Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 26 Σεπτεμβρίου 2016
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 4 Δεκεμβρίου 2015: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐ 13η ☐

Θέμα 1ο:

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση κάποιου μετεωρίτη στην ατμόσφαιρα της Γης. Θεωρούμε τη Γη και την ατμόσφαιρά της ακίνητη και την κίνηση του μετεωρίτη κατακόρυφη. Αγνοούμε το βάρος, αλλά λαμβάνουμε υπόψη την αντίσταση $F = \frac{1}{2} C_D S v^2 \rho$, με C_D σταθερά, S την επιφάνεια του μετεωρίτη, $v = \dot{z}$ την ταχύτητά του (με $v < 0$) και $\rho = \rho_0 e^{-z/H}$ την πυκνότητα της ατμόσφαιρας που είναι συνάρτηση του ύψους z (ρ_0 είναι η πυκνότητα στην επιφάνεια της Γης και H σταθερό μήκος που εκφράζει την κλίμακα ύψους). Λαμβάνουμε επίσης υπόψη ότι ο μετεωρίτης εξαχνώνεται οπότε η μάζα του και η επιφάνειά του μειώνονται με το χρόνο.

(α) Δείξτε ότι αν η μάζα που εξαχνώνεται έχει μηδενική ταχύτητα ως προς τον μετεωρίτη η εξίσωση κίνησης είναι $m \frac{dv}{dt} = F$ ή ισοδύναμα $\frac{dv}{dt} = \frac{\lambda}{H} v^2 e^{-z/H}$ όπου $\lambda = \frac{C_D S H \rho_0}{2m}$.

Υπόδειξη: Δεν είναι τετριμμένη εφαρμογή του 2ου νόμου Νεύτωνα στη μορφή $m\vec{a} = \vec{F}$ αφού έχουμε σώμα μεταβλητής μάζας.

(β) Αν κατά την εξάχνωση η μάζα και η επιφάνεια μειώνονται αλλά ο λόγος τους παραμένει σταθερός, βρείτε τη σχέση ταχύτητας–ύψους.

Θεωρήστε ότι η ταχύτητα του μετεωρίτη όταν εισέρχεται στην ατμόσφαιρα της Γης, δηλ. για $z \to \infty$, είναι v_∞ (< 0).

(γ) Ποια η ταχύτητα και η επιβράδυνση συναρτήσει της πυκνότητας της ατμόσφαιρας;

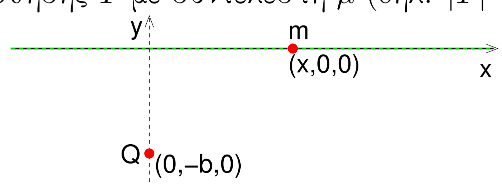
Ποια είναι η ταχύτητα τη στιγμή που η επιβράδυνση είναι μέγιστη και πόση είναι αυτή η μέγιστη τιμή;

Εφαρμόστε για $C_D S/m = 0.005 \ \mathrm{m^2/kg}$, $H = 8000 \ \mathrm{m}$, $\rho_0 = 1.2 \ \mathrm{kg/m^3}$, $v_\infty = -14000 \ \mathrm{m/s}$. Συγκρίνετε την $a_{\max}$ με την επιτάχυνση της βαρύτητας.

★ (δ) Έστω η ελάττωση της μάζας λόγω εξάχνωσης καθορίζεται από την εξίσωση $H^\star \frac{dm}{dt} = \frac{1}{2} C_H S v^3 \rho$, όπου $\frac{C_H}{C_D H^\star} = 5 \times 10^{-8} \ \mathrm{s^2/m^2}$. Ποια η μάζα του μετεωρίτη συναρτήσει της ταχύτητάς του αν αρχικά (όταν $v = v_\infty$) είναι $m = m_\infty = 150$ kg;

Θέμα 2ο:

Σώμα μάζας m και φορτίου q κινείται πάνω στον άξονα x δεχόμενο ελκτική ηλεκτρική δύναμη $\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} = -m b^3 \omega^2 \frac{x\hat{x} + b\hat{y}}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$ από ετερόσημο φορτίο Q που βρίσκεται ακίνητο στο σημείο $\vec{r}_Q = -b\hat{y}$ (έχουμε ορίσει $\omega^2 = \frac{-Qq}{4\pi\varepsilon_0 m b^3}$). Επίσης δέχεται από τον άξονα κάθετη αντίδραση $N\hat{y}$ και τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ με συντελεστή μ (δηλ. $|\vec{T}| = \mu N$).



(α) Δείξτε ότι αν αγνοήσουμε την τριβή το ολοκλήρωμα ενέργειας για την κίνηση της μάζας m είναι $\frac{mv^2}{2} + V(x) = E$ με $V(x) = -\frac{m b^3 \omega^2}{\sqrt{x^2 + b^2}}$.

Έστω η μάζα m ξεκινά από το σημείο $x = 0$ με ταχύτητα v_0 που έχει τη φορά του $\hat{x}$. Με τη βοήθεια του γραφήματος της $V(x)$ περιγράψτε την κίνηση της μάζας ανάλογα με την τιμή της v_0.

★ Ποια η $v(t)$ αν η v_0 είναι αρκούντως μικρή;

(β) Έστω η τριβή δεν είναι αμελητέα, η μάζα m ξεκινά από το σημείο $x = b$ με μηδενική ταχύτητα και καταλήγει να έχει ξανά μηδενική ταχύτητα στο σημείο $x = 0$ (χωρίς να αλλάζει φορά κίνησης). Ποιος είναι ο συντελεστής τριβής μ;

★ (γ) Δείξτε ότι στην περίπτωση με τριβή υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» $\frac{mv^2}{2} + V_\pm(x) =$ σταθ. με κατάλληλες «δυναμικές ενέργειες» $V_\pm(x)$ ($\pm$ είναι το πρόσημο της ταχύτητας, δηλ. η «δυναμική ενέργεια» είναι $V_+(x)$ αν $v > 0$ και $V_-(x)$ αν $v < 0$).

Αν $\mu = 1$ και αρχικά $x = 0$, $v_0 = \sqrt{3} b\omega$, με τη βοήθεια των $V_\pm(x)$ περιγράψτε την κίνηση της μάζας και σχεδιάστε την καμπύλη φάσης.

Δίνονται $\int \frac{d\xi}{(\xi^2 + 1)^{3/2}} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} +$ σταθ. και $\int \frac{\xi \, d\xi}{(\xi^2 + 1)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}} +$ σταθ.

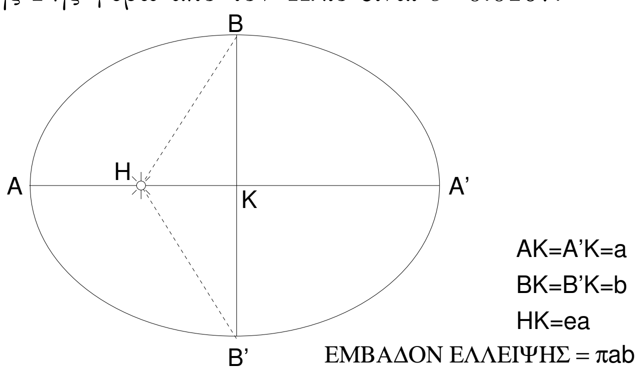
Μπορείτε να θεωρήσετε για απλούστευση κατάλληλες μονάδες στις οποίες $m = 1$, $b = 1$, $\omega = 1$.

Θέμα 3ο:

(α) Ποιοί είναι οι νόμοι του Kepler; Αποδείξτε το 2ο νόμο χρησιμοποιώντας μόνο αναλυτική γεωμετρία.

(β) Ο μεγάλος άξονας $2a$ της ελλειπτικής τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο τέμνει την τροχιά της Γης στα σημεία ΑΑ′, όπου Α είναι το περιήλιο και Α′ το αφήλιο, ενώ ο μικρός άξονας της ελλειπτικής τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο μήκους $2b$ τέμνει την τροχιά της Γης στα σημεία ΒΒ′ (βλέπε σχήμα). Με δεδομένο ότι ο χρόνος περιστροφής της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι 365 ημέρες, να υπολογισθεί ο χρόνος που η Γη κινείται από το περιήλιο Α στο σημείο Β καθώς επίσης και ο χρόνος που κινείται από το Β στο Α′.

Δίδεται ότι η εκκεντρότητα της ελλειπτικής τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι e=0.0167.



Θέμα 4ο:

Η Γη είναι κατά προσέγγιση ένα πεπλατυσμένο σφαιροειδές του οποίου η ισημερινή ακτίνα υπερβαίνει την πολική κατά περίπου 21.4 km. Επομένως η βαρυτική δυναμική ενέργεια μάζας m που κινείται στο πεδίο της περιέχει μιά διόρθωση λόγω ενός τετραπολικού όρου,

$$V = -\frac{k}{r} - \frac{c}{3r^3}\,,$$

όπου $k = GM_{\oplus}m$ και c μια μικρή σταθερά.

(α) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα ω και τη στροφορμή L μιας κυκλικής τροχιάς ακτίνας α.

(β) Δείξτε ότι η γωνιακή συχνότητα ω_r των μικρών ακτινικών ταλαντώσεων γύρω από αυτή την κυκλική τροχιά είναι

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k\alpha^2 - c}{m\alpha^5}}\,.$$

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α) Έστω το χρόνο t ο μετεωρίτης έχει μάζα m και ταχύτητα v. Μετά χρόνο dt έχει μάζα $m+dm$ (με $dm<0$) και ταχύτητα $v+dv$, ενώ η μάζα $-dm$ που έχει αποχωριστεί έχει ταχύτητα v. Η συνολική ορμή είναι αρχικά mv, τελικά $(m+dm)(v+dv)+(-dm)v = mv+mdv$ και άρα η μεταβολή της είναι mdv. Η εφαρμογή του 2ου νόμου Νεύτωνα (ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη δύναμη) δίνει $m\dfrac{dv}{dt}=F$.

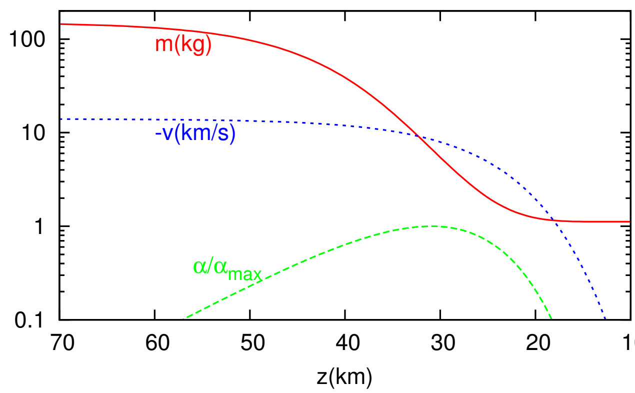
(β) Με $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dz}\dfrac{dz}{dt}=v\dfrac{dv}{dz}$ η εξίσωση κίνησης δίνει $\displaystyle\int_{v_\infty}^{v}\frac{dv}{v}=\frac{\lambda}{H}\int_{\infty}^{z}e^{-z/H}dz \Leftrightarrow \ln\frac{v}{v_\infty}=-\lambda e^{-z/H}$.

(γ) Ισοδύναμα $\ln\dfrac{v}{v_\infty}=-\lambda\dfrac{\rho}{\rho_0}\Leftrightarrow v=v_\infty e^{-\lambda\rho/\rho_0}$.
Η επιτάχυνση είναι $a=\dfrac{F}{m}=\dfrac{C_D S v^2\rho}{2m}$ και αντικαθιστώντας την ταχύτητα προκύπτει $a=\dfrac{\lambda v_\infty^2}{\rho_0 H}\rho e^{-2\lambda\rho/\rho_0}$ (είναι επιβράδυνση γιατί είναι αντίρροπη της ταχύτητας).
$\dfrac{da}{d\rho}=\dfrac{a}{\rho}\left(1-2\lambda\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)$, οπότε έχουμε μέγιστη επιβράδυνση για $\rho=\dfrac{\rho_0}{2\lambda}$. Τότε η ταχύτητα είναι $v=v_\infty e^{-1/2}=0.6v_\infty$ και η επιβράδυνση είναι $a_{\max}=\dfrac{v_\infty^2}{2eH}$.
Εφαρμογή: $\lambda=\dfrac{C_D S H\rho_0}{2m}=24$, $a_{\max}=\dfrac{v_\infty^2}{2eH}=4500\ \mathrm{m/s^2}$, πολύ μεγαλύτερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας (το βάρος είναι πράγματι αμελητέο). Η μέγιστη επιβράδυνση συμβαίνει για $\dfrac{\rho}{\rho_0}=\dfrac{1}{2\lambda}=\dfrac{1}{48}$, σε ύψος $z=H\ln\dfrac{\rho_0}{\rho}=3.87H=31000$ m.

Είναι $a=g$ για $\lambda\rho/\rho_0=\xi$ με $\xi e^{-2\xi}=\dfrac{gH}{v_\infty^2}=4\times10^{-4}$, δηλ. για $\xi\approx4.7$. Αυτό συμβαίνει σε ύψος $\lambda e^{-z/H}=\xi\Leftrightarrow z\approx13000$ m. Κάτω από το ύψος αυτό το βάρος δεν είναι αμελητέο. Όμως ήδη η ταχύτητα έχει ελαττωθεί σε τιμές $v\approx v_\infty/100$.

(δ) Διαιρώντας την $H^\star\dfrac{dm}{dt}=\dfrac{1}{2}C_H S v^3\rho$ με την εξίσωση κίνησης προκύπτει $\dfrac{dm}{m}=\dfrac{C_H}{C_D H^\star}vdv\Leftrightarrow \ln\dfrac{m}{m_\infty}=-\dfrac{C_H}{2C_D H^\star}\left(v_\infty^2-v^2\right)$. Όταν $v\ll v_\infty$ είναι $\ln\dfrac{m}{m_\infty}=-4.9\Leftrightarrow m=7.4\times10^{-3}m_\infty\approx1$ kg.

Η σχέση μάζας–ύψους προκύπτει από την $\ln\dfrac{m}{m_\infty}=-\dfrac{C_H}{C_D H^\star}v_\infty^2\left(1-e^{-2\lambda\rho/\rho_0}\right)$ με $\rho/\rho_0=e^{-z/H}$.



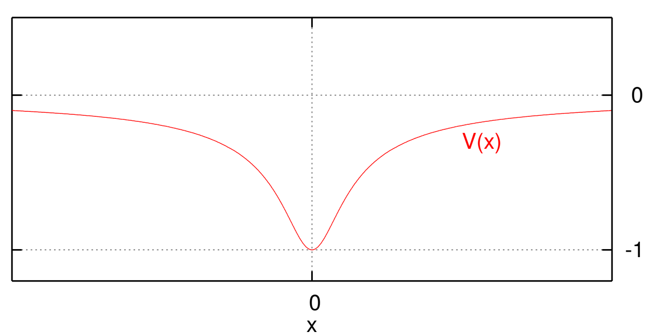
Θέμα 2^o:

Νόμος Νεύτωνα: $m\vec{a}=-mb^3\omega^2\dfrac{\vec{r}-\vec{r}_Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|^3}+\vec{N}+\vec{T}$, με $\vec{r}_Q=-b\hat{y}$, $\vec{r}=x\hat{x}$, $\vec{v}=\dot{x}\hat{x}$, $\vec{a}=\dot{v}\hat{x}$, $\vec{N}=N\hat{y}$, $\vec{T}=-\mu|N|\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (αντίρροπη της ταχύτητας).

Η $\hat{y}$ συνιστώσα δίνει $N=\dfrac{mb^4\omega^2}{(x^2+b^2)^{3/2}}$ και η $\hat{x}$ συνιστώσα δίνει $m\dot{v}=-\dfrac{mb^3\omega^2 x}{(x^2+b^2)^{3/2}}-\dfrac{\mu mb^4\omega^2}{(x^2+b^2)^{3/2}}\dfrac{v}{|v|}$.

(α) Χωρίς τριβή $m\dot{v}=F(x)$, $F(x)=-\dfrac{mb^3\omega^2 x}{(x^2+b^2)^{3/2}}$.

Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{mv^2}{2}+V(x)=E$ με $V=-\displaystyle\int F(x)dx=\int\frac{mb^3\omega^2 x\ dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}=-\frac{mb^3\omega^2}{\sqrt{x^2+b^2}}$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά).
Για το γράφημα: η $V(x)$ είναι αύξουσα στα θετικά x, παίρνοντας τιμές από $V(0)=-mb^2\omega^2<0$ ως $V(x=+\infty)=0$, ενώ επεκτείνεται άρτια στα αρνητικά x.

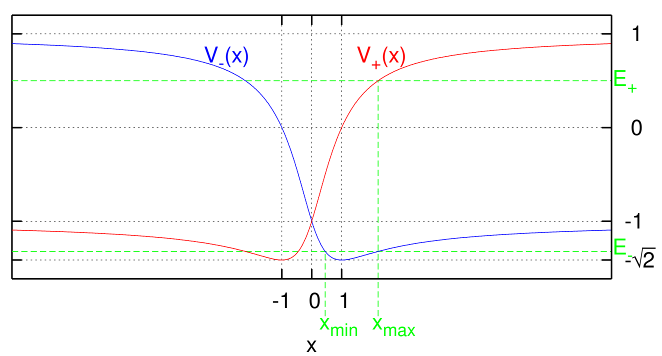


Αν η μάζα m ξεκινά από το σημείο $x=0$ με ταχύτητα v_0 τότε $E=\dfrac{mv_0^2}{2}-mb^2\omega^2$.

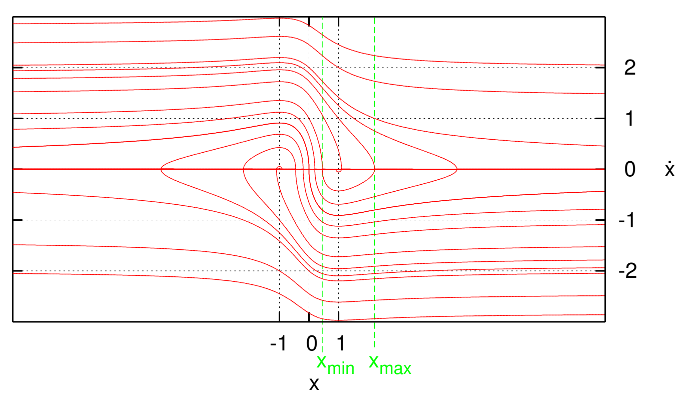
Αν $E > 0 \Leftrightarrow v_0 > b\omega\sqrt{2}$ η μάζα θα φτάσει στο $x = +\infty$ (θα έχει μη-μηδενική ταχύτητα εκεί).
Αν $E = 0 \Leftrightarrow v_0 = b\omega\sqrt{2}$ η μάζα θα φτάσει στο $x = +\infty$ (θα έχει μηδενική ταχύτητα εκεί).
Αν $E < 0 \Leftrightarrow v_0 < b\omega\sqrt{2}$ εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των ριζών της $V(x) = E$, δηλ. $|x| \le b\sqrt{\dfrac{m^2b^4\omega^4}{E^2} - 1}$.
Για μικρές ταχύτητες v_0 εκτελεί ταλάντωση μικρού πλάτους η οποία είναι αρμονική με κυκλική συχνότητα ω, αφού η προσεγγιστική δύναμη για $|x| \ll b$ είναι $F \approx -m\omega^2 x$.
Το ίδιο προκύπτει από το ανάπτυγμα της δυναμικής ενέργειας γύρω από το ελάχιστο στο $x = 0$.
Άρα $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$, $v(t) = \omega A\cos(\omega t) - \omega B\sin(\omega t)$. Από τις αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = 0$, $v|_{t=0} = v_0$ προκύπτει $v(t) = v_0\cos(\omega t)$.
(β) Η $\hat{x}$ συνιστώσα του νόμου του Νεύτωνα, θέτοντας $\dot{v} = v\dfrac{dv}{dx}$ και $v < 0$ (η φορά κίνησης δεν αλλάζει), δίνει $v\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{b^3\omega^2 x}{(x^2+b^2)^{3/2}} + \dfrac{\mu b^4\omega^2}{(x^2+b^2)^{3/2}} \Leftrightarrow$

$$\int_0^0 v\, dv = -\int_b^0 \frac{b^3\omega^2 x}{(x^2+b^2)^{3/2}}dx + \int_b^0 \frac{\mu b^4\omega^2}{(x^2+b^2)^{3/2}}dx.$$

Θέτοντας $x = b\xi$ στα ολοκληρώματα προκύπτει $\mu\displaystyle\int_0^1 \frac{d\xi}{(\xi^2+1)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{\xi\, d\xi}{(\xi^2+1)^{3/2}} \Leftrightarrow \mu = \sqrt{2} - 1$.
Στο σημείο $x = 0$ η προβολή της ηλεκτρικής δύναμης μηδενίζεται, δηλ. είναι μικρότερη από την τριβή ολίσθησης $\mu m b\omega^2$, επομένως η μάζα θα μείνει ακίνητη στο $x = 0$.
(γ) Όσο η φορά κίνησης δεν αλλάζει και η ταχύτητα είναι είτε θετική είτε αρνητική $v \gtrless 0$ η $\hat{x}$ συνιστώσα του νόμου του Νεύτωνα δίνει $m\dot{v} = F_\pm(x)$ με $F_\pm(x) = -\dfrac{mb^3\omega^2 x}{(x^2+b^2)^{3/2}} \mp \dfrac{\mu m b^4\omega^2}{(x^2+b^2)^{3/2}}$. Το ολοκλήρωμα «ενέργειας» είναι $\dfrac{mv^2}{2} + V_\pm(x) = E_\pm$, με $V_\pm(x) = -\displaystyle\int F_\pm(x)\, dx = mb^2\omega^2\frac{-b \pm \mu x}{\sqrt{x^2+b^2}}$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά).
Αν $\mu = 1$ και αρχικά $x = 0$, $v_0 = \sqrt{3}b\omega$ τότε $E_+ = \dfrac{mv_0^2}{2} + V_+(0) = \dfrac{mb^2\omega^2}{2}$.
Η μάζα κινείται με θετική v όσο $V_+(x) < E_+$, δηλ. μέχρι την θετική λύση της $V_+(x) = E_+ \Leftrightarrow \dfrac{x-b}{\sqrt{x^2+b^2}} = \dfrac{1}{2}$. Υψώνοντας στο τετράγωνο και κρατώντας ότι δεκτές λύσεις είναι οι $x > b$, βρίσκουμε $3x^2 - 8bx + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}b$. Μόνο η μεγαλύτερη πληρεί τη συνθήκη $x > b$, επομένως η μάζα κινείται με θετική ταχύτητα μέχρι το σημείο $x_{max} = \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}b$.
Για να μελετήσουμε τώρα το ενδεχόμενο η μάζα να κινηθεί με αρνητική ταχύτητα πρέπει να ελέγξουμε αν $F_-(x_{max}) < 0$ (δηλ. αν η ηλεκτρική έλξη υπερνικά την τριβή). Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με $x_{max} > b$, κάτι που ισχύει. Για να βρούμε μέχρι ποιο σημείο η μάζα θα κινηθεί με αρνητική ταχύτητα χρειαζόμαστε την E_-, η οποία είναι ίση με $V_-(x_{max}) = mb^2\omega^2\dfrac{-b - x_{max}}{\sqrt{x_{max}^2 + b^2}}$. Η αντικατάσταση δίνει $E_- = -\dfrac{\sqrt{7}}{2}mb^2\omega^2$. Η μάζα θα κινηθεί με αρνητική ταχύτητα όσο $V_-(x) < E_-$, δηλ. μέχρι την μικρότερη λύση της $V_-(x) = E_- \Leftrightarrow \dfrac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Υψώνοντας στο τετράγωνο βρίσκουμε $3x^2 - 8bx + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}b$. Άρα η μάζα κινείται με αρνητική ταχύτητα μέχρι το σημείο $x_{min} = \dfrac{4-\sqrt{7}}{3}b$.
Για να μελετήσουμε τώρα το ενδεχόμενο η μάζα να κινηθεί με θετική ταχύτητα πρέπει να ελέγξουμε αν $F_+(x_{min}) > 0$ (δηλ. αν η ηλεκτρική έλξη υπερνικά την τριβή). Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με $x_{min} < -b$, κάτι που δεν ισχύει, άρα η μάζα θα μείνει για πάντα στο σημείο $x_{min} = \dfrac{4-\sqrt{7}}{3}b$.



Το παραπάνω σχήμα δείχνει τις δυναμικές ενέργειες για $\mu = 1$, σε μονάδες όπου $m = b = \omega = 1$, ενώ το παρακάτω το αντίστοιχο διάγραμμα φάσης.



Θέμα 3ο:

(α) βλ. σελ. 175, 176 βιβλίου Θεωρητική Μηχανική, ΚΤ

(β) Εμβαδόν ΑΒΗΑ$=\dfrac{\pi ab}{4}-\dfrac{1}{2}eab=\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{e}{2\pi}\right)\pi ab$ και επειδή ο χρόνος είναι ανάλογος του εμβαδού ο χρόνος κίνησης από το Α στο Β είναι $\Delta t_{\mathrm{AB}}=\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{e}{2\pi}\right)$ έτη $=0.247$ έτη $=90.3$ ημέρες.

Ο χρόνος κίνησης από το Β στο Α′ είναι $\Delta t_{\mathrm{BA'}}=0.5$ έτη $-\Delta t_{\mathrm{AB}}=0.253$ έτη $=92.2$ ημέρες.

Θέμα 4ο:

$V=-\dfrac{k}{r}-\dfrac{c}{3r^3}$, $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{k}{r^2}+\dfrac{c}{r^4}$, $\dfrac{d^2V}{dr^2}=-\dfrac{2k}{r^3}-\dfrac{4c}{r^5}$.

(α) $F=-\dfrac{dV}{dr}=-\dfrac{k}{r^2}-\dfrac{c}{r^4}$,

$m\omega^2\alpha=|F|=\dfrac{k}{\alpha^2}+\dfrac{c}{\alpha^4}\Leftrightarrow\omega=\sqrt{\dfrac{k\alpha^2+c}{m\alpha^5}}$.

$L=m\omega\alpha^2=\sqrt{m\dfrac{k\alpha^2+c}{\alpha}}$.

(β) $V'=V+\dfrac{L^2}{2mr^2}=-\dfrac{k}{r}-\dfrac{c}{3r^3}+\dfrac{k\alpha^2+c}{2\alpha r^2}$,

$\dfrac{dV'}{dr}=\dfrac{k}{r^2}+\dfrac{c}{r^4}-\dfrac{k\alpha^2+c}{\alpha r^3}$,

$\dfrac{d^2V'}{dr^2}=-\dfrac{2k}{r^3}-\dfrac{4c}{r^5}+3\dfrac{k\alpha^2+c}{\alpha r^4}$.

Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται στην κυκλική ακτίνα, $\left.\dfrac{dV'}{dr}\right|_{r=\alpha}=0$, συνθήκη που ισοδυναμεί με την $m\omega^2\alpha=|F|$.

Επομένως για $r\approx\alpha$ είναι $\dfrac{dV'}{dr}\approx\left.\dfrac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r=\alpha}x$, όπου $x=r-\alpha$ και η εξίσωση τροχιάς $m\ddot{r}=-\dfrac{dV'}{dr}\Leftrightarrow\ddot{x}+\dfrac{1}{m}\left.\dfrac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r=\alpha}x=0$ δίνει ταλαντωτική λύση με συχνότητα $\omega_r=\sqrt{\dfrac{1}{m}\left.\dfrac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r=\alpha}}=\sqrt{\dfrac{k\alpha^2-c}{m\alpha^5}}$.