Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 16 Μαΐου 2016
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

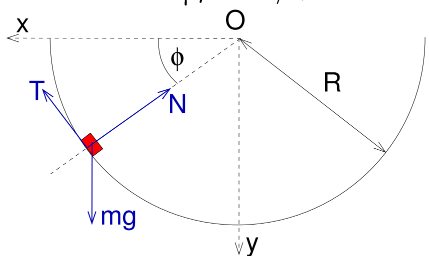
Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 4 Δεκεμβρίου 2015: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐ 13η ☐

Θέμα 1ο:

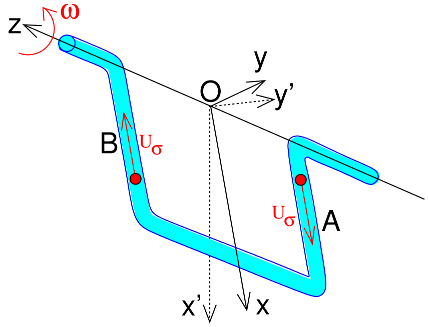
Σώμα γλιστράει στην εσωτερική επιφάνεια του ημικυλίνδρου του σχήματος, ο οποίος έχει ακτίνα R. Η κίνηση γίνεται σε κατακόρυφο επίπεδο, δηλ. οι κυλινδρικές συντεταγμένες του σώματος είναι $\varpi = R$, $\phi = \phi(t)$ και $z = 0$. Στο σώμα ασκείται το βάρος mg, η κάθετη αντίδραση N και τριβή ολίσθησης $T = \mu N$ με συντελεστή $\mu = 1/\sqrt{2}$.



(α) Αναλύστε την ταχύτητα $\vec{v}$ και επιτάχυνση του σώματος στις διευθύνσεις $\hat{\varepsilon}$ (επιτρόχια) και $\hat{n}$ (προς το κέντρο καμπυλότητας) και γράψτε τις συναρτήσει της γωνίας $\phi(t)$ (και παραγώγων της).
(β) Μέσω του νόμου Νεύτωνα καταλήξτε στην διαφορική εξίσωση που καθορίζει την $\phi(t)$.
(γ) Δείξτε ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή $\dfrac{dv^2}{d\phi} + \sqrt{2}v^2 = gR\left(2\cos\phi - \sqrt{2}\sin\phi\right)$ και έχει γενική λύση $v^2 = Ce^{-\sqrt{2}\,\phi} + gR\sqrt{2}\cos\phi$.
(δ) Αν το σώμα ξεκινά από το σημείο $\phi = 0$ έχοντας κατακόρυφη ταχύτητα v_0 με φορά προς τα κάτω, να βρεθεί ποια πρέπει να είναι η v_0 ώστε το σώμα μόλις να φτάσει στο κατώτερο σημείο $\phi = \pi/2$.

Θέμα 2ο:

Μάζα m κινείται μέσα στον σωλήνα του σχήματος.



Ο σωλήνας περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ γύρω από τον άξονα z, ενώ το μέτρο της ταχύτητας της μάζας ως προς το σωλήνα (v_σ) είναι σταθερό. Αγνοούμε τη βαρύτητα.
(α) Ποια η δύναμη Coriolis στις πλευρές Α και Β; Δείξτε ότι είναι ίση με την δύναμη που ασκεί η μάζα στον σωλήνα στη διεύθυνση κάθετα στο σωλήνα.
(β) Αν αντί για μία μάζα έχουμε πολλές που κινούνται η μία πίσω από την άλλη με την ίδια v_σ και έχουν γραμμική πυκνότητα $\lambda = dm/d\ell$ όπου $d\ell$ το στοιχειώδες μήκος του σωλήνα, ποια η δύναμη Coriolis $d\vec{F}$ σε μήκος $d\ell$ του σωλήνα; Ποιες είναι οι συνολικές $\hat{z}$ ροπές $\displaystyle\int \hat{z}\cdot\left(\vec{r}\times d\vec{F}\right)$ σε κάθε πλευρά; Θεωρήστε την «παράκαμψη» του σωλήνα τετράγωνη με μήκος πλευράς ℓ. Πως προσπαθούν να παραμορφώσουν το σωλήνα οι παραπάνω ροπές;
★ (γ) Έστω μελετούμε την κίνηση της μάζας στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Ox'y'z$. Ποια η ταχύτητα της μάζας $\vec{v}_a$ στις πλευρές Α και Β; Σχολιάστε την μεταβολή της $\hat{z}$ στροφορμής $\hat{z}\cdot(\vec{r}\times m\vec{v}_a)$ της μάζας καθώς κινείται στις πλευρές Α και Β και το που οφείλεται.

Θέμα 3ο:

Ένας αστεροειδής μάζας m κινείται κυκλικά με ταχύτητα $u_0 = \sqrt{GM/r_0}$ σε απόσταση $r_0 = 3$ AU από τον Ήλιο (όπου AU η απόσταση Γης–Ηλίου και M η μάζα του Ήλιου).
Κάποια στιγμή, λόγω κάποιας σύγκρουσης, η ταχύτητά του γίνεται κu_0, χωρίς να αλλάξει διεύθυνση.
(α) Γράψτε τις εκφράσεις για την ενέργεια και την στροφορμή του αστεροειδούς στη νέα του κίνηση, συναρτήσει των GM, m, r_0 και κ. Τι είδους τροχιά εκτελεί ο αστεροειδής ανάλογα με την τιμή του κ;
(β) Χρησιμοποιώντας την υποθετική δυναμική ενέργεια $V'(r)$ βρείτε τις αψίδες της τροχιάς του αστεροειδούς όπου η ταχύτητά του είναι κάθετη στην επιβατική ακτίνα.
Δείξτε ότι αν $\kappa^2 < 1/2$ θα φτάσει σε απόσταση μικρότερη από 1 AU από τον Ήλιο (οπότε υπάρχει πιθανότητα και να συγκρουστεί με τη Γη).
(γ) Αν $\kappa^2 = 1/2$, σε πόσα Γήινα έτη ο αστεροειδής θα φτάσει στην ελάχιστη απόσταση από τον Ήλιο;

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

Σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης $\vec{F} = f(r)\hat{r}$. Η τροχιά του έχει εξίσωση $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos(\lambda\phi)}$, όπου p, ε, λ θετικές σταθερές, και η στροφορμή του είναι L.

(α) Βρείτε την περιστροφική και ακτινική ταχύτητα του σώματος σαν συναρτήσεις της θέσης, δηλ. τις $v_\phi(\phi)$ και $v_r(\phi)$.

(β) Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια σαν συνάρτηση του r είναι: $T = \dfrac{L^2\lambda^2\left(\varepsilon^2-1\right)}{2mp^2} + \dfrac{L^2\lambda^2}{mpr} + \dfrac{L^2\left(1-\lambda^2\right)}{2mr^2}$.

(γ) Μέσω της διατήρησης ενέργειας βρείτε τη δυναμική ενέργεια $V(r)$, θεωρώντας ότι μηδενίζεται στο άπειρο.

(δ) Βρείτε την δύναμη $f(r)$ η οποία δίνει τη συγκεκριμένη τροχιά.

★ (ε) Σχεδιάστε την τροχιά του σώματος για την περίπτωση όπου $0 < \varepsilon < 1$ και $\lambda = \dfrac{1}{1-1/360}$.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

(α) $\vec{v} = v\hat{\varepsilon}$, $\vec{a} = \dot{v}\hat{\varepsilon} + \dfrac{v^2}{R}\hat{n}$ με $v = R\dot{\phi}$, δηλ. $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\varepsilon}$, $\vec{a} = R\ddot{\phi}\hat{\varepsilon} + R\dot{\phi}^2\hat{n}$ (όπου $\hat{\varepsilon} = \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$, $\hat{n} = -\hat{r} = -\cos\phi\hat{x} - \sin\phi\hat{y}$).
(β) $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$ με $m\vec{g} = mg\cos\phi\ \hat{\varepsilon} - mg\sin\phi\ \hat{n}$, $\vec{N} = N\hat{n}$ και $\vec{T} = -T\hat{\varepsilon}$. Άρα η $\hat{\varepsilon}$ συνιστώσα δίνει $mR\ddot{\phi} = mg\cos\phi - T$ και η $\hat{n}$ συνιστώσα δίνει $mR\dot{\phi}^2 = N - mg\sin\phi$. Λύνοντας την πρώτη ως προς T, τη δεύτερη ως προς N και αντικαθιστώντας στην $T = \dfrac{1}{\sqrt{2}}N$ προκύπτει η διαφορική εξίσωση $g\cos\phi - R\ddot{\phi} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(R\dot{\phi}^2 + g\sin\phi\right)$.
(γ) Με $\dot{\phi} = \dfrac{v}{R}$ και $\ddot{\phi} = \dfrac{d\dot{\phi}}{d\phi}\dot{\phi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\dot{\phi}^2}{d\phi} = \dfrac{1}{2R^2}\dfrac{dv^2}{d\phi}$ η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη ζητούμενη μορφή, η οποία είναι γραμμική μη-ομογενής ως προς v^2.
Η λύση της ομογενούς είναι $Ce^{-\sqrt{2}\,\phi}$ (αφού $-\sqrt{2}$ είναι η ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου), ενώ μια μερική λύση είναι $A\cos\phi + B\sin\phi$ με την αντικατάσταση να δίνει $A = gR\sqrt{2}$ και $B = 0$. Άρα η γενική λύση είναι $v^2 = Ce^{-\sqrt{2}\,\phi} + gR\sqrt{2}\cos\phi$.
(δ) Η παραπάνω γενική λύση πρέπει να δίνει μηδενική ταχύτητα για $\phi = \pi/2$, οπότε προκύπτει $C = 0$, ενώ για $\phi = 0$ δίνει $v_0 = 2^{1/4}\sqrt{gR}$.

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

(α) $\vec{F}_{\mathrm{C}}\Big|_A = -2m\omega\hat{z} \times v_\sigma\hat{x} = -2m\omega v_\sigma\hat{y}$,
$\vec{F}_{\mathrm{C}}\Big|_B = -2m\omega\hat{z} \times (-v_\sigma\hat{x}) = 2m\omega v_\sigma\hat{y}$.
Η συνισταμένη των δυνάμεων (πραγματικών και υποθετικών) στην $\hat{y}$ κατεύθυνση είναι μηδέν (αφού δεν υπάρχει κίνηση στην κατεύθυνση αυτή στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς). Η φυγόκεντρος δεν έχει $\hat{y}$ συνιστώσα, άρα η Coriolis στην πλευρά A είναι αντίθετη της δύναμης που ασκεί ο σωλήνας στη μάζα, δηλ. ίση με τη δύναμη που ασκεί η μάζα στο σωλήνα. Όμοια στην πλευρά B.
(β) $d\vec{F} = -2(\lambda d\ell)\,(\omega\hat{z}) \times (\pm v_\sigma\hat{x}) = \mp 2\lambda\omega v_\sigma\ d\ell\ \hat{y}$ στις πλευρές A και B (στην τρίτη πλευρά της παράκαμψης είναι μηδέν).
Οι αντίστοιχες συνολικές $\hat{z}$ ροπές είναι
$$\hat{z}\cdot\int \vec{r}\times d\vec{F} = \hat{z}\cdot\int_0^\ell x\hat{x}\times(\mp 2\lambda\omega v_\sigma dx\ \hat{y}) = \mp\lambda\omega v_\sigma\ell^2.$$
Οι ροπές αυτές θέλουν να μετακινήσουν την πλευρά B προς τον άξονα y και την πλευρά A αντίθετα (όπως άλλωστε δείχνουν και οι $\vec{F}_{\mathrm{C}}\Big|_B$, $\vec{F}_{\mathrm{C}}\Big|_A$).
Αν έχουμε υγρό να κυλά μέσα στο σωλήνα τότε η μέτρηση της παραμόρφωσης (και η γνώση της ελαστικότητας του σωλήνα) προσδιορίζει την μάζα που περνά στη μονάδα του χρόνου από την διατομή του σωλήνα $\dot{M} = dm/dt = \lambda v_\sigma$ (μετρητής ροής μάζας).
(γ) $\vec{v}_a = \vec{v}_\sigma + \vec{\omega}\times\vec{r} = \pm v_\sigma\hat{x} + \omega\hat{z}\times x\hat{x} = \pm v_\sigma\hat{x} + \omega x\hat{y}$ στις πλευρές A και B. Η στροφορμή είναι $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v}_a = m\left(\mp\dfrac{\ell}{2}\hat{z} + x\hat{x}\right)\times(\pm v_\sigma\hat{x} + \omega x\hat{y}) = \pm\dfrac{\ell}{2}m\omega x\hat{x} - \dfrac{\ell}{2}mv_\sigma\hat{y} + m\omega x^2\hat{z}$ στις πλευρές A και B. Άρα η συνιστώσα της στροφορμής $L_z = m\omega x^2$ μεταβάλλεται κάτι που οφείλεται σε ροπή $T_z = \dot{L}_z = 2m\omega x\dot{x} = \pm 2m\omega x v_\sigma$ που ασκεί ο σωλήνας στη μάζα. Ο σωλήνας δέχεται την αντίθετη ροπή $-T_z = \mp 2m\omega x v_\sigma$, οπότε η πλευρά A έχει την τάση να «μείνει πίσω». και η πλευρά B έχει την τάση να «κινηθεί μπροστά». (Τα συμπεράσματα είναι ίδια με αυτά που δίνει η μελέτη της δύναμης Coriolis).

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

(α) $E = \dfrac{1}{2}m(\kappa u_0)^2 - \dfrac{GMm}{r_0} = -\dfrac{2-\kappa^2}{2}\dfrac{GMm}{r_0}$,
$L = mr_0(\kappa u_0) = m\kappa\sqrt{GMr_0}$.
Αν $|\kappa| < \sqrt{2}$ η ενέργεια είναι αρνητική και άρα το σώμα θα εκτελέσει ελλειπτική τροχιά.
Αν $|\kappa| = \sqrt{2}$ η ενέργεια είναι μηδενική και άρα το σώμα θα εκτελέσει παραβολική τροχιά.
Αν $|\kappa| > \sqrt{2}$ η ενέργεια είναι θετική και άρα το σώμα θα εκτελέσει υπερβολική τροχιά.
(Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις η αρχική θέση είναι το περιήλιο της τροχιάς.)
(β) $V'(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{GMm}{r} = \dfrac{\kappa^2 GMmr_0}{2r^2} - \dfrac{GMm}{r}$.
Οι αψίδες είναι οι λύσεις της $V'(r) = E \Leftrightarrow (2-\kappa^2)\,r^2 - 2r_0 r + \kappa^2 r_0^2 = 0$, οι οποίες προκύπτουν $r_0 = 3$ AU και $\dfrac{\kappa^2}{2-\kappa^2}r_0 = \dfrac{3\kappa^2}{2-\kappa^2}$ AU.
Η ελάχιστη απόσταση πρέπει να είναι μικρότερη του 1 AU, άρα πρέπει $0 < \dfrac{3\kappa^2}{2-\kappa^2} < 1 \Leftrightarrow |\kappa| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
(γ) Θα φτάσει σε μισή περίοδο. Ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς σε AU είναι $a = \dfrac{1}{2}(3+1) = 2$ και από τον 3ο νόμο Κέπλερ η περίοδος σε Γήινα έτη είναι $a^{2/3}$. Άρα η μισή περίοδος είναι $\dfrac{1}{2}2^{3/2} = \sqrt{2} = 1.414$ Γήινα έτη, δηλ. περίπου ένα έτος και πέντε μήνες.

Θέμα $4^{\text{ο}}$:

(α) $v_\phi = \dfrac{L}{mr} = \dfrac{L}{mp}\left[1 + \varepsilon\cos(\lambda\phi)\right]$,

$v_r = \dot{r} = \dfrac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = -\dfrac{L}{m}\dfrac{d(1/r)}{d\phi} = \dfrac{L\varepsilon\lambda}{mp}\sin(\lambda\phi)$.

(β) $T = \dfrac{mv_r^2}{2} + \dfrac{mv_\phi^2}{2} = \dfrac{L^2\varepsilon^2\lambda^2}{2mp^2}\sin^2(\lambda\phi) + \dfrac{L^2}{2mr^2}$. Αντικαθιστώντας $\sin^2(\lambda\phi) = 1 - \cos^2(\lambda\phi)$ με $\cos(\lambda\phi) = \dfrac{p}{\varepsilon r} - \dfrac{1}{\varepsilon}$, βρίσκουμε την ζητούμενη.

(γ) $V = E - T = E - \dfrac{L^2\lambda^2\left(\varepsilon^2 - 1\right)}{2mp^2} - \dfrac{L^2\lambda^2}{mpr} - \dfrac{L^2\left(1 - \lambda^2\right)}{2mr^2}$, όπου E η σταθερή ενέργεια του σώματος (σταθερή διότι η δύναμη είναι συντηρητική). Αν $\lim_{r\to\infty} V = 0$ βρίσκουμε $E = \dfrac{L^2\lambda^2\left(\varepsilon^2 - 1\right)}{2mp^2}$ και $V = -\dfrac{L^2\lambda^2}{mpr} - \dfrac{L^2\left(1 - \lambda^2\right)}{2mr^2}$.

(δ) $f = -\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{L^2\lambda^2}{mpr^2} - \dfrac{L^2\left(1 - \lambda^2\right)}{mr^3}$.

(ε) Η τροχιά είναι προσεγγιστικά ελλειπτική (η απόσταση r παίρνει τιμές από $\dfrac{p}{1+\varepsilon}$ μέχρι $\dfrac{p}{1-\varepsilon}$), αλλά το περίκεντρο μεταπίπτει. Η απόσταση είναι ελάχιστη για $\cos(\lambda\phi) = 1 \Leftrightarrow \phi = 2n\pi/\lambda = (2\pi - 2\pi/360)n = 359n$ μοίρες με ακέραιο n, επομένως κάθε περίκεντρο υστερεί σε σχέση με το προηγούμενο κατά γωνία $2\pi/360 = 1$ μοίρα.