Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 26 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

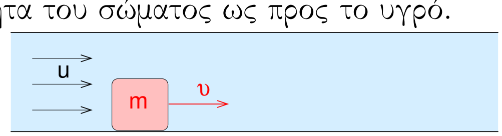
Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: __ __ __ __ __ __ __

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 4 Δεκεμβρίου 2015: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐ 13η ☐

Θέμα 1ο:

Σώμα μάζας m βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο σωλήνα μέσα στον οποίο μπορεί να κυλά υγρό με ελεγχόμενη παροχή. Θεωρώντας αμελητέα την τριβή με τα τοιχώματα του σωλήνα, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι η δύναμη αντίστασης που του ασκεί το υγρό $-\lambda m \vec{v}_{\sigma\chi}$, όπου $\vec{v}_{\sigma\chi}$ η σχετική ταχύτητα του σώματος ως προς το υγρό.



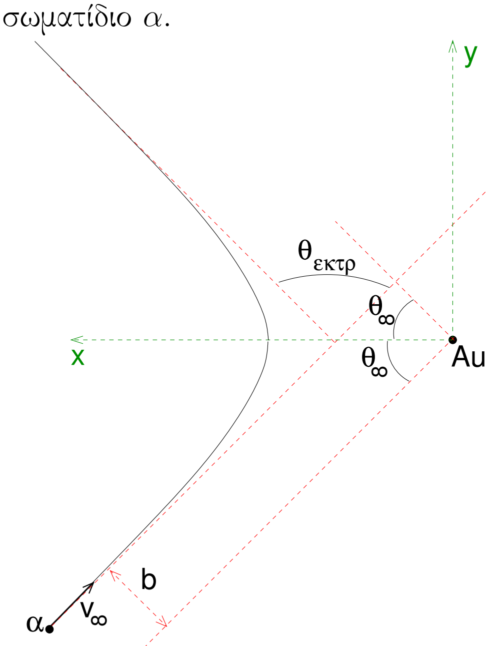
(α) Αρχικά το σώμα είναι ακίνητο και ο σωλήνας γεμάτος με επίσης ακίνητο υγρό. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ανοίγουμε την παροχή, οπότε το υγρό για $t > 0$ κινείται μέσα στο σωλήνα με (σταθερή) ταχύτητα u. Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση του σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου.
(β) Τη χρονική στιγμή $t = T$ κλείνουμε την παροχή, οπότε το υγρό ακινητοποιείται (για $t > T$ ο σωλήνας παραμένει γεμάτος με ακίνητο υγρό και το σώμα επιβραδύνεται λόγω της αντίστασης από το υγρό). Βρείτε την ταχύτητα του σώματος συναρτήσει της θέσης και συναρτήσει του χρόνου.
(γ) Δείξτε ότι το συνολικό μήκος που διανύει το σώμα από ακινησία σε ακινησία είναι uT. Ποιο είναι το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος;

Θέμα 2ο:

Σε μια παραλλαγή του μυθιστορήματος του Ιουλίου Βερν «Ταξίδι στο Κέντρο της Γης» ο Άξελ και ο θείος του Λίντενμπροκ ξεκινούν από την επιφάνεια της περιστρεφόμενης Γης, ο Άξελ από τον βόρειο πόλο και ο Λίντενμπροκ από ένα σημείο του ισημερινού, και ακολουθώντας ευθύγραμμες πορείες γλιστρώντας (και όχι περπατώντας) μέσα σε σήραγγες στο εσωτερικό της Γης θέλουν να συναντηθούν στο κέντρο. Η πορεία του Άξελ γίνεται πάνω στον άξονα περιστροφής και άρα η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος $m\vec{g}$, το οποίο μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από το κέντρο διότι $\vec{g} = -(g_0/R)\vec{r}$, με $g_0 = 9.8$ m/s^2 και $R = 6.4 \times 10^6$ m. Ο Λίντενμπροκ όμως λόγω της περιστροφής της Γης δέχεται επιπλέον δύναμη κάθετης αντίδρασης $\vec{N}$ από τα τοιχώματα της σήραγγας και τριβή μέτρου $T = \mu|\vec{N}|$ όπου μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.
Μελετήστε τις κινήσεις (α) του Άξελ και (β) του Λίντενμπροκ και βρείτε πως μεταβάλλονται οι αποστάσεις τους από το κέντρο της Γης με το χρόνο. (Και για τους δύο αρχικά $r = R$ και $\dot{r} = 0$.) Ο συντελεστής τριβής δίνεται $\mu = 1$.
★ (γ) Πόσα δευτερόλεπτα μετά την εκκίνηση του Λίντενμπροκ πρέπει να ξεκινήσει ο Άξελ ώστε να συναντηθούν στο κέντρο της Γης; Ποιος ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων τους την στιγμή της συνάντησης;
Υπόδειξη: Για ένα τρόπο λύσης θα χρειαστεί η $\vec{a}_\sigma = \Sigma\vec{F}/m - \vec{a}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$. Για ένα δεύτερο τρόπο λύσης θα χρειαστεί η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (\varpi\ddot{\phi} + 2\dot{\varpi}\dot{\phi})\hat{\phi}$.

Θέμα 3ο:

Θεωρήστε το πείραμα σκέδασης Rutherford σωματιδίων α ($^4_2$He) μάζας m και θετικού φορτίου $q_1 = Z_1 e$ ($Z_1 = 2, A_1 = 4$), από πυρήνες χρυσού ($^{197}_{79}$Au) θετικού φορτίου $q_2 = Z_2 e$ ($Z_2 = 79, A_2 = 197$) των οποίων θέλουμε να υπολογίσουμε την ακτίνα.
(α) Ο πυρήνας του Au ευρίσκεται στην εξωτερική κυρία εστία Ε της υπερβολικής τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο α.



Αποδείξτε ότι η εξίσωση της τροχιάς που ακολουθεί το σωματίδιο α είναι $r(\theta) = \dfrac{L^2/mK}{-1+\varepsilon\cos\theta}$, όπου $K = \dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}$ και L η στροφορμή του σωματιδίου α. Θεωρήστε γνωστή την $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2}$ με $u = \dfrac{1}{r}$.

(β) Υπολογίστε την εκκεντρότητα ε της υπερβολικής τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο α συναρτήσει της ενέργειας E, στροφορμής L και μάζας m του σωματιδίου α καθώς και της σταθεράς K.

(γ) Υπολογίστε την ελάχιστη απόσταση $r_{\min}$ του σωματιδίου α από τον πυρήνα του χρυσού στην εστία Ε συναρτήσει της ασυμπτωτικής ταχύτητας v_∞, της παραμέτρου κρούσεως b και της μάζας m του σωματιδίου α καθώς και της σταθεράς K.

(δ) Υπολογίστε την γωνία εκτροπής $\theta_{\epsilon\kappa\tau\rho}$ του σωματιδίου α από την αρχική του διεύθυνση συναρτήσει της παραμέτρου κρούσεως b, ασυμπτωτικής ταχύτητας v_∞, μάζας m του σωματιδίου α καθώς και της σταθεράς K.

(ε) Στο πείραμα παρατηρήθηκε ότι έχουμε αποκλίσεις από την αναμενόμενη σκέδαση όταν η ταχύτητα $v_\infty \geqslant 4 \times 10^7$ m/s.
Αντικαθιστώντας $m = 6.6 \times 10^{-27}$ kg, $Z_1 = 2$, $Z_2 = 79$, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ Nm^2/C^2 δείξτε ότι η ελάχιστη απόσταση $r_{\min}$ του σωματιδίου α από τον πυρήνα τότε είναι $r_{\min} \approx 7 \times 10^{-15}$ m $=$ 7 Fermi, δλδ, η ακτίνα του πυρήνα χρυσού, σε συμφωνία και με τη γενική έκφραση για την ακτίνα R ενός πυρήνα, $R = 1.3 \times A^{1/3}$ Fermi.

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

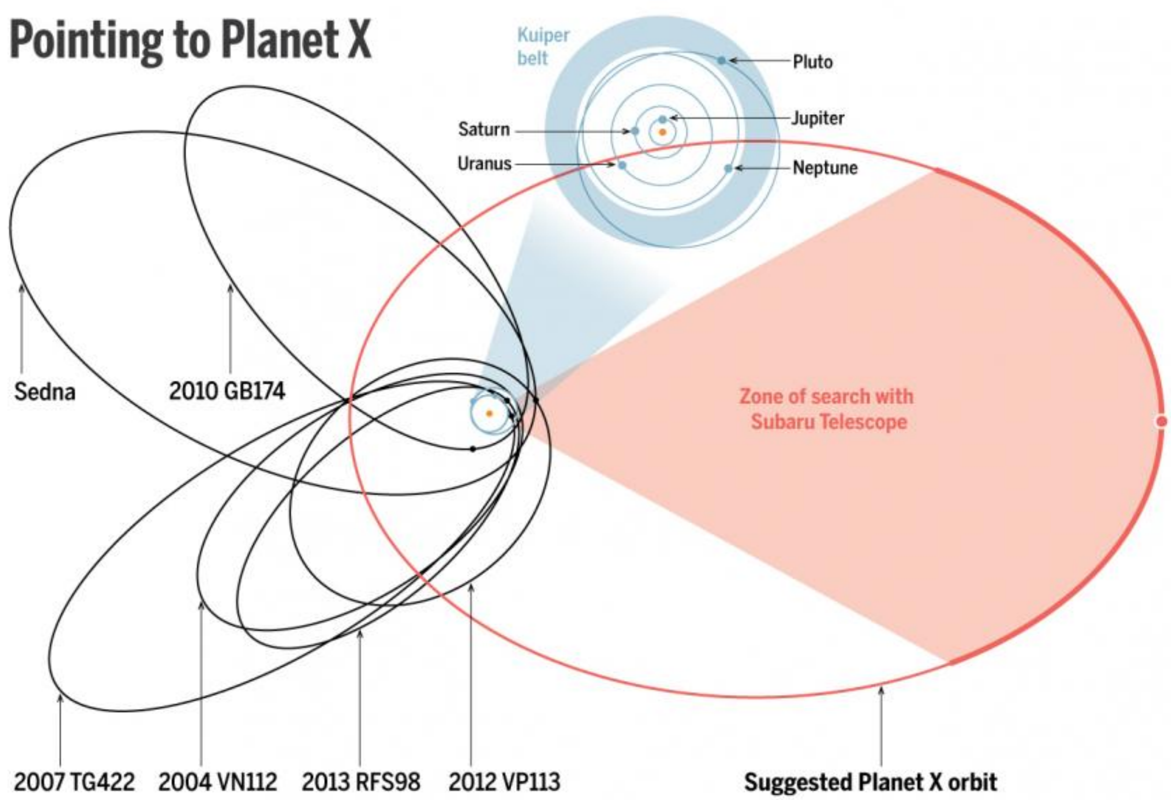
Όπως πιθανώς ακούσατε στις ειδήσεις την προηγούμενη εβδομάδα, πρόσφατες έρευνες υποστηρίζουν ότι υπάρχει ένας ακόμα πλανήτης στο πλανητικό μας σύστημα, ο 9ος Πλανήτης - Χ. Έχει μάζα δεκαπλάσια της Γης ($M_X = 10 M_\oplus$) και ευρίσκεται σε ελλειπτική τροχιά περί τον Ήλιο, με ελάχιστη απόσταση $r_\pi = 200$ AU και μέγιστη $r_\alpha = 1200$ AU από τον Ήλιο (όπου AU η αστρονομική μονάδα).

(α) Υπολογίστε την εκκεντρότητα ε, τους ημιάξονες a και b, την περίοδο T, καθώς και την πολική εξίσωση της τροχιάς του Πλανήτη - Χ.

(β) Υπολογίστε την ταχύτητα του Πλανήτη - Χ στο αφήλιο (v_α) και περιήλιο (v_π) της τροχιάς του σε μονάδες της ταχύτητας της Γης περί τον Ήλιο $v_\oplus$, υποθέτοντας ότι η τροχιά της Γης περί τον Ήλιο είναι κυκλική, ακτίνας 1AU.

(γ) Υπολογίστε την στροφορμή L και ενέργεια E του Πλανήτη - X στη συγκεκριμένη τροχιά του, στις μονάδες της στροφορμής $L_\oplus$ και ενέργειας $E_\oplus$ της Γης στην κυκλική τροχιά της γύρω από τον Ήλιο.

(δ) Αν στέλναμε σε τροχιά Hohmann ένα διαστημόπλοιο Δ να συναντήσει τον Πλανήτη - Χ όταν αυτός είναι στην απόσταση του περιηλίου του, πόσο χρόνο θα έπαιρνε στο Δ να φθάσει εκεί;
Δίνονται $\sqrt{6} \approx 2.45$, $\sqrt{7} \approx 2.65$.



ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α) Έστω οριζόντιος άξονας x με αρχή στην αρχική θέση του σώματος και φορά την φορά της $\vec{u}$. Ο νόμος Νεύτωνα $m\dot{\vec{v}} = -\lambda m\vec{v}_{\sigma\chi}$ με $\vec{v} = v\hat{x}$ και $\vec{v}_{\sigma\chi} = \vec{v} - \vec{u} = (v-u)\hat{x}$ δίνει $\dot{v} = \lambda(u-v)$, διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών που δίνει $\int_0^v \frac{dv}{u-v} = \lambda\int_0^t dt \Leftrightarrow \ln\left|\frac{u}{u-v}\right| = \lambda t \Leftrightarrow v(t) = u\left(1-e^{-\lambda t}\right)$. (Το απόλυτο φεύγει διότι η ταχύτητα v είναι πάντα μικρότερη της οριακής u.)

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη θέση $\int_0^x dx = \int_0^t vdt = \int_0^t u\left(1-e^{-\lambda t}\right)dt \Leftrightarrow x(t) = ut - \frac{u}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$.

Ο νόμος Νεύτωνα θα μπορούσε να γραφεί σαν γραμμική μη-ομογενής διαφορική εξίσωση $\dot{v}+\lambda v = \lambda u$. Η λύση της ομογενούς είναι $Ce^{-\lambda t}$, ενώ μια μερική λύση είναι η u. Άρα η γενική λύση είναι $v = u + Ce^{-\lambda t}$. Η αρχική συνθήκη $v|_{t=0} = 0$ δίνει $C = -u$, οπότε $v(t) = u\left(1-e^{-\lambda t}\right)$. Στη συνέχεια η θέση βρίσκεται όπως πριν.

Εναλλακτικά, ο νόμος Νεύτωνα θα μπορούσε να γραφεί σαν μια δεύτερης τάξης γραμμική μη-ομογενής διαφορική εξίσωση $\ddot{x}+\lambda\dot{x} = \lambda u$. Η λύση της ομογενούς είναι $C_1 + C_2e^{-\lambda t}$ ενώ μια μερική λύση είναι ut. Άρα η γενική λύση για τη θέση είναι $x = ut + C_1 + C_2e^{-\lambda t}$ και η ταχύτητα $v = \dot{x} = u - \lambda C_2e^{-\lambda t}$. Οι αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = 0$, $v|_{t=0} = 0$ δίνουν $C_1 = -u/\lambda$, $C_2 = u/\lambda$, οπότε $x(t) = ut - \frac{u}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$ και $v(t) = \dot{x} = u\left(1-e^{-\lambda t}\right)$.

(β) Τη χρονική στιγμή $t = T$ η θέση είναι $x_T = uT - \frac{u}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda T}\right)$ και η ταχύτητα $v_T = u\left(1-e^{-\lambda T}\right)$.

Μετά τη στιγμή αυτή ο νόμος Νεύτωνα $m\dot{\vec{v}} = -\lambda m\vec{v}_{\sigma\chi}$ με $\vec{v} = v\hat{x}$ και $\vec{v}_{\sigma\chi} = v\hat{x}$ δίνει $\dot{v} = -\lambda v$. Με $\dot{v} = v\frac{dv}{dx}$ βρίσκουμε τη σχέση ταχύτητας–θέσης $\frac{dv}{dx} = -\lambda \Leftrightarrow v = v_T - \lambda(x-x_T)$.

Η σχέση ταχύτητας–χρόνου βρίσκεται από $\dot{v} = -\lambda v \Leftrightarrow \int_{v_T}^v \frac{dv}{v} = -\lambda\int_T^t dt \Leftrightarrow v = v_Te^{-\lambda(t-T)}$.

(γ) Θέτοντας $v = 0$ στη σχέση ταχύτητας–θέσης βρίσκουμε το συνολικό μήκος που διανύει το σώμα από ακινησία σε ακινησία $x_{o\lambda} = x_T + \frac{v_T}{\lambda} = uT - \frac{u}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda T}\right) + \frac{u}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda T}\right) = uT$.

Από τη σχέση ταχύτητας–χρόνου βλέπουμε ότι η ταχύτητα μηδενίζεται θεωρητικά σε άπειρο χρόνο. Πρακτικά όμως μηδενίζεται όταν $\lambda(t-T) \sim 5$, δηλ. το σώμα κινείται χρονικό διάστημα $T + 5/\lambda$.

Θέμα 2^o:

Α′ τρόπος:

Έστω σύστημα $Oxyz$ που περιστρέφεται μαζί με τη Γη, με O στο κέντρο της Γης, άξονα z προς την αφετηρία του Άξελ (το βόρειο πόλο) και άξονα x προς την αφετηρία του Λίντενμπροκ.

Άξελ: $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{v}_\sigma = \dot{z}\hat{z}$, $\vec{a}_\sigma = \ddot{z}\hat{z}$, $\vec{a}_0 = 0$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$, $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 0$, $-2\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma = 0$, $\Sigma\vec{F} = -m(g_0/R)z\hat{z}$. Ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\ddot{z} + \frac{g_0}{R}z = 0$, δηλ. αρμονική ταλάντωση. Με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες η λύση είναι $z = R\cos\left(t\sqrt{\frac{g_0}{R}}\right)$ και $\dot{z} = -\sqrt{g_0R}\sin\left(t\sqrt{\frac{g_0}{R}}\right)$. Θα φτάσει στο κέντρο σε χρόνο $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g_0}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6.4\times10^6}{9.8}}\ \mathrm{s} = 1269'' = 21'$ με ταχύτητα μέτρου $\sqrt{g_0R} = 7.9\ \mathrm{km/s}$.

Λίντενμπροκ: $\vec{r} = x\hat{x}$, $\vec{v}_\sigma = \dot{x}\hat{x}$, $\vec{a}_\sigma = \ddot{x}\hat{x}$, $\vec{a}_0 = 0$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$, $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \omega^2x\hat{x}$, $-2\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma = -2\omega\hat{z}\times\dot{x}\hat{x} = -2\omega\dot{x}\hat{y}$, $\Sigma\vec{F} = -m(g_0/R)x\hat{x} + N\hat{y} - T\hat{x}$. Η αντίδραση $N\hat{y}$ εξουδετερώνει την Coriolis αφού η $\hat{y}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει $N - 2m\omega\dot{x} = 0$. Λόγω της $|\vec{N}| = 2m\omega|\dot{x}|$ υπάρχει τριβή $\vec{T} = -2\mu m\omega|\dot{x}|\frac{\vec{v}_\sigma}{|\vec{v}_\sigma|} = -2\mu m\omega\dot{x}\hat{x}$. Άρα η $\hat{x}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει $\ddot{x} = \omega^2x - \frac{g_0}{R}x - 2\mu\omega\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\mu\omega\dot{x} + \left(\frac{g_0}{R} - \omega^2\right)x = 0$, δηλ. φθίνουσα ταλάντωση.

Οι λύσεις είναι εκθετικές, ανάλογες του $e^{\xi t}$ με $\xi^2 + 2\mu\omega\xi + \frac{g_0}{R} - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \xi = -\mu\omega \pm i\Omega$ όπου $\Omega = \sqrt{\frac{g_0}{R} - (\mu^2+1)\omega^2}$. (Είναι $\frac{\omega^2R}{g_0} = \left(\frac{2\pi}{24\times3600}\right)^2\frac{6.4\times10^5}{9.8} = 0.003 \ll 1$, οπότε πρακτικά $\Omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$.) Η γενική λύση είναι $x = e^{-\mu\omega t}\left[C_1\cos(\Omega t) + C_2\sin(\Omega t)\right]$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $x = R$, $\dot{x} = 0$ βρίσκουμε $x = Re^{-\mu\omega t}\left[\cos(\Omega t) + \frac{\mu\omega}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]$ και $\dot{x} = -\Omega Re^{-\mu\omega t}\left(1 + \frac{\mu^2\omega^2}{\Omega^2}\right)\sin(\Omega t)$. Θα φτάσει στο κέντρο σε χρόνο για τον οποίο $\cot(\Omega t) = -\frac{\mu\omega}{\Omega} \Leftrightarrow \Omega t = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\mu\omega}{\Omega}$. Αφού $\frac{\mu\omega}{\Omega} \approx \mu\sqrt{\frac{\omega^2R}{g_0}} \ll 1$ είναι $\Omega t \approx \frac{\pi}{2} + \frac{\mu\omega}{\Omega}$, δηλ. το αποτέλεσμα είναι

$t \approx \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g_0}} + \frac{\mu\omega R}{g_0}$. Ο χρόνος προκύπτει κατά $\frac{\mu\omega R}{g_0} = 47.5''$ μεγαλύτερος από τον χρόνο που θέλει ο Άξελ. Το μέτρο της ταχύτητας στο κέντρο θα είναι περίπου $\sqrt{g_0 R}e^{-\mu\omega t}$ με $t \approx \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g_0}}$, δηλ. είναι $\sqrt{g_0 R}e^{-(\mu\pi/2)\sqrt{\omega^2 R/g_0}}$. Ο λόγος ταχυτήτων είναι $e^{(\mu\pi/2)\sqrt{\omega^2 R/g_0}} = 1.097$ (ο Άξελ τρέχει πιο γρήγορα).

Β′ τρόπος:

Έστω αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z$ με O στο κέντρο της Γης, άξονα z από το νότιο προς το βόρειο πόλο και άξονα x' προς την αρχική θέση του Λίντενμπροκ.

Άξελ: $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$ με $\vec{a} = \ddot{z}\hat{z}$ και $\Sigma\vec{F} = -m(g_0/R)z\hat{z}$, δηλ. $\ddot{z} + \frac{g_0}{R}z = 0$ όπως πριν.

Λίντενμπροκ: Κινείται στο ισημερινό επίπεδο ($z = 0$). Οι πολικές συντεταγμένες του είναι ($\varpi, \phi = \omega t$), όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης. Εκτός από το βάρος ασκείται στο σώμα και δύναμη $\vec{N} = N\hat{\phi}$ από τα τοιχώματα της σήραγγας, που τον υποχρεώνει να περιστρέφεται μαζί με τη Γη, αλλά και τριβή ολίσθησης $\vec{T} = \mu|N|\hat{\varpi}$ αντίρροπη της σχετικής ταχύτητας του σώματος ως προς την σήραγγα. Άρα (με $\dot{\phi} = \omega$, $\ddot{\phi} = 0$), $m(\ddot{\varpi} - \varpi\omega^2)\hat{\varpi} + 2m\dot{\varpi}\omega\hat{\phi} = -m(g_0/R)\varpi\hat{\varpi} + N\hat{\phi} + \mu|N|\hat{\varpi}$, οπότε $m(\ddot{\varpi} - \omega^2\varpi) = -m\frac{g_0}{R}\varpi + \mu|N|$ και $N = 2m\dot{\varpi}\omega$. Αφού $|N| = 2m\omega|\dot{\varpi}|$ η τριβή είναι $\vec{T} = 2\mu m\omega|\dot{\varpi}|\hat{\varpi} = -2\mu m\omega\dot{\varpi}\hat{\varpi}$. Άρα $\ddot{\varpi} - \omega^2\varpi = -\frac{g_0}{R}\varpi - 2\mu\omega\dot{\varpi} \Leftrightarrow \ddot{\varpi} + 2\mu\omega\dot{\varpi} + \left(\frac{g_0}{R} - \omega^2\right)\varpi = 0$, όπως πριν (με $\varpi \leftrightarrow x$).

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

(α) Η εξίσωση που δίνει την τροχιά, θέτοντας $F = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = Ku^2$, γίνεται $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mK}{L^2}$ και έχει λύση $u = C\cos(\theta - \theta_0) - \frac{mK}{L^2}$. Θέτοντας $C = \frac{mK}{L^2}\varepsilon$ και $\theta_0 = 0$ (στρέφοντας κατάλληλα το σύστημα συντεταγμένων) βρίσκουμε $u = \frac{mK}{L^2}(-1 + \varepsilon\cos\theta)$ και άρα την ζητούμενη.

(β) Η ακτινική ταχύτητα είναι $\dot{r} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{m}u' = -\frac{K}{L}\varepsilon\sin\theta$, η περιστροφική $r\dot{\theta} = \frac{L}{m}u = \frac{K}{L}(-1 + \varepsilon\cos\theta)$, οπότε η κινητική ενέργεια είναι $\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{mK^2}{2L^2}\left(\varepsilon^2 + 1 - 2\varepsilon\cos\theta\right)$, ενώ η δυναμική ενέργεια είναι $V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = Ku = \frac{mK^2}{L^2}(-1 + \varepsilon\cos\theta)$. Επομένως το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει $E = \frac{mv^2}{2} + V = \frac{mK^2}{2L^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right)$, οπότε η εκκεντρότητα της υπερβολικής τροχιάς του σωματιδίου α είναι $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mK^2}}$.

(γ) Από τις αρχικές συνθήκες (όταν η απόσταση μεταξύ α - Au είναι θεωρητικά άπειρη) η ενέργεια είναι $E = \frac{mv_\infty^2}{2}$, η στροφορμή $L = mbv_\infty$ και η εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{m^2b^2v_\infty^4}{K^2}}$. Επομένως η τροχιά είναι $r = \frac{mb^2v_\infty^2/K}{-1 + \sqrt{1 + \frac{m^2b^2v_\infty^4}{K^2}}\cos\theta}$.

Η ελάχιστη απόσταση (για $\theta = 0$) είναι $r_{\min} = \frac{mb^2v_\infty^2/K}{\sqrt{1 + \frac{m^2b^2v_\infty^4}{K^2}} - 1} = \frac{K}{mv_\infty^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{m^2b^2v_\infty^4}{K^2}}\right)$.

(δ) Η άπειρη απόσταση (αρχική και τελική θέση του σωματιδίου α) αντιστοιχεί σε $\varepsilon\cos\theta_\infty = 1$. Η γωνία εκτροπής είναι $\theta_{\text{εκτρ}} = \pi - 2\theta_\infty = \pi - 2\arccos\frac{1}{\varepsilon}$.

Η σχέση αυτή γράφεται και σαν $\tan\frac{\theta_{\text{εκτρ}}}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_\infty\right) = \frac{1}{\tan\theta_\infty} = \sqrt{\frac{\cos^2\theta_\infty}{1 - \cos^2\theta_\infty}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{K}{mbv_\infty^2}$.

(ε) Η ελάχιστη τιμή του $r_{\min}$ αντιστοιχεί σε $b = 0$ και είναι $\min\{r_{\min}\} = \frac{2K}{mv_\infty^2}$. Η αντικατάσταση δίνει για την ακτίνα του πυρήνα $\frac{2Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0 mv_\infty^2} = \frac{9\times10^9\times2\times2\times79\times(1.6\times10^{-19})^2}{6.6\times10^{-27}\times(4\times10^7)^2}\,\text{m} \approx 7\times10^{-15}$ m.

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

(α) Από $r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon}$ και $r_\alpha = \frac{p}{1-\varepsilon}$ βρίσκουμε $\varepsilon = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = 0.71$ και $p = \frac{2r_\alpha r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = 342.86$ AU.

Ο μεγάλος ημιάξονας είναι $a = \frac{r_\alpha + r_\pi}{2} = 700$ AU και ο μικρός $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ με $c = a - r_\pi$, ή, $b = \sqrt{r_\alpha r_\pi} = 489.90$ AU.

Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Κέπλερ είναι $T^2 \propto a^3$. Αν μετράμε την περίοδο σε γήινα έτη και τον μεγάλο ημιάξονα σε AU είναι $T = a^{3/2}$, επομένως η περίοδος

της κίνησης του Πλανήτη - Χ γύρω από τον Ήλιο είναι $T = 700^{3/2} = 18520$ γήινα έτη.
Η πολική εξίσωση του Πλανήτη - Χ είναι $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$, ή, $r = \dfrac{342.86}{1+0.71\cos\theta}$ AU.
(β) Η διατήρηση ενέργειας $\dfrac{v_\alpha^2}{2} - \dfrac{GM_\odot}{r_\alpha} = \dfrac{v_\pi^2}{2} - \dfrac{GM_\odot}{r_\pi}$ και στροφορμής $v_\alpha r_\alpha = v_\pi r_\pi$ αποτελούν σύστημα με άγνωστες τις ζητούμενες ταχύτητες και δίνουν $v_\pi = \sqrt{\dfrac{2GM_\odot r_\alpha}{r_\pi(r_\alpha + r_\pi)}}$, $v_\alpha = \dfrac{r_\pi}{r_\alpha} v_\pi$. Για τη Γη ισχύει $v_\oplus = \sqrt{\dfrac{GM_\odot}{r_\oplus}}$ όπου $r_\oplus = 1$ AU. Επομένως $\dfrac{v_\pi}{v_\oplus} = \sqrt{\dfrac{2r_\oplus r_\alpha}{r_\pi(r_\alpha + r_\pi)}} = \sqrt{\dfrac{2\times 1\times 1200}{200\times 1400}} = \dfrac{1}{10}\sqrt{\dfrac{6}{7}} = 0.093$ και $\dfrac{v_\alpha}{v_\oplus} = \dfrac{r_\pi}{r_\alpha}\dfrac{v_\pi}{v_\oplus} = \dfrac{1}{10\sqrt{42}} = 0.015$.

(γ) $\dfrac{L}{L_\oplus} = \dfrac{M_X r_\pi v_\pi}{M_\oplus r_\oplus v_\oplus} = 10 \times 200 \times \dfrac{1}{10}\sqrt{\dfrac{6}{7}} = 200\sqrt{\dfrac{6}{7}} = 185.16$ και $\dfrac{E}{E_\oplus} = \dfrac{M_X}{M_\oplus}\dfrac{\dfrac{v_\pi^2}{2} - \dfrac{GM_\odot}{r_\pi}}{\dfrac{v_\oplus^2}{2} - \dfrac{GM_\odot}{r_\oplus}} = 10 \times \dfrac{\dfrac{6/7}{2\times 100} - \dfrac{1}{200}}{\dfrac{1}{2} - 1} = \dfrac{1}{70} = 0.014$.

Τα ίδια προκύπτουν χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις στο αφήλιο της τροχιάς.

(δ) Το διαστημόπλοιο ακολουθεί ελλειπτική τροχιά με $r_\pi^{(\Delta)} = 1$ AU και $r_\alpha^{(\Delta)} = 200$ AU. Επομένως ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς είναι $a^{(\Delta)} = \dfrac{201}{2}$ AU και ο χρόνος κίνησης του διαστημοπλοίου είναι $\dfrac{1}{2}\left[a^{(\Delta)}\right]^{3/2} = 503.75$ γήινα έτη.