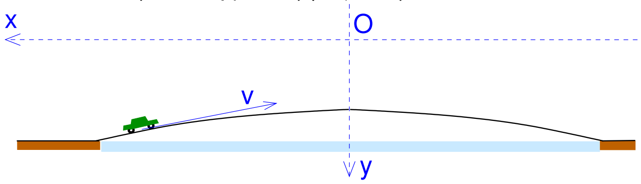
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 5 Δεκεμβρίου 2016
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Θέμα 1ο:

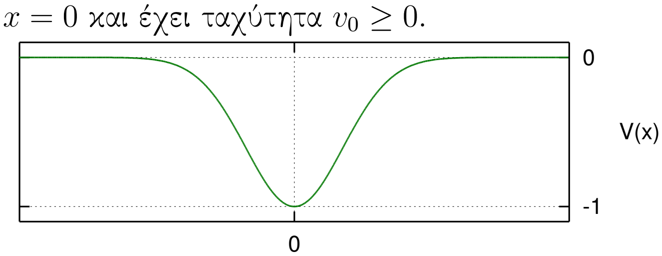
Το αυτοκίνητο του σχήματος περνά τη γέφυρα με ταχύτητα σταθερού μέτρου v. Η γέφυρα περιγράφεται από την εξίσωση $y = \cosh x$ σε κατάλληλες μονάδες, στις οποίες η μάζα του αυτοκινήτου είναι $m = 1$ και η επιτάχυνση βαρύτητας είναι $\vec{g} = \hat{y}$.



(α) Βρείτε την ταχύτητα $\vec{v}$ και την επιτάχυνση $\vec{a}$ σε κάθε θέση (σαν συναρτήσεις του x).
(β) Ποιες οι επιτρόχια και κεντρομόλος συνιστώσες της επιτάχυνσης σε κάθε θέση; Βρείτε τα μοναδιαία $\hat{\varepsilon}$ και $\hat{n}$ (στη φορά κίνησης και προς το κέντρο καμπυλότητας) σε κάθε θέση.
(γ) Ποια η δύναμη που ασκεί το αυτοκίνητο στη γέφυρα σε κάθε θέση;
Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα.
(δ) Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα για την οποία το αυτοκίνητο δεν χάνει την επαφή του με τη γέφυρα;
★ (ε) Βρείτε την θέση σαν συνάρτηση του χρόνου, θεωρώντας $t = 0$ στην ανώτερη θέση (δεχθείτε αρνητικούς χρόνους πριν την ανώτερη θέση).
Δίνονται $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$, $\text{arcsinh}\xi = \ln\left(\xi + \sqrt{1+\xi^2}\right)$.

Θέμα 2ο:

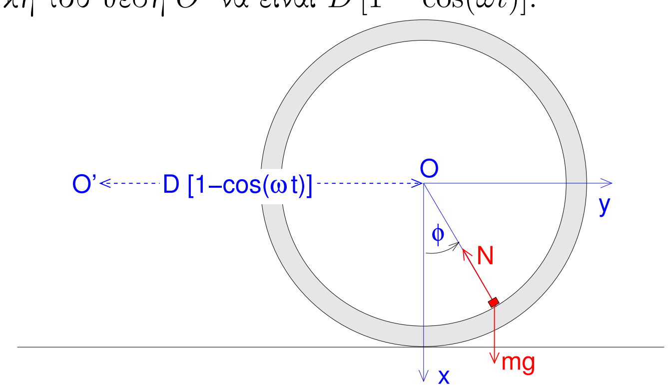
Σώμα μάζας $m = 2$ κινείται μονοδιάστατα σε πεδίο $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ με $V = -e^{-x^2}$. Αρχικά βρίσκεται στο $x = 0$ και έχει ταχύτητα $v_0 \geq 0$.



(α) Με τη βοήθεια του διαγράμματος της δυναμικής ενέργειας περιγράψτε την κίνηση για τιμές της ενέργειας (α_1) $E = -1$, (α_2) $E = -1/e$, (α_3) $E = 0$ και (α_4) $E = 1$.
(β) Σχεδιάστε στο φασικό χώρο τις τροχιές για τις περιπτώσεις του προηγούμενου ερωτήματος.
(γ) Αν η ενέργεια είναι $E = -1 + \epsilon^2$, όπου $\epsilon \ll 1$ ποια η θέση σε κάθε χρόνο;
(δ) Αν η ενέργεια του σώματος είναι $E = 1$ και ένα δεύτερο ίδιο σώμα βρίσκεται αρχικά στο x_{02} και έχει ενέργεια E_2, για ποιες τιμές της E_2 τα σώματα θα συγκρουστούν;
(ε) Αν στο σώμα ασκείται επιπλέον δύναμη αντίστασης μέτρου $2xv^2$ βρείτε που θα σταματήσει στιγμιαία το σώμα και με ποια ταχύτητα θα ξαναπεράσει από το $x = 0$.
Υπόδειξη: Βρείτε την ταχύτητα συναρτήσει της θέσης θέτοντας $v^2 = Y(X)$ με $X = x^2$.
Δίνεται ότι μια μερική λύση της $\dfrac{dY}{dX} + Y = -e^{-X}$ είναι η $Y_{\mu\varepsilon\rho} = -Xe^{-X}$.

Θέμα 3ο:

Σημειακό σώμα μπορεί να κινείται στο εσωτερικό κοίλης σφαίρας εσωτερικής ακτίνας R, υπό την επίδραση του βάρους του mg και κάθετης αντίδρασης N (τριβές δεν υπάρχουν). Αρχικά, δηλ. για $t = 0$, η σφαίρα είναι ακίνητη και το σώμα είναι επίσης ακίνητο στην κατώτερη θέση. Για $t > 0$ θέτουμε σε οριζόντια ταλαντωτική κίνηση τη σφαίρα με τρόπο ώστε η απόσταση του κέντρου της O από την αρχική του θέση O' να είναι $D\,[1 - \cos(\omega t)]$.



(α) Μελετήστε την κίνηση του σώματος στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς Oxy που κινείται με τη σφαίρα και δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{\phi} + \omega_0^2 \sin\phi = -\dfrac{D\omega^2}{R}\cos(\omega t)\cos\phi$, όπου $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$.
(β) Επιλύστε την εξίσωση αυτή στην περίπτωση που η απόσταση D είναι αρκούντως μικρή ώστε να ισχύει $|\phi| \ll 1$ σε κάθε χρόνο.
(γ) Έστω $\omega_0 = 10\omega$. Ποια η περίοδος της κίνησης και ποια η μέγιστη τιμή της γωνίας ϕ;
★ (δ) Έστω $\omega \gg \omega_0$. Βρείτε τις τιμές του λόγου $\dfrac{D\omega}{R\omega_0}$ για τις οποίες το σώμα βρίσκεται συνεχώς σε επαφή με τη σφαίρα.
Δίνεται η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες $(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (2\dot{\varpi}\dot{\phi} + \varpi\ddot{\phi})\hat{\phi}$.

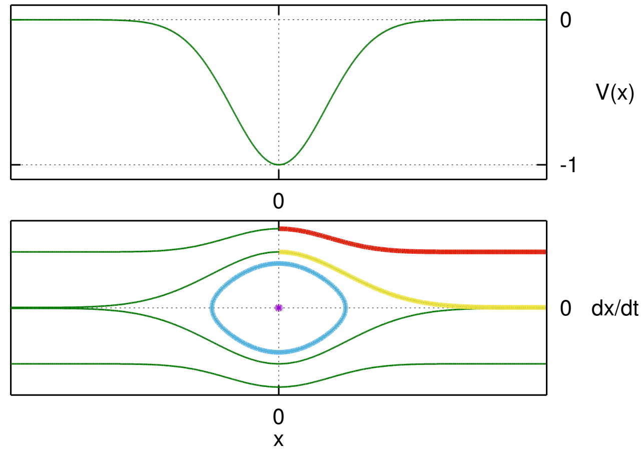
ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1$^\text{ο}$:

(α) $\vec{r} = x\hat{x} + \cosh x\hat{y}$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,(\hat{x} + \sinh x\hat{y})$.
$|\vec{v}| = v \Leftrightarrow |\dot{x}|\sqrt{1+\sinh^2 x} = v$. Είναι $\dot{x} < 0$ οπότε $\dot{x} = -\dfrac{v}{\cosh x}$ και $\vec{v} = -v\dfrac{\hat{x}+\sinh x\hat{y}}{\cosh x}$.
Παραγωγίζοντας την ταχύτητα $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dfrac{d\vec{v}}{dx}\dot{x} = -v\dfrac{-\sinh x\hat{x}+\hat{y}}{\cosh^2 x}\dot{x} = v^2\dfrac{-\sinh x\hat{x}+\hat{y}}{\cosh^3 x}$.
(β) Η επιτρόχια επιτάχυνση είναι μηδενική (αφού $\dot{v} = 0$) οπότε η κεντρομόλος είναι η συνολική επιτάχυνση, δηλ. $\vec{a}_\varepsilon = 0$, $\vec{a}_\kappa = v^2\dfrac{-\sinh x\hat{x}+\hat{y}}{\cosh^3 x}$.
$\hat{\varepsilon} = \dfrac{\vec{v}}{v} = -\dfrac{\hat{x}+\sinh x\hat{y}}{\cosh x}$, $\hat{n} = \dfrac{\vec{a}_\kappa}{|\vec{a}_\kappa|} = \dfrac{-\sinh x\hat{x}+\hat{y}}{\cosh x}$.
(Το ίδιο από $\hat{n} = \hat{\varepsilon}\times\hat{z}$.)
(γ) Στη διεύθυνση $\hat{n}$ ο νόμος Νεύτωνα γράφεται $m\vec{g}\cdot\vec{n} - N = ma_\kappa$, όπου N η κάθετη αντίδραση από τη γέφυρα στο αυτοκίνητο. Με $\vec{g} = \hat{y}$ παίρνουμε $N = \dfrac{\cosh x - v^2}{\cosh^2 x}$.
Στην $\hat{\varepsilon}$ κατεύθυνση μέσω του κινητήρα και της στατικής τριβής στα λάστιχα εξουδετερώνεται η συνιστώσα του βάρους. Η γέφυρα λοιπόν ασκεί δύναμη $T\hat{\varepsilon}$ στο αυτοκίνητο με $m\vec{g}\cdot\vec{\varepsilon} + T = m\dot{v} = 0 \Leftrightarrow T = \tanh x$.
Το αυτοκίνητο ασκεί τις αντίθετες δυνάμεις στη γέφυρα $N\hat{n} - T\hat{\varepsilon} = \dfrac{\cosh x - v^2}{\cosh^2 x}\hat{n} - \tanh x\hat{\varepsilon}$ (η πρώτη έχει φορά προς το κέντρο καμπυλότητας ενώ η δεύτερη έχει φορά αντίρροπη της κίνησης στο ανέβασμα και ομόρροπη της κίνησης στο κατέβασμα).
(δ) Για να είναι πάντα $N \geq 0$ πρέπει να είναι σε κάθε θέση $v^2 \leq \cosh x$. Αφού $\cosh x \geq 1$ πρέπει να είναι $v \leq 1$.
(ε) Ολοκληρώνοντας την σχέση $\dot{x} = -\dfrac{v}{\cosh x} \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^x \cosh x\, dx = -v\int_0^t dt \Leftrightarrow \sinh x = -vt \Leftrightarrow x = -\operatorname{arcsinh}(vt) = -\ln\left(vt + \sqrt{1+v^2t^2}\right)$.

Θέμα 2$^\text{ο}$:

(α) $\dot{x}^2 - e^{-x^2} = E = v_0^2 - 1$.
(α$_1$) Αν $E = -1$ (οπότε $v_0 = 0$) το σώμα μένει ακίνητο στο $x = 0$.
(α$_2$) Αν $E = -1/e$ (οπότε $v_0 = \sqrt{1-1/e}$) το σώμα εκτελεί ταλάντωση. Τα ακραία σημεία είναι οι λύσεις της $V(x) = E \Leftrightarrow -e^{-x^2} = -1/e \Leftrightarrow x = \pm 1$.
(α$_3$) Αν $E = 0$ (οπότε $v_0 = 1$) το σώμα φτάνει στο $x = +\infty$ και έχει μηδενική ταχύτητα εκεί.
(α$_4$) Αν $E = 1$ (οπότε $v_0 = \sqrt{2}$) το σώμα φτάνει στο $x = +\infty$ και έχει εκεί ταχύτητα v_∞ με $v_\infty^2 + V(+\infty) = E \Leftrightarrow v_\infty = 1$.
(β)



(γ) Αν $E = -1 + \epsilon^2$ η αρχική ταχύτητα είναι $v_0 = \epsilon$ και το σώμα εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας $x = 0$. Για $|x| \ll 1$ είναι $F = -V' = -2xe^{-x^2} \approx -2x$ οπότε η εξίσωση κίνησης $m\ddot{x} = -V'$ δίνει προσεγγιστικά $\ddot{x} + x = 0$ με λύση $x = C_1\cos t + C_2\sin t$. Από τις αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = 0$, $\dot{x}|_{t=0} = v_0 = \epsilon$ βρίσκουμε τελικά $x = \epsilon\sin t$.
(δ) Αν $x_{02} < 0$ τότε αρκεί να είναι $E_2 > 1$, οπότε το δεύτερο σώμα θα καταλήξει να έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το πρώτο σε μεγάλες αποστάσεις όπου η δύναμη είναι πια ασήμαντη (συνεχώς κινούνται και τα δύο προς τα δεξιά). Κάποια στιγμή λοιπόν το δεύτερο θα φτάσει το πρώτο.
Αν $x_{02} > 0$ τότε αρκεί $E_2 < 1$ για τον ίδιο λόγο. (Ακόμα και αν $E_2 < 0$, οπότε το δεύτερο σώμα θα ανακλαστεί, θα υπάρξει σύγκρουση.)
(ε) $2\ddot{x} = -V' \mp 2xv^2$, όπου το πάνω πρόσημο αντιστοιχεί σε $xv > 0$ και το κάτω σε $xv < 0$. Με $2\ddot{x} = 2v\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{dv^2}{dx}$ και $v^2 = Y(X)$, $X = x^2$ έχουμε $\dfrac{dY}{dX} \pm Y = -e^{-X}$, δηλ. γραμμική, μη-ομογενή διαφορική εξίσωση. Δοκιμάζοντας μερική λύση ανάλογη του Xe^{-X} για το πάνω πρόσημο και ανάλογη του e^{-X} για το κάτω πρόσημο καταλήγουμε σε γενική λύση $Y = -Xe^{-X} + Ce^{-X}$ για το πάνω πρόσημο και $Y = \dfrac{1}{2}e^{-X} + De^{X}$ για το κάτω πρόσημο.
Αρχικά το σώμα θα μεταβεί σε περιοχή με $xv > 0$ στην οποία ισχύει $v^2 = -x^2e^{-x^2} + Ce^{-x^2}$. Από αρχικές συνθήκες $x = 0$, $v = v_0$ προκύπτει $C = v_0^2$, επομένως $v = \sqrt{v_0^2 - x^2}e^{-x^2/2}$. Το σώμα θα σταματήσει στιγμιαία στη θέση $x = v_0$.
Στη συνέχεια θα κινηθεί με $v < 0$ και μέχρι να φτάσει στο $x = 0$ θα είναι $xv < 0$, άρα $v^2 =$

$\frac{1}{2}e^{-x^2}+De^{x^2}$. Από αρχικές συνθήκες $x=v_0$, $v=0$ προκύπτει $D=-\frac{1}{2}e^{-2v_0^2}$, επομένως $v=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}-e^{x^2-2v_0^2}\right)}$. Όταν φτάσει στο $x=0$ το σώμα θα έχει ταχύτητα $v_1=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-e^{-2v_0^2}\right)}$.
Μετά συνεχίζεται παρόμοια κίνηση στην περιοχή $x<0$, δηλ. το σώμα θα σταματήσει στιγμιαία στη θέση $x=v_1$ και θα επιστρέψει στο $x=0$ με ταχύτητα $v_2=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-e^{-2v_1^2}\right)}$.
Το n-οστό πέρασμα από το $x=0$ γίνεται με ταχύτητα $v_n=(-1)^n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-e^{-2v_{n-1}^2}\right)}$ και μέχρι την επόμενη θέση στην οποία το σώμα σταματά στιγμιαία $x=v_n$. η ταχύτητα είναι $v=(-1)^n\sqrt{v_n^2-x^2}e^{-x^2/2}$, ενώ στην επιστροφή μέχρι το $x=0$ ισχύει $v=(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}-e^{x^2-2v_n^2}\right)}$.

Θέμα 3ο:

(α) $\vec{a}=-\vec{a}_0+\vec{g}+\vec{N}/m$ όπου $\vec{a}=-R\dot{\phi}^2\hat{\varpi}+R\ddot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a}_0=D\frac{d^2\left[1-\cos(\omega t)\right]}{dt^2}\hat{y}=D\omega^2\cos(\omega t)\hat{y}$, $\vec{g}=g\hat{x}$, $\vec{N}=-N\hat{\varpi}$.
Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα δίνει $R\ddot{\phi}=-D\omega^2\cos(\omega t)\hat{y}\cdot\hat{\phi}+g\hat{x}\cdot\hat{\phi}$ $\Leftrightarrow R\ddot{\phi}=-D\omega^2\cos(\omega t)\cos\phi-g\sin\phi$ η οποία είναι ισοδύναμη με τη ζητούμενη.
(β) Για μικρές γωνίες $\sin\phi\approx\phi$ και $\cos\phi\approx 1$, οπότε η εξίσωση κίνησης γίνεται $\ddot{\phi}+\omega_0^2\phi=-\frac{D\omega^2}{R}\cos(\omega t)$. Η γενική λύση είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς με μια μερική λύση $\phi=A\sin(\omega_0 t)+B\cos(\omega_0 t)+\frac{D\omega^2}{R(\omega^2-\omega_0^2)}\cos(\omega t)$. Αρχικά η θέση του σώματος είναι η κατώτερη, οπότε $\phi|_{t=0}=0\Leftrightarrow B=\frac{D\omega^2}{R(\omega_0^2-\omega^2)}$. Αρχικά επίσης η ταχύτητα του σώματος είναι μηδενική τόσο στο αδρανειακό όσο και στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς, αφού η σφαίρα είναι ακίνητη (ισχύει $\vec{v}=\vec{v}_a-\vec{v}_0$ όπου $\vec{v}=R\dot{\phi}\hat{\phi}$ η σχετική ταχύτητα του σώματος ως προς τη σφαίρα, $\vec{v}_a$ η απόλυτη ταχύτητα του σώματος και $\vec{v}_0=D\frac{d\left[1-\cos(\omega t)\right]}{dt}\hat{y}=D\omega\sin(\omega t)\hat{y}$ η ταχύτητα της σφαίρας). Άρα $\dot{\phi}|_{t=0}=0\Leftrightarrow A=0$. Τελικά $\phi=\frac{D\omega^2}{R(\omega_0^2-\omega^2)}\left[\cos(\omega_0 t)-\cos(\omega t)\right]$.
(γ) Αν $\omega_0=10\omega$ είναι $\phi=\frac{D}{99R}\left[\cos(10\omega t)-\cos(\omega t)\right]$.
Η περίοδος είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των δύο μερών, δηλ. $T=$ΕΚΠ$(\frac{2\pi}{\omega},\frac{2\pi}{10\omega})=\frac{2\pi}{\omega}$.
Η μέγιστη τιμή της γωνίας ϕ είναι $\frac{2D}{99R}$ και συμβαίνει όταν η ωt είναι περιττό πολλαπλάσιο του π.
(δ) Η $\hat{\varpi}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής δίνει $-R\dot{\phi}^2=g\cos\phi-\frac{N}{m}-D\omega^2\cos(\omega t)\sin\phi\Leftrightarrow$ $\frac{N}{m\omega_0^2R}=\cos\phi+\frac{\dot{\phi}^2}{\omega_0^2}-\frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos(\omega t)\sin\phi$.
Στην περίπτωση $|\phi|\ll 1$ προκύπτει

$$\frac{N}{m\omega_0^2R}=1-\frac{\phi^2}{2}+\frac{\dot{\phi}^2}{\omega_0^2}-\frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos(\omega t)\phi$$

$$=1+\left(\frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2\left[\sin^2(\omega_0 t)+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega t)\right.$$

$$-2\frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega t)+\frac{1}{2}\cos^2(\omega t)-\frac{1}{2}\cos^2(\omega_0 t)$$

$$\left.-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos^2(\omega t)+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos(\omega t)\cos(\omega_0 t)\right].$$

Παρότι ισχύει $\left(\frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2\ll 1$ (ώστε να είναι $|\phi|\ll 1$), για $\omega\gg\omega_0$ μπορεί να γίνει $N<0$.
Στην περίπτωση $\omega\gg\omega_0$ είναι $\frac{N}{m\omega_0^2R}=1+\left(\frac{D\omega}{R\omega_0}\right)^2\left[2\sin^2(\omega t)-1+\cos(\omega t)\cos(\omega_0 t)\right]$ με ελάχιστη τιμή $\frac{N_{\min}}{m\omega_0^2R}=1-2\left(\frac{D\omega}{R\omega_0}\right)^2$ (όταν $\cos(\omega t)=\pm 1$, $\cos(\omega_0 t)=\mp 1$), οπότε το σώμα δεν χάνει ποτέ την επαφή του με τη σφαίρα αν ισχύει $\frac{D\omega}{R\omega_0}<\frac{1}{\sqrt{2}}$.