta u\right] = k + cu_o^4\left(1 + \frac{\delta u}{u_o}\right)^4$$

$$\approx k + cu_o^4\left(1 + 4\frac{\delta u}{u_o}\right)\,.$$

ενώ για την κυκλική τροχιά $u = u_o$ έχουμε:

$$\frac{L^2}{m}u_o = k + cu_o^4\,.$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στην εξίσωση της διαταραγμένης τροχιάς έχουμε,

$$\frac{L^2}{m}\left[\frac{d^2(\delta u)}{d\theta^2} + \delta u\right] = 4cu_o^3\delta u\,,$$

ή,

$$\frac{d^2\delta u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{4mcu_o^3}{L^2}\right)\delta u = 0\,.$$

Θέτοντας,

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{4mc}{L^2}u_o^3},$$

για κατάλληλη επιλογή των πολικών αξόνων μια λύση είναι:

$$\delta u = B\sin\lambda\theta\,.$$

Επομένως, η τροχιά είναι ελλειπτική με τον μεγάλο άξονα να μεταπίπτει λόγω της ύπαρξης του $\lambda \neq 1$.

(δ) Εάν θ_1 και θ_2 είναι οι γωνίες δύο διαδοχικών διαβάσεων της μάζας m από τη γραμμή των αψίδων,

$$\lambda\theta_2 - \lambda\theta_1 = 2\pi \;\Rightarrow\; \Delta\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\,.$$

Επειδή $\lambda < 1$, η γωνία της μετάπτωσης της γραμμής των αψίδων είναι,

$$\Delta\theta_\mu = \Delta\theta - 2\pi = 2\pi\frac{1-\lambda}{\lambda}\,,$$

και ο χρόνος Δt για να περιστραφεί κατά γωνία $\Delta\theta_\mu$ η γραμμή των αψίδων είναι,

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{\lambda\dot{\theta}}\,.$$

Η γωνιακή ταχύτητα της μετάπτωσης είναι,

$$\Omega = \frac{\Delta\theta_\mu}{\Delta t} = \omega - \lambda\omega = \sqrt{\frac{k\alpha^4 + c}{m\alpha^7}} - \sqrt{\frac{k\alpha^4 - 3c}{m\alpha^7}}\,.$$

(ε) Η συχνότητα της μετάπτωσης είναι,

$$\Omega = \sqrt{\frac{k\alpha^4 + c}{m\alpha^7}} - \sqrt{\frac{k\alpha^4 - 3c}{m\alpha^7}} =$$

$$\sqrt{\frac{k\alpha^4}{m\alpha^7}}\left[\left(1+\frac{c}{k\alpha^4}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{3c}{k\alpha^4}\right)^{1/2}\right]\simeq\frac{2c}{k\alpha^4}\omega$$

όπου στο ανάπτυγμα Taylor θεωρήσαμε ότι $c/k\alpha^4 << 1$, δλδ η διαταρακτική δύναμη είναι πολύ μικρότερη της βαρυτικής δύναμης απο το κεντρικό σώμα με σφαιρική κατανομή μάζας $M_\oplus$.
Σημείωση : Η μάζα m διαγράφει ελλειπτική κίνηση και αυτό είναι ένα γενικό αποτέλεσμα για μικρές διαταρακτικές δυνάμεις σε σχέση με την κύρια δύναμη βαρύτητας που ασκείται από ένα κεντρικό βαρυτικό δυναμικό. Μια απόδειξη αυτού για τη διαταρακτική δύναμη $\delta f = Ar$ δίδεται στη σελ. 271 του βιβλίου Εισαγωγή στη Θεωρητική Μηχανική, Κ. Τσίγκανος. Ανάλογα αποδείξαμε ότι η μάζα m διαγράφει ελλειπτική κίνηση και για τη δεδομένη εδώ διαταρακτική δύναμη $\delta f = -c/r^6$.

Θέμα 4^o:

(α) Από τον νόμο του Νεύτωνα, η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου στην τυχούσα απόσταση r_o εντός της κατανομής της μάζας είναι,

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{4\pi G r_o^3\rho_o}{3r^2}\,,$$

ή, επειδή $d/dt = (d/dr)(dr/dt) = vd/dr$, ολοκληρώνοντας έχουμε,

$$\frac{v^2}{2}=-\frac{4\pi G r_o^3\rho_o}{3}\int\frac{dr}{r^2}=\frac{4\pi G r_o^3\rho_o}{3r}+C\,.$$

Για $r = r_o$ έχουμε $v = 0$ και επομένως $C = -4\pi G r_o^2\rho_o/3$ οπότε,

$$\frac{v^2}{2}=\frac{4\pi G r_o^2\rho_o}{3}\left(\frac{r_o}{r}-1\right)\,,$$

και

$$v=\sqrt{\frac{8\pi G r_o^2\rho_o}{3}}\sqrt{\frac{r_o}{r}-1}\,.$$

(β) Επειδή $v = dr/dt$, $dt = dr/v$ ολοκληρώνοντας έχουμε,

$$t_{ff}=\sqrt{\frac{3}{8\pi G r_o^2\rho_o}}\int_0^{r_o}\frac{dr}{\sqrt{\frac{r_o}{r}-1}}\,.$$

Θέτοντας $u = r/r_o$ έχουμε,

$$t_{ff}=\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_o}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{\frac{1}{u}-1}}=\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_o}}I\,,$$

$$I=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{\frac{1}{u}-1}}\,.$$

Με $u = \sin^2\theta$ έχουμε τελικά $I = \pi/2$, οπότε,

$$t_{ff}=\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_o}}\frac{\pi}{2}=\sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_o}}\,.$$

Επομένως, κάθε σωματίδιο του νέφους φθάνει στο κέντρο του νέφους στον ίδιο χρόνο t_{ff}, ανεξαρτήτως της αρχικής απόστασης αφετηρίας r_o.
(γ)

$$t_{ff}=\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_o}}\frac{\pi}{2}\simeq 35\,\mathrm{mins}\,.$$

(δ) Θεωρούμε τη Γη ότι κινείται κατά την κατάρρευσή της προς το Ηλιακό κέντρο, σε μια οριακή ελλειπτική τροχιά με εκκεντρότητα $e = 1$. Ο μεγάλος ημιάξονας αυτής της τροχιάς ισούται με $R/2$ και από τον τρίτο νόμο του Κέπλερ η ημιπερίοδος αυτής της ελλειπτικής τροχιάς είναι,

$$t_o=\frac{1}{2}\frac{2\pi(R/2)^{3/2}}{\sqrt{G(M+m)}}\simeq\frac{\pi R^{3/2}}{2\sqrt{2GM}}=t_{ff}\,.$$

(ε) Ο χρόνος κατάρρευσης $t_o = t_{ff}$ ισούται με

$$t_o=t_{ff}=\frac{P}{\sqrt{32}}\,,$$

όπου P ισούται με 1 έτος. Επομένως, $t_o = t_{ff} \simeq 64.52$ ημέρες.