Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 24 Ιανουαρίου 2017
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, AM: ______________

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 5ης Δεκεμβρίου 2016: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

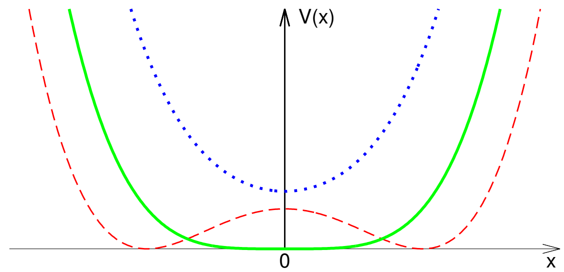
Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1^o:

Έστω ιδανικό εκκρεμές, δηλ. σημειακό σώμα μάζας m δεμένο σε αβαρές, μη εκτατό νήμα μήκους R το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερό. Στο σώμα εκτός του βάρους mg και της τάσης του νήματος ασκείται και αντίσταση αέρα ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, δηλ. $F_a = \dfrac{m\lambda}{2R}v^2$, όπου λ σταθερά. Το σώμα ξεκινά από το κατώτερο σημείο με οριζόντια ταχύτητα v_0.
(α) Γράψτε το νόμο Νεύτωνα και αναλύστε τον σε πολικές συντεταγμένες για να βρείτε την διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $\dfrac{v^2}{2gR} = f(\phi)$, θεωρούμενη συνάρτηση της γωνίας ϕ που διαγράφει το νήμα.
(β) Ποια η ταχύτητα σε κάθε θέση όσο το σώμα ανεβαίνει;
(γ) Ποια πρέπει να είναι η v_0 ώστε το σώμα να φτάσει στο ανώτερο σημείο χωρίς να χαλαρώσει το νήμα;
Δίνεται ότι η γενική λύση της $\dfrac{dy}{dx} + \lambda y = -\sin x$ είναι η $y = De^{-\lambda x} + \dfrac{\cos x - \lambda \sin x}{1+\lambda^2}$.
Επίσης δίνεται η μορφή της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (\varpi\ddot{\phi} + 2\dot{\varpi}\dot{\phi})\hat{\phi}$.

Θέμα 2^o:

Σώμα μάζας $m = 1$ και φορτίου $q = 1$ κινείται σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = 2x\hat{z}$ (σε κατάλληλες μονάδες). Αρχικά (για $t = 0$) βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_0 = x_0\hat{x} + y_0\hat{y}$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{x} + v_{0y}\hat{y}$.
(α) Δείξτε ότι οι συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$ συνεπάγονται τα ακόλουθα:
(α$_1$) Η κίνηση γίνεται στο επίπεδο $z = 0$.
(α$_2$) Η v_y μπορεί να εκφραστεί σαν $v_y(x)$ (δηλ. σαν συνάρτηση της συντεταγμένης x, την οποία και να βρείτε).
(α$_3$) Η κίνηση ανάγεται σε μονοδιάστατη $\ddot{x} = F(x)$ (βρείτε την «δύναμη» $F(x)$).
(β) Δείξτε ότι το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = E$ είναι ισοδύναμο με $\dfrac{v^2}{2} =$ σταθερά, δηλ. η «δυναμική ενέργεια» είναι η $V(x) = \dfrac{[v_y(x)]^2}{2}$.
Δείξτε επίσης ότι η $V(x)$, ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες, έχει τη μορφή μίας από τις καμπύλες του ακόλουθου σχήματος.



(γ) Έστω οι αρχικές συνθήκες είναι $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 > 0$, $v_{0y} = 0$.
(γ$_1$) Δείξτε ότι στην περίπτωση αυτή η «δυναμική ενέργεια» είναι $V(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{2}$. Ποια από τις καμπύλες του παραπάνω σχήματος αντιστοιχεί σε αυτή την $V(x)$;
(γ$_2$) Περιγράψτε την κίνηση στην x κατεύθυνση ανάλογα με την τιμή της αρχικής ταχύτητας.
★ (γ$_3$) Για μικρές τιμές της αρχικής ταχύτητας v_0 βρείτε την $x(t)$ και στη συνέχεια την $y(t)$.

Θέμα 3^o:

(α) Δείξτε ότι η εξίσωση μιας έλλειψης με μικρό ημιάξονα b, εκκεντρότητα e, κέντρο συμμετρίας Ο στην αρχή του συστήματος Oxy και μεγάλο ημιάξονα πάνω στον άξονα Ox είναι :
$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}\,,$$
όπου ρ είναι η απόσταση τυχόντος σημείου $\Sigma(x, y)$ της έλλειψης από το κέντρο Ο και θ η γωνία του άξονα Ox με το ΟΣ=ρ.
(β) Θεωρείστε ότι η ελλειπτική αυτή τροχιά διαγράφεται από ένα σωματίδιο μάζας m σε ένα πεδίο κεντρικών δυνάμεων με κέντρο το Ο.
Δείξτε ότι η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι ελκτική και ανάλογη της απόστασης ρ από το κέντρο Ο, $F(\rho) = -k\rho$. Υπολογίστε τη σταθερά k για δεδομένη στροφορμή L.
(γ) Δείξτε ότι η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι :
$$E = \frac{1}{2}k\alpha^2(2 - e^2)\,,$$

όπου α ο μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς.

(δ) Δείξτε ότι αν αρχικά $\rho|_{t=0} = \alpha$ και $\theta|_{t=0} = 0$ οι χρονικές εξαρτήσεις της γωνίας $\theta(t)$ και της απόστασης $\rho(t)$ δίδονται από τις σχέσεις :

$$\tan\theta = \sqrt{1-e^2}\ \tan(\omega t)\,,$$

$$\rho = \alpha\ \sqrt{1-e^2\sin^2(\omega t)}\,,$$

με $\omega^2 = k/m$.

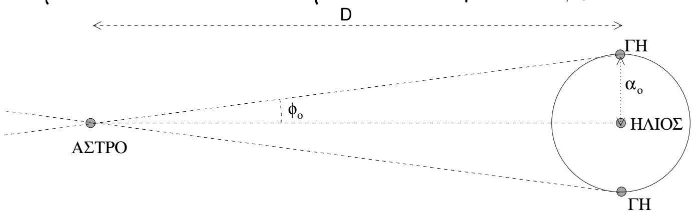
Θα χρειαστείτε ένα από τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{1-e^2\cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{1-e^2}},$$

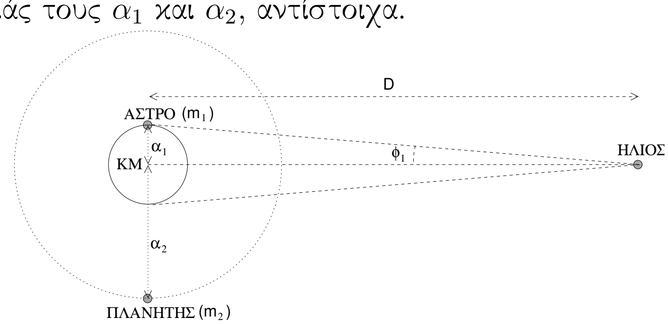
$$\int \frac{dz}{\sqrt{cz^2+bz+a}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\arccos\frac{2cz+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + \text{σταθερά}.$$

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

Ένα κοντινό αστέρι έχει παράλλαξη $\phi_o = 0.5''$, δλδ, η γωνία υπό την οποία φαίνεται από το άστρο η τροχιά της Γης απόστασης α_o γύρω από τον Ήλιο είναι μισό δευτερόλεπτο τόξου, ή, αλλιώς, καθώς η Γη περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο το άστρο φαίνεται να μετακινείται στον ουρανό κατά γωνία $2\phi_o$.



Επιπρόσθετα όμως, παρατηρείται ότι η θέση του άστρου στον ουρανό εκτελεί μια μικρή ταλάντωση με γωνιακό πλάτος $\phi_1 = 0.01''$ και περίοδο T. Υποθέτουμε ότι η μικρή αυτή ταλάντωση της θέσης του άστρου οφείλεται στην ύπαρξη κάποιου πλανήτη, ο οποίος περιφέρεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας α γύρω απο τον αστέρα. Κατά τα γνωστά, το άστρο μάζας m_1 και ο πλανήτης μάζας m_2 κινούνται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους με ακτίνες της τροχιάς τους α_1 και α_2, αντίστοιχα.



(α) Δείξτε ότι η μάζα m_2 του πλανήτη ως προς τη μάζα του Ήλιου $M_\odot$ δίδεται από τη σχέση :

$$\frac{m_2}{M_\odot} = \frac{\phi_1}{\phi_o}\left(\frac{MT_o}{M_\odot T}\right)^{2/3}\,.$$

όπου $M = m_1 + m_2$ είναι η συνολική μάζα του αστέρα και του πλανήτη, $T_o = 1$ έτος και T η περίοδος της κίνησης του κάθε σώματος γύρω από το κοινό κέντρο μάζας.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $\phi_1/\phi_o = a_1/a_o$.

(β) Να υπολογισθεί η μάζα του πλανήτη m_2 αν χρησιμοποιηθούν τα εξής παρατηρησιακά δεδομένα, $M = 0.25M_\odot$, $T = 16$ έτη.

(γ) Αν δεν είχαμε υποθέσει ότι η τροχιά του πλανήτη είναι κυκλική, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τη μάζα του πλανήτη σε σχέση με τον προηγούμενο υπολογισμό ;

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) Νόμος Νεύτωνα : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - F_a \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Σε πολικές συντεταγμένες στο σύστημα με άξονα x κατακόρυφο προς τα κάτω και y οριζόντιο προς την αρχική φορά κίνησης, γράφεται $mR\ddot{\phi}\hat{\phi} - m\dot{\phi}^2 R\hat{\varpi} = mg\cos\phi\hat{\varpi} - mg\sin\phi\hat{\phi} - T\hat{\varpi} - \dfrac{m\lambda}{2R}|\vec{v}|\vec{v}$, $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$.

Με $\ddot{\phi} = \dfrac{d\dot{\phi}}{d\phi}\dot{\phi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\dot{\phi}^2}{d\phi} = \dfrac{1}{2R^2}\dfrac{dv^2}{d\phi}$, όπου $\dot{\phi} = |\vec{v}|/R$ (στο ανέβασμα είναι $\dot{\phi} > 0$), η $\hat{\phi}$ συνιστώσα δίνει $\dfrac{df}{d\phi} + \lambda f = -\sin\phi$.

(β) Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται $f = De^{-\lambda\phi} + \dfrac{\cos\phi - \lambda\sin\phi}{1+\lambda^2}$.

$f|_{\phi=0} = \dfrac{v_0^2}{2gR}$ οπότε $D = \dfrac{v_0^2}{2gR} - \dfrac{1}{1+\lambda^2}$ και σε κάθε θέση $\dfrac{v^2}{2gR} = \left(\dfrac{v_0^2}{2gR} - \dfrac{1}{1+\lambda^2}\right)e^{-\lambda\phi} + \dfrac{\cos\phi - \lambda\sin\phi}{1+\lambda^2}$.

(γ) Η ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει σε κάθε θέση $T = \dfrac{mv^2}{R} + mg\cos\phi$. Όσο το σώμα ανεβαίνει τόσο η ταχύτητα όσο και το $\cos\phi$ ελαττώνονται, οπότε προφανώς κατά το ανέβασμα η τάση παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο ανώτερο σημείο. Αυτό φαίνεται και από την παράγωγο της τάσης $\dfrac{d}{d\phi}\left(\dfrac{T}{mg}\right) = \dfrac{d}{d\phi}(2f + \cos\phi) = 2\dfrac{df}{d\phi} - \sin\phi = -2\lambda f - 3\sin\phi$ η οποία είναι < 0 για $\phi \in [0, \pi]$.

Οριακά λοιπόν στο ανώτερο σημείο είναι $T = 0$, οπότε μόνο το βάρος παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, δηλ. $\dfrac{mv^2|_{\phi=\pi}}{R} = mg \Leftrightarrow f|_{\phi=\pi} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{v_0^2}{2gR} - \dfrac{1}{1+\lambda^2}\right)e^{-\lambda\pi} - \dfrac{1}{1+\lambda^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2gR}\sqrt{\dfrac{1}{1+\lambda^2} + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1+\lambda^2}\right)e^{\lambda\pi}}$. Αυτή είναι η ελάχιστη τιμή της v_0 για να μην χαλαρώσει το νήμα στο ανέβασμα.

Θέμα 2ο:

(α) Οι συνιστώσες της $\vec{a} = 2x\vec{v} \times \hat{z}$ είναι $\ddot{x} = 2x\dot{y}$, $\ddot{y} = -2x\dot{x}$, $\ddot{z} = 0$.

(α$_1$) Η $\hat{z}$ συνιστώσα δίνει $z = z_0 + v_{0z}t$ με τις σταθερές ολοκλήρωσης z_0 και v_{0z} να μηδενίζονται από τις αρχικές συνθήκες $z|_{t=0} = 0$, $\dot{z}|_{t=0} = 0$. Άρα $z = 0$.

(α$_2$) Η $\hat{y}$ συνιστώσα ολοκληρώνεται σε $\dot{y} + x^2 = C =$ σταθερά. Η τιμή της σταθεράς βρίσκεται από τις αρχικές συνθήκες.
Άρα $v_y(x) = C - x^2$ με $C = v_{0y} + x_0^2$.

(α$_3$) Η $\hat{x}$ συνιστώσα, αντικαθιστώντας την $v_y(x)$, γράφεται $\ddot{x} = F(x)$ με $F(x) = -2x(x^2 - C)$.

(β) Η εξίσωση κίνησης $\ddot{x} = F(x)$ είναι ισοδύναμη με ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = E$, όπου $V = -\displaystyle\int F(x)dx = \dfrac{(x^2 - C)^2}{2}$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά). Το ολοκλήρωμα είναι ισοδύναμο με τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας (η οποία ισχύει αφού το έργο της δύναμης από το μαγνητικό πεδίο – η οποία είναι κάθετη στην κίνηση – είναι μηδενικό), αφού $\dfrac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} = \dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{(x^2 - C)^2}{2} = E =$ σταθερά.

Το γράφημα της δυναμικής ενέργειας εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου C. Είναι $V = \dfrac{(x^2 - C)^2}{2}$, $V' = 2x(x^2 - C)$, $V'' = 6x^2 - 2C$.

Αν $C > 0$ υπάρχουν τρία τοπικά ακρότατα, τα ελάχιστα $x = \pm\sqrt{C}$ στα οποία $V_{\min} = 0$ και το τοπικό μέγιστο $x = 0$ στο οποίο $V_{\max} = C^2/2$. Η $V(x)$ είναι άρτια συνάρτηση οπότε αρκεί η μελέτη στα θετικά x. Είναι φθίνουσα στο $0 < x < \sqrt{C}$ και αύξουσα στο $\sqrt{C} < x < +\infty$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$. Το γράφημα της $V(x)$ αντιστοιχεί στην κόκκινη (διακεκομμένη) καμπύλη.

Αν $C = 0$ υπάρχει ένα ελάχιστο το $x = 0$ στο οποίο $V_{\min} = 0$. Η $V(x)$ είναι αύξουσα στο $0 < x < +\infty$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$. Το γράφημα της $V(x)$ αντιστοιχεί στην πράσινη (συνεχή) καμπύλη.

Αν $C < 0$ υπάρχει ένα ελάχιστο το $x = 0$ στο οποίο $V_{\min} = C^2/2$. Η $V(x)$ είναι αύξουσα στο $0 < x < +\infty$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$. Το γράφημα της $V(x)$ αντιστοιχεί στην μπλε (στικτή) καμπύλη.

(γ$_1$) Για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες $C = v_{0y} + x_0^2 = 1$ και άρα η δυναμική ενέργεια είναι $V = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{2}$. Το γράφημα της δυναμικής ενέργειας αντιστοιχεί στην κόκκινη (διακεκομμένη) καμπύλη. Υπάρχουν τρία τοπικά ακρότατα, τα ελάχιστα $x = \pm 1$ στα οποία $V_{\min} = 0$ και το τοπικό μέγιστο $x = 0$ στο οποίο $V_{\max} = 1/2$.

(γ$_2$) Η ενέργεια είναι $E = v_0^2/2$. Αν $E < V_{\max} \Leftrightarrow v_0 < 1$ το σώμα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των δύο θετικών ριζών της $V(x) = E$, δηλ. $\sqrt{1 - v_0} \le x \le$

$\sqrt{1+v_0}$.
Αν $E > V_{\max} \Leftrightarrow v_0 > 1$ το σώμα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των δύο ριζών της $V(x) = E$, δηλ. $-\sqrt{1+v_0} \le x \le \sqrt{1+v_0}$.
Στην οριακή περίπτωση $E = V_{\max} \Leftrightarrow v_0 = 1$ το σώμα αφού ανακλαστεί στο σημείο $x = \sqrt{2}$ (όπου $V(x) = E$) θα προσεγγίζει επ΄ άπειρον το τοπικό μέγιστο $x = 0$.
(γ_3) Για μικρές τιμές της αρχικής ταχύτητας το σώμα θα μείνει στη γειτονιά του τοπικού ελαχίστου $x = 1$. Με $x = 1 + \epsilon$ είναι $F = -V'(1+\epsilon) \approx -V''(1)\epsilon = -4\epsilon$ οπότε $\ddot{\epsilon} + 4\epsilon = 0$ με λύση $\epsilon = C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)$. Άρα $x = 1 + C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)$, $\dot{x} = 2C_1 \cos(2t) - 2C_2 \sin(2t)$. Από τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τελικά $x = 1 + \frac{v_0}{2} \sin(2t)$.
Για την $y(t)$ είναι $\dot{y} = C - x^2$ με $C = 1$, δηλ. $\dot{y} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \dot{y} = -v_0 \sin(2t)$ αγνοώντας όρους $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ που έχουμε αγνοήσει και στη λύση $x(t)$. Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε $y = -\frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2}\cos(2t)$.
Είναι $(x-1)^2 + (y + v_0/2)^2 = (v_0/2)^2$, δηλ. βρήκαμε την αναμενόμενη κυκλική κίνηση γύρω από το (τοπικά ομογενές) μαγνητικό πεδίο.

Θέμα 3^o:

(α) Οι συντεταγμένες (x, y) τυχόντος σημείου Σ της έλλειψης, με την αρχή Ο στο κέντρο της έλλειψης, είναι : $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Από την εξίσωση της έλλειψης σε καρτεσιανές συντεταγμένες, $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ έχουμε $\rho^2\left(\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 1$ $\Leftrightarrow \rho^2 = \frac{\alpha^2 b^2}{\alpha^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$. Αντικαθιστώντας $b^2 = \alpha^2(1-e^2)$ έχουμε $\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}$.

(β) $u = \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}}{b}$
$\longrightarrow u' = \frac{e^2\cos\theta\sin\theta}{b\sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}}$,
$\longrightarrow u'' = \frac{e^2}{b}\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta - e^2\cos^4\theta}{(1 - e^2\cos^2\theta)^{3/2}}$,
$\cos^2\theta = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 e^2}$ και $\sin^2\theta = \frac{\rho^2 e^2 - \rho^2 + b^2}{\rho^2 e^2}$ οπότε μετα από αντικατάσταση στην προηγούμενη έχουμε $u'' = \frac{\rho^4 - e^2\rho^4 - b^4}{b^4\rho}$, $u'' + u = \frac{(1-e^2)\rho^3}{b^4}$ και $F(\rho) = -\frac{L^2}{m\rho^2}(u'' + u) = -\frac{L^2}{m}\frac{1-e^2}{b^4}\rho = -k\rho$ με $k = \frac{L^2}{m}\frac{1-e^2}{b^4}$.
(γ) Η δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή είναι $V = \frac{1}{2}k\rho^2$.

Η ολική ενέργεια Ε υπολογισμένη στο περίκεντρο της έλλειψης $\rho = \alpha$ όπου $\dot{\rho} = 0$ είναι :
$E = \frac{L^2}{2m\alpha^2} + \frac{1}{2}k\alpha^2$. Αλλά $k = \frac{L^2}{m}\frac{1-e^2}{b^4} = \frac{L^2}{m\alpha^2 b^2}$, οπότε $L^2 = mk\alpha^2 b^2$. Έτσι έχουμε:
$\frac{L^2}{2m\alpha^2} = \frac{1}{2}kb^2 \Longrightarrow E = \frac{1}{2}k(\alpha^2 + b^2) = \frac{1}{2}k\alpha^2(2 - e^2)$.

(δ) Υπολογισμός της $\theta(t)$.
Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη έκφραση της στροφορμής, $L^2 = mk\alpha^2 b^2$:
$\frac{L}{m} = \sqrt{\frac{k}{m}}\alpha b = \omega\alpha^2\sqrt{1-e^2} = \rho^2\dot{\theta}$, έχουμε :
$\int_0^\theta \frac{d\theta}{1 - e^2\cos^2\theta} = \frac{\omega t}{\sqrt{1-e^2}}$.
Χρησιμοποιώντας το δεδομένο ολοκλήρωμα έχουμε,
$\int_0^\theta \frac{d\theta}{1 - e^2\cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\omega t}{\sqrt{1-e^2}}$.
Επομένως τελικά, $\tan\theta = \sqrt{1-e^2}\ \tan(\omega t)$.
Υπολογισμός της $\rho(t)$.
Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο το προηγούμενο αποτέλεσμα $\tan\theta = \sqrt{1-e^2}\ \tan(\omega t)$ έχουμε,
$\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \sqrt{1-e^2}\frac{\omega}{\cos^2\omega t}$
$\dot{\theta}(1 + \tan^2\theta) = \dot{\theta}[1 + (1-e^2)\tan^2\omega t] = \sqrt{1-e^2}\frac{\omega}{\cos^2\omega t}$, οπότε $\dot{\theta} = \frac{\sqrt{1-e^2}\ \omega}{1 - e^2\sin^2\omega t}$.
Χρησιμοποιώντας και την προηγούμενη έκφραση $\omega\alpha^2\sqrt{1-e^2} = \rho^2\dot{\theta}$ και λύνοντας ως προς ρ^2 έχουμε $\rho^2 = a^2(1 - e^2\sin^2\omega t)$.
Β΄ τρόπος: Στην $\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}$ αντικαθιστούμε $\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{1 + (1-e^2)\tan^2(\omega t)} = \frac{\cos^2(\omega t)}{1 - e^2\sin^2(\omega t)}$, οπότε $\rho^2 = \frac{b^2}{1-e^2}(1 - e^2\sin^2\omega t)$ δλδ. η ζητούμενη.

Γ΄ τρόπος: Η $\rho(t)$ μπορεί να βρεθεί και άμεσα, μέσω του ολοκληρώματος ενέργειας $\frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{L^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}k\rho^2 = E$. Αντικαθιστώντας $E = \frac{1}{2}k\alpha^2(2 - e^2)$, $L^2 = mk\alpha^2 b^2$, $b^2 = \alpha^2(1-e^2)$ και $k = m\omega^2$ προκύπτει $\dot{\rho} = \pm\omega\sqrt{(2-e^2)\alpha^2 - \rho^2 - \frac{\alpha^4(1-e^2)}{\rho^2}}$ $\Leftrightarrow$
$\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(2-e^2)\alpha^2\rho^2 - \rho^4 - \alpha^4(1-e^2)}} = \pm\omega t$.
Θέτοντας $z = \rho^2/\alpha^2$ και χρησιμοποιώντας το δεύτερο δεδομένο ολοκλήρωμα προκύπτει

$\int \frac{dz}{\sqrt{-z^2+(2-e^2)z+e^2-1}} = \pm 2\omega t \Leftrightarrow$ $\arccos\frac{-2z+2-e^2}{e^2} = \pm 2\omega t \pm C$, όπου C σταθερά. Άρα $\frac{-2z+2-e^2}{e^2} = \cos(2\omega t + C)$. Από αρχικές συνθήκες $z|_{t=0} = 1$ βρίσκουμε $C = \pi$, οπότε $\frac{-2z+2-e^2}{e^2} = -\cos(2\omega t) = 2\sin^2(\omega t) - 1$ από την οποία προκύπτει η ζητούμενη.

Θέμα 4ο:

(α) Από τη γεωμετρία των σχημάτων έχουμε, $\sin\phi_o = \frac{\alpha_o}{D}$, ή αφού η γωνία είναι μικρή $\phi_o = \frac{\alpha_o}{D} \Leftrightarrow$ $\alpha_o = D\phi_o$ και όμοια $\alpha_1 = D\phi_1$, οπότε, $\frac{\phi_1}{\phi_o} = \frac{\alpha_1}{\alpha_o}$ και η προς απόδειξη σχέση γίνεται,

$$\left(\frac{m_2}{M_\odot}\right)^3 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_o}\right)^3 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{T_o}{T}\right)^2 .$$

ή,

$$\left(\frac{T}{T_o}\right)^2 = \left(\frac{M_\odot}{m_2}\right)^3 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_o}\right)^3 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 .$$

ή,

$$\left(\frac{T}{T_o}\right)^2 = \left(\frac{M_\odot}{M}\right) \left(\frac{\alpha}{\alpha_o}\right)^3 \left(\frac{\alpha_1 M}{\alpha m_2}\right)^3$$

ή,

$$\left(\frac{T}{T_o}\right)^2 = \left(\frac{M_\odot}{M}\right) \left(\frac{\alpha}{\alpha_o}\right)^3$$

επειδή $\alpha_1 = \frac{m_2}{M}\alpha$. Η τελευταία όμως σχέση είναι ο γνωστός νόμος του Κεπλερ.

(β) Αντικαθιστώντας $M = 0.25 M_\odot$, $T = 16$ yrs, $\phi_o = 0.5''$, $\phi_1 = 0.01''$ προκύπτει, $\frac{m_2}{M_\odot} = \frac{1}{50}\left(\frac{0.25}{16}\right)^{2/3} = \frac{1}{50}\left(\frac{1}{64}\right)^{2/3} = \frac{1}{50}\left(\frac{1}{4^3}\right)^{2/3} = \frac{1}{800}$. Δλδ, ο εξωπλανήτης έχει 800 φορές μικρότερη μάζα από τον Ήλιο, δηλ., είναι της τάξεως της μάζας του Δία.

(γ) Ας υποθέσουμε ότι οι αληθινές τροχιές των δύο σωμάτων δεν είναι κυκλικές αλλά ελλειπτικές. Σε αυτή την περίπτωση, η πραγματική μάζα του πλανήτη θα ήταν μεγαλύτερη από αυτή που υπολογίσαμε υποθέτοντας κυκλικές τροχιές. Για να το κατανοήσουμε αυτό, ας υποθέσουμε ότι ο μικρός ημιάξονας της τροχιάς b είναι πολύ μικρότερος του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς α. Έστω, για παράδειγμα, ότι έχουμε ελλειπτική τροχιά της οποίας ο μεγάλος άξονας α είναι στη διεύθυνση που παρατηρούμε τον αστέρα και ο μικρός ημιάξονας b κάθετος στη διεύθυνση που παρατηρούμε τον αστέρα. Τότε το πραγματικό α_1 θα ήταν πολύ μεγαλύτερο αυτού που χρησιμοποιήσαμε με την υπόθεση της κυκλικής τροχιάς και το οποίο ισούται με το b της ελλειπτικής τροχιάς. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, το αληθινό m_2 που είναι ανάλογο του αληθινού α_1 να είναι μεγαλύτερο αυτού που υπολογίσαμε.