Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 10 Μαΐου 2017
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ______________

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 5ης Δεκεμβρίου 2016: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

Η αντίσταση από ένα ρευστό σε μια κινούμενη σφαίρα είναι $\frac{1}{2}C_D\rho S v^2$, όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, v η ταχύτητα της σφαίρας, $S = \pi\left(\frac{L}{2}\right)^2$ η επιφάνειά της με L τη διάμετρό της. Ο συντελεστής $C_D = 0.4 + \frac{24}{Re}$ είναι συνάρτηση του αριθμού Reynolds $Re = \frac{\rho L v}{\eta}$, όπου η το ιξώδες του ρευστού. Έτσι η αντίσταση προκύπτει ανάλογη της ταχύτητας $F = 3\pi\eta L v$ για μικρούς αριθμούς Reynolds και ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας $F = 0.05\pi\rho L^2 v^2$ για μεγάλους αριθμούς Reynolds.

Θέλουμε να βρούμε σε πόση απόσταση σταματά μια σφαίρα από πιστόλι μέσα στο νερό, για το οποίο $\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ και $\eta = 10^{-3}\ \mathrm{N\,s/m^2}$. Η σφαίρα έχει μάζα $m = 15.6$ g, διάμετρο $L = 10.9$ mm και αρχική ταχύτητα $v_0 = 436$ m/s.

(α) Βρείτε τον αριθμό Reynolds και επιλέξτε την κατάλληλη μορφή δύναμης αντίστασης μεταξύ των $F = 3\pi\eta L v$ και $F = 0.05\pi\rho L^2 v^2$.

(β) Βρείτε την ταχύτητα συναρτήσει της απόστασης από την αρχική θέση θεωρώντας αμελητέο το βάρος.

(γ) Σε πόση απόσταση η ταχύτητα υποδιπλασιάζεται;

(δ) Πόσος χρόνος έχει περάσει μέχρι να υποδιπλασιαστεί η ταχύτητα;

(ε) Θα περάσει η σφαίρα τα γεμάτα με νερό μπαλόνια; (http://www.natgeotv.com/uk/street-genius/videos/bulletproof-balloons)

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

Σώμα μάζας m κινείται δεμένο σε μη-ιδανικό ελατήριο. Η μόνη δύναμη που του ασκείται είναι η δύναμη επαναφοράς από το ελατήριο, η οποία όταν το σώμα απέχει απόσταση x από τη θέση φυσικού μήκους είναι $F = -kx - \lambda x^3$, όπου k και λ θετικές σταθερές.

(α) Βρείτε και σχεδιάστε την δυναμική ενέργεια $V(x)$, θεωρώντας ότι $V(0) = 0$.

(β) Ποια η ενέργεια αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι D; Ποια είναι η αντίστοιχη τροχιά στο διάγραμμα φάσης;

(γ) Αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι D και η σταθερά λ είναι «μικρή», ποια η διαφορά της περιόδου από την περίοδο σε ιδανικό ελατήριο $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$; Υπόδειξη: Στο σχετικό ολοκλήρωμα θα βοηθήσει η αντικατάσταση $x = D\cos u$.

Δίνεται το ανάπτυγμα $(1+\epsilon)^\nu \approx 1 + \nu\epsilon$ για $|\epsilon| \ll 1$.

★ (δ) Γράψτε την περίοδο για οποιαδήποτε τιμή της λ (όχι απαραίτητα «μικρής») χρησιμοποιώντας το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους $K(\xi) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2 u}}$, το οποίο σε μορφή σειράς γράφεται $K(\xi) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \xi^{2n} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\xi^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\xi^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\xi^6 + \ldots\right]$.

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

Θεωρείστε το σύστημα Γης–Σελήνης, όπου η Σελήνη μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από τη Γη με τροχιακή στροφορμή L και συχνότητα περιφοράς γύρω από τη Γη Ω. Η Γη έχει ιδιοπεριστροφή (spin) $S = I\omega$ όπου $I = 2MR^2/5$ είναι η ροπή αδράνειας της Γης, R η ακτίνα της, η μάζα της είναι $M = 61.5m$ και ω είναι η συχνότητα περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της. Η ιδιοπεριστροφική ενέργεια της Γης είναι ίση με $I\omega^2/2$ ενώ

η ιδιοπεριστροφική ενέργεια της Σελήνης είναι αμελητέα.
(α) Η ολική στροφορμή του συστήματος $J = L + S$ διατηρείται καθώς το σύστημα εξελίσσεται στο χρόνο λόγω των παλιρροιακών δυνάμεων της Σελήνης στη Γη. Με δεδομένο ότι η ιδιοπεριστροφή της Γης επιβραδύνεται λόγω των παλιρροιακών δυνάμεων της Σελήνης, εξηγείστε τι αυτό συνεπάγεται για την απόσταση Γης - Σελήνης και την τροχιακή στροφορμή της Σελήνης γύρω από τη Γη.
(β) Γράψτε τη συνολική ενέργεια του συστήματος Γης - Σελήνης σαν συνάρτηση της συχνότητας Ω περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη, $E = E(\Omega)$ λαμβάνοντας υπόψη και τον 3ο νόμο του Kepler.
(γ) Υπολογίστε την ποσότητα $dE(\Omega)/d\Omega$ και βρείτε αν η συνολική ενέργεια Ε έχει ακρότατο και για ποιά σχέση των συχνοτήτων Ω και ω αυτό συμβαίνει.
(δ) Βρείτε αν αυτό το ακρότατο της ενέργειας είναι ελάχιστο ή μέγιστο, λαμβάνοντας υπόψη ότι η σημερινή απόσταση της Σελήνης είναι 384.000 km και η ακτίνα της Γης 6371 km.
(ε) Βρείτε τον ρυθμό αύξησης της απόστασης Γης–Σελήνης συναρτήσει της επιβράδυνσης της Γης $\dot{\omega}$ και των ω, S και L.

Θέμα 4^{o}:

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = -k\vec{r}$ όπου $k > 0$ είναι μια θετική σταθερά και $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου.
(α) Δείξτε ότι η κίνηση του σωματιδίου είναι επίπεδη.
(β) Βρείτε τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου για τις αρχικές ($t = 0$) συνθήκες : $x = a, y = 0, V_x = 0, V_y = V$.
(γ) Δείξτε ότι η τροχιά είναι ελλειπτική.
(δ) Βρείτε την περίοδο της τροχιάς.
(ε) Η κίνηση του σωματιδίου υπακούει στον 3ο νόμο του Kepler;

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^{ο}:

(α) Αρχικά $Re = \dfrac{\rho L v_0}{\eta} = 4 \times 10^6 \gg 1$ και παραμένει $\gg 1$ πρακτικά σε όλη την κίνηση. Άρα $C_D = 0.4$ και $F = 0.05\pi\rho L^2 v^2$.

(β) $m\dot{v} = -0.05\pi\rho L^2 v^2$. Με $\dot{v} = v\dfrac{dv}{dx}$ έχουμε $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{0.05\pi\rho L^2}{m}v$, ή αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές στο σύστημα SI, $\dfrac{dv}{dx} = -1.196v \Leftrightarrow \displaystyle\int_{436}^{v} \frac{dv}{v} = -1.196 \int_0^x dx \Leftrightarrow v = 436\ e^{-1.196x}$ (SI).

(γ) $v = \dfrac{v_0}{2} \Leftrightarrow e^{1.196x} = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 2}{1.196} = 0.58$ m.

(δ) $t = \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{v} = \int_0^{0.58} \frac{1}{436} e^{1.196x} dx = \frac{1}{436 \times 1.196}\left(e^{1.196\times 0.58} - 1\right) = 1.9 \times 10^{-3}$ SI, δηλ. 1.9 χιλιοστά του δευτερολέπτου.

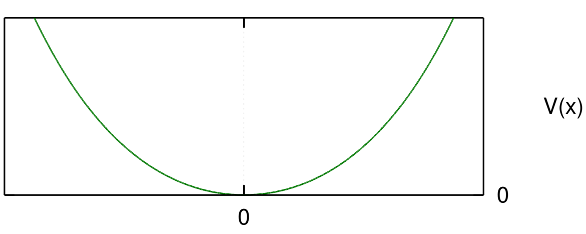
Θα μπορούσαμε να βρούμε την $v(t)$ κατευθείαν από το νόμο Νεύτωνα $m\dot{v} = -0.05\pi\rho L^2 v^2 \Leftrightarrow \dfrac{dv}{v^2} = -1.196\ dt$ και ολοκληρώνοντας $-\dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{436} = -1.196t$. Θέτοντας $v = 436/2$ βρίσκουμε το χρόνο υποδιπλασιασμού $t = \dfrac{1}{436 \times 1.196} = 1.9 \times 10^{-3}$ s.

(ε)

Θέμα 2^{ο}:

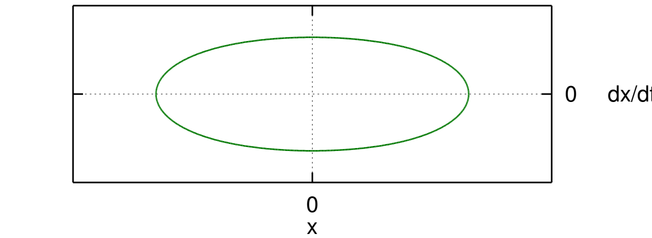
(α) $V(x) = -\displaystyle\int_0^x F(x)\ dx = \frac{kx^2}{2} + \frac{\lambda x^4}{4}$.

Είναι άρτια, έχει μηδενικό ελάχιστο στο $x = 0$ και είναι αύξουσα στο $x > 0$ με $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$.



(β) $E = V(D) = \dfrac{kD^2}{2} + \dfrac{\lambda D^4}{4}$.

Η εξίσωση που περιγράφει την καμπύλη φάσης είναι $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} + \dfrac{\lambda x^4}{4} = \dfrac{kD^2}{2} + \dfrac{\lambda D^4}{4}$.



(γ) Η περίοδος $T = 4\displaystyle\int_0^D \frac{dx}{\dot{x}} = 4\int_0^D \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}}$

$$= 4\int_0^D \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{kD^2}{2} + \frac{\lambda D^4}{4} - \frac{kx^2}{2} - \frac{\lambda x^4}{4}\right)}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^D \frac{dx}{\sqrt{(D^2 - x^2)\left[1 + \frac{\lambda}{2k}(D^2 + x^2)\right]}}.$$

Η αντικατάσταση $x = D\cos u$, $dx = -D\sin u\ du$ δίνει $T = 4\sqrt{\dfrac{m}{k}}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 + \frac{\lambda D^2}{2k}(1 + \cos^2 u)}}$.

Χρησιμοποιώντας το δοσμένο ανάπτυγμα για $\epsilon = \dfrac{\lambda D^2}{2k}(1 + \cos^2 u) \ll 1$ και $\nu = -1/2$, είναι

$$T \approx 4\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^{\pi/2}\left[1 - \frac{\lambda D^2}{4k}(1 + \cos^2 u)\right] du$$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{k}}\left[u - \frac{\lambda D^2}{4k}\left(\frac{3u + \sin u \cos u}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} \Leftrightarrow$$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}\left(1 - \dfrac{3\lambda D^2}{8k}\right)$. Άρα η περίοδος είναι μικρότερη από την $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ κατά $\dfrac{3\lambda D^2}{8k}T_0$.

(δ) Η $T = 4\sqrt{\dfrac{m}{k}}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 + \frac{\lambda D^2}{2k}(2 - \sin^2 u)}} = 4\sqrt{\frac{m}{k + \lambda D^2}}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{\lambda D^2}{2k + 2\lambda D^2}\sin^2 u}}$ γράφεται $T = 4\sqrt{\dfrac{m}{k + \lambda D^2}}\ K\left(\sqrt{\dfrac{\lambda D^2}{2k + 2\lambda D^2}}\right) = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k + \lambda D^2}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\left(\frac{\lambda D^2}{2k + 2\lambda D^2}\right)^n$.

Θέμα 3ο:

(α) Στο σύστημα Γης - Σελήνης, η παλιρροιακή τριβή προκαλεί μιά επιβράδυνση της ιδιοπεριστροφής της Γης. Επειδή όμως η συνολική στροφορμή $J = L + S$ του συστήματος Γης - Σελήνης διατηρείται, εάν υποθέσουμε ότι η αλληλεπίδραση των σωμάτων αυτών με άλλα ουράνια σώματα είναι αμελητέα, θα έχουμε αύξηση της τροχιακής στροφορμής L της Σελήνης γύρω από τη Γη, με αποτέλεσμα να αυξάνει η απόσταση των δύο σωμάτων.
Συγκεκριμένα, επειδή η βαρυτική δύναμη είναι και η κεντρομόλος της κυκλικής κίνησης:

$$m\Omega^2 r = \frac{GMm}{r^2} \;\Rightarrow\; \Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}\,,$$

όπου m, M οι μάζες Σελήνης, Γης, r η απόστασή τους και Ω η γωνιακή ταχύτητα γύρω από το κοινό ΚΜ του συστήματος. Έτσι η τροχιακή στροφορμή της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι:

$$L = mr^2\Omega = mr^2\sqrt{\frac{GM}{r^3}} = m\sqrt{GMr}\,.$$

Επομένως, καθώς η L αυξάνει και η απόσταση r Γης - Σελήνης αυξάνει.

(β) Έστω S το σπιν της Γης, $S = I\omega$ όπου I η ροπή αδράνειάς της και ω η ιδιοσυχνότητα περιστροφής της. Παράλληλα η Σελήνη έχει τροχιακή στροφορμή $L = m\Omega r^2$, όπου Ω είναι η συχνότητα περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη. Λόγω όμως της μικρότερης μάζας της, η ενέργεια ιδιοπεριστροφής της Σελήνης είναι αμελητέα έτσι ώστε η συνολική ενέργεια του συστήματος Γης - Σελήνης να είναι,

$$E = \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}I\omega^2\,.$$

Επειδή λόγω του νόμου του Κέπλερ έχουμε $(GM\Omega)^{2/3} = \Omega^2 r^2$,

$$E(\Omega,\omega) = -\frac{1}{2}m(GM\Omega)^{2/3} + \frac{1}{2}I\omega^2\,.$$

Λόγω απουσίας εξωτερικών ροπών, η ολική στροφορμή του συστήματος $J = L + S$ διατηρείται,

$$J = I\omega + m(GM)^{2/3}\Omega^{-1/3}\,.$$

Δλδ,

$$dJ = 0\,, \quad I d\omega = \frac{m}{3}(GM)^{2/3}\Omega^{-4/3}d\Omega\,.$$

Επομένως,

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{1}{3}m(GM)^{2/3}\Omega^{-1/3}(\frac{\omega}{\Omega} - 1) = \frac{1}{3}mr^2(\omega - \Omega)\,.$$

Θεωρώντας την ενέργεια E σαν συνάρτηση μόνον του Ω, ένα ακρότατο της E επιτυγχάνεται όταν $\omega = \Omega$, δηλαδή όταν,

$$\Omega = \frac{L}{mr^2} = \frac{S}{I} = \omega\,.$$

(γ) Για να δούμε αν το ακρότατο είναι ελάχιστο υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της $E(\Omega)$,

$$\frac{d^2E}{d\Omega^2} = \frac{2}{3}mr(\omega - \Omega)\frac{dr}{d\Omega} + \frac{1}{3}mr^2(\frac{d\omega}{d\Omega} - 1)\,.$$

Αλλά,

$$r = (GM)^{1/3}\Omega^{-2/3}\,, \qquad \frac{dr}{d\Omega} = -\frac{2}{3}\frac{r}{\Omega}$$

$$\frac{d^2E}{d\Omega^2} = \frac{mr^2}{9}\Big[4(1 - \frac{\omega}{\Omega}) + \frac{mr^2}{I} - 3\Big]\,.$$

Για $\omega = \Omega$, θα επιτευχθεί η ελαχιστοποίηση της ενέργειας E, εφόσον,

$$\frac{d^2E}{d\Omega^2} > 0\,, \quad \text{όταν} \quad \frac{mr^2}{I} = \frac{5}{2}\frac{mr^2}{MR^2} > 3\,.$$

$$\frac{5}{6}\frac{m}{M}\frac{r^2}{R^2} > 1\,, \quad \frac{r}{R} > \frac{5\times 81.5}{6}\,, \quad \frac{r}{R} \gtrsim 10\,.$$

Η απαίτηση αυτή ήδη ικανοποιείται σήμερα και πολύ περισσότερο όταν θα έχει απομακρυνθεί η Σελήνη σε περίπου 1.5 φορές τη σημερινή απόσταση όταν $\omega = \Omega$.

(ε) Για τον υπολογισμό της αύξησης της απόστασης της Σελήνης γύρω από τη Γη, επειδή ισχύει ο 3ος νόμος του Kepler, $\Omega^2 r^3 = GM$ έχουμε,

$$\frac{3\dot{r}}{r} = -2\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\,,$$

Άρα,

$$\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{2\dot{\omega}}{\omega}\frac{S}{L}\,,$$

Αντικαθιστώντας $\dot{\omega} = -0.42\times 10^{-21}$ sec^{-2} και τις υπόλοιπες σταθερές, προκύπτει $\dot{r} \sim 0.2$ cm/μήνα.

Θέμα 4ο:

(α) Σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $\vec{F} = -k\vec{r}$, $\vec{r}\times\vec{F} = -k\vec{r}\times\vec{r} = 0$, και επειδή $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{V}}{dt}$ έχουμε

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{V}}{dt} = 0\,,$$

ή,
$$\frac{d(\vec{r}\times\vec{V})}{dt}=\vec{V}\times\vec{V}+\vec{r}\times\frac{d\vec{V}}{dt}=0\,.$$
Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση παίρνουμε,
$$\vec{r}\times\vec{V}\equiv\frac{\vec{L}}{m}\,,$$
όπου το $\vec{L}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Έτσι,
$$\vec{r}\cdot\vec{L}=\vec{r}\cdot\vec{r}\times\vec{V}=0\,,$$
δλδ το διάνυσμα $\vec{r}$ είναι κάθετο στο σταθερό διάνυσμα $\vec{L}$, δλδ το $\vec{r}$ ευρίσκεται πάνω σε ένα σταθερό επίπεδο που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{L}$. Έτσι, αποδεικνύεται ότι η κίνηση του σωματιδίου είναι επίπεδη.

(β) Η εξίσωση της κίνησης του σωματιδίου $m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}=-k\vec{r}$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες δίνει,
$$\ddot{x}+\omega^2 x=0\,,\quad \ddot{y}+\omega^2 y=0\,,$$
με $\omega^2=k/m$ και με γενική λύση,
$$x=C_1\sin(\omega t)+C_2\cos(\omega t)\,,$$
$$y=C_3\sin(\omega t)+C_4\cos(\omega t)\,.$$
Για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες οι σταθερές C_1, C_2, C_3 και C_4 προσδιορίζονται και η λύση είναι,
$$x=a\cos(\omega t)\,,\quad y=\frac{V}{\omega}\sin(\omega t)\,.$$
(γ) Οι προηγούμενες εξισώσεις συνδυάζονται και απαλείφοντας τον χρόνο δίνουν την γνωστή εξίσωση μιας έλλειψης
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$
με $b=\dfrac{V}{\omega}=\sqrt{\dfrac{m}{k}}V$.

(δ) Όταν ο χρόνος t αυξάνει κατά Τ όπου $\sqrt{\frac{k}{m}}T=2\pi$, το σωματίδιο επιστρέφει στο ίδιο σημείο της τροχιάς του. Επομένως η περίοδος της τροχιάς Τ είναι,
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

(ε) Ο 3ος νόμος του Κέπλερ απαιτεί ο λόγος του τετραγώνου της περιόδου προς τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς να είναι σταθερός και ανεξάρτητος της μάζας του σωματιδίου ή των αρχικών συνθηκών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο λόγος αυτός είναι,
$$\frac{(\text{περίοδος})^2}{(\text{μεγάλος ημιάξονας})^3}=\frac{4\pi^2 m}{ka^3}\quad\text{αν}\quad a>b$$
και
$$\frac{(\text{περίοδος})^2}{(\text{μεγάλος ημιάξονας})^3}=\frac{4\pi^2}{V^3}\sqrt{\frac{k}{m}}\quad\text{αν}\quad a<b\,.$$
δλδ, ο λόγος του τετραγώνου της περιόδου προς τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς εξαρτάται από τη μάζα m και το a, ή τα m και V και δεν είναι σταθερός. Επομένως, ο 3ος νόμος του Κέπλερ δεν ισχύει.