Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 4 Δεκεμβρίου 2015
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Θέμα 1^{ο}:

Δαχτυλίδι κινείται περασμένο σε οριζόντια στεφάνη ακτίνας R. Καθώς κινείται δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης συντελεστή μ, δηλ. η στεφάνη του ασκεί δύναμη $\vec{N}+\vec{T}$, όπου $\vec{N}$ η κάθετη αντίδραση και $\vec{T}$ η τριβή η οποία έχει μέτρο $|\vec{T}|=\mu|\vec{N}|$.

(α) Ποια η ταχύτητα και επιτάχυνση του δαχτυλιδιού συναρτήσει της γωνίας $\phi(t)$ των κυλινδρικών συντεταγμένων (και παραγώγων της);

(β) Έστω αγνοούμε το βάρος του δαχτυλιδιού.

(β$_1$) Μέσω του νόμου Νεύτωνα συνδέστε τις δυνάμεις $\vec{T}$ και $\vec{N}$ με την συνάρτηση $\phi(t)$ (και παραγώγους της). Κατόπιν, μέσω της $|\vec{T}|=\mu|\vec{N}|$ βρείτε την διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $\phi(t)$.

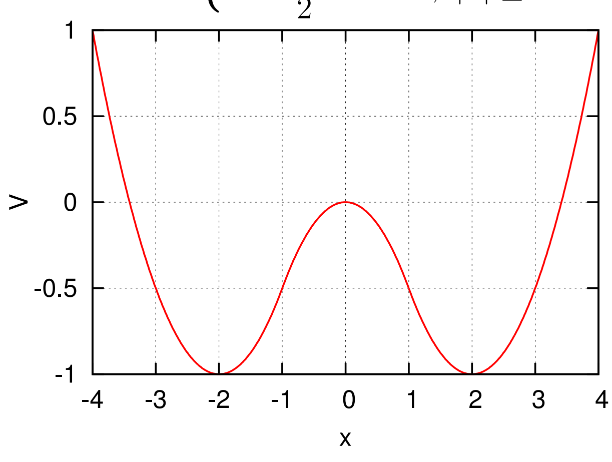
(β$_2$) Βρείτε τη θέση συναρτήσει του χρόνου αν αρχικά $\phi=0$ και $\dot{\phi}=\omega_0>0$. (Βρείτε πρώτα την γωνιακή ταχύτητα $\omega=\dot{\phi}$ σαν συνάρτηση του χρόνου – ή του ϕ – και μετά βρείτε την $\phi(t)$.)

★ (γ) Έστω το το βάρος δεν είναι αμελητέο, οπότε υπάρχει επιπλέον κάθετη αντίδραση που εξουδετερώνει το βάρος $m\vec{g}$. Ποια είναι η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $\phi(t)$; Ολοκληρώστε την για να βρείτε την γωνιακή ταχύτητα συναρτήσει της θέσης $\omega=\omega(\phi)$. Πόση γωνία διαγράφει το δαχτυλίδι πάνω στη στεφάνη πριν σταματήσει;

Θέμα 2^{ο}:

Σώμα μάζας $m=1$ κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση του πεδίου

$$V(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}\,, & |x|\le 1\,,\\ \dfrac{(|x|-2)^2}{2}-1\,, & |x|\ge 1\,. \end{cases}$$



(α) Ποια τα ευσταθή και ασταθή σημεία ισορροπίας;

(β) Σχεδιάστε πρόχειρα τις διάφορες δυνατές τροχιές στο χώρο φάσης $x-\dot{x}$.

(γ) Περιγράψτε την κίνηση του σώματος αν αρχικά:

(γ$_1$) βρίσκεται στο $x=1$ ακίνητο ($\dot{x}=0$),

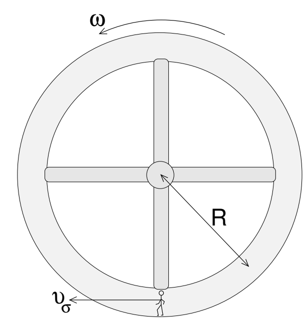
(γ$_2$) βρίσκεται στο $x=1$ και έχει ταχύτητα $\dot{x}=-1$,

(γ$_3$) βρίσκεται στο $x=1$ και έχει ταχύτητα $\dot{x}=+1$.

★ (δ) Βρείτε τη θέση σε κάθε χρόνο για κάθε μια από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Θέμα 3^{ο}:

Ο διαστημικός σταθμός του σχήματος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (για να δημιουργεί τεχνητή βαρύτητα). Ο άνθρωπος κινείται με σχετική ταχύτητα υ_σ ως προς το σταθμό.



Αν $\upsilon_\sigma=\omega R$ με τη συγκεκριμένη φορά κίνησης που φαίνεται στο σχήμα, υπολογίστε το βάρος που νοιώθει ο άνθρωπος εφαρμόζοντας το νόμο Νεύτωνα:

(α) στο μη αδρανειακό σύστημα του σταθμού και

(β) σε αδρανειακό σύστημα ως προς το οποίο ο σταθμός περιστρέφεται.

★ (γ) Για ποια υ_σ ο αδρανειακός και ο μη αδρανειακός παρατηρητής «βλέπουν» ίδια συνισταμένη δυνάμεων;

Θέμα 4^{ο}:

Έστω δένουμε σημειακό σώμα σε κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο μέσα σε ομογενή βαρύτητα g. Στο σώμα ασκείται το βάρος, η δύναμη ελατηρίου και αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας, που αντιστοιχεί σε κρίσιμη απόσβεση. Αν αρχικά το σώμα είναι ακίνητο και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, ενώ τελικά το σώμα σταματά σε απόσταση x_0 από την αρχική του θέση, ποια η θέση σε κάθε χρόνο; (Δεδομένα είναι μόνο τα g και x_0.)

Για πόσο χρόνο κινείται το σώμα;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ:

Δίνεται το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{x^4+c^2}}=\operatorname{arcsinh}\frac{x^2}{|c|}+$ σταθερά, οι γενικές σχέσεις $\vec{\upsilon}_\sigma=\vec{\upsilon}_\alpha-\vec{\upsilon}_0-\vec{\omega}\times\vec{r}$, $\vec{a}_\sigma=\dfrac{\Sigma\vec{F}}{m}-\vec{a}_0-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})-2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_\sigma-\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ και η έκφραση της επιτάχυνσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\vec{a}=\left(\ddot{\varpi}-\varpi\dot{\phi}^2\right)\hat{\varpi}+\left(\varpi\ddot{\phi}+2\dot{\varpi}\dot{\phi}\right)\hat{\phi}+\ddot{z}\hat{z}$.

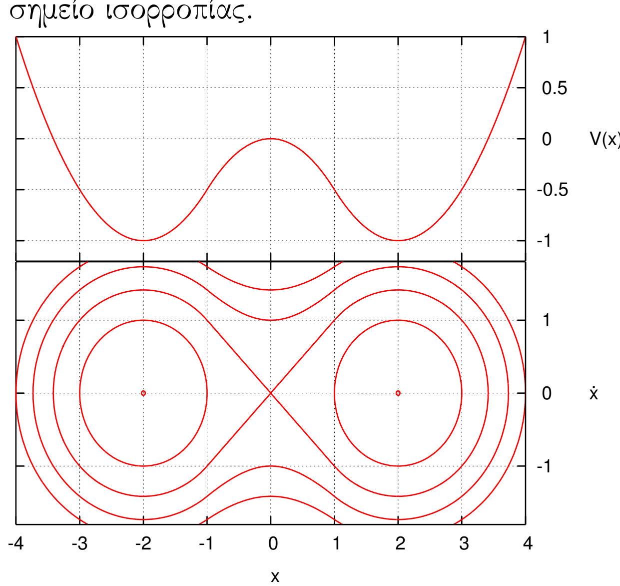
<u>ΛΥΣΕΙΣ:</u>

Θέμα 1^o:

(α) Η ταχύτητα είναι $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$ (θέτουμε $\varpi = R$ και $z = 0$ στην έκφραση $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$).
Όμοια η επιτάχυνση $\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$.
(β$_1$) $m\vec{a} = \vec{N} + \vec{T} \Leftrightarrow -mR\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + mR\ddot{\phi}\hat{\phi} = \vec{N} + \vec{T}$, άρα η συνιστώσα παράλληλα στην ταχύτητα δίνει $\vec{T} = mR\ddot{\phi}\hat{\phi}$ και οι υπόλοιποι όροι $\vec{N} = -mR\dot{\phi}^2\hat{\varpi}$.
$|\vec{T}| = \mu|\vec{N}| \Leftrightarrow |\ddot{\phi}| = \mu\dot{\phi}^2$. Προφανώς το μέτρο της ταχύτητας ελαττώνεται, δηλ. $\ddot{\phi} < 0$. Έτσι καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση $\ddot{\phi} = -\mu\dot{\phi}^2$.
Το ίδιο προκύπτει γράφοντας την τριβή σαν $\vec{T} = -\mu|\vec{N}|\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\mu|\vec{N}|\hat{\phi}$, αφού $\dot{\phi} > 0$ (αρχικά η γωνιακή ταχύτητα είναι θετική και δεν υπάρχει λόγος να αλλάξει η φορά περιστροφής). Η συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα κάθετα στην ταχύτητα δίνει $\vec{N} = -mR\dot{\phi}^2\hat{\varpi}$, οπότε η τριβή είναι $\vec{T} = -\mu mR\dot{\phi}^2\hat{\phi}$ και η συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα πάνω στην ταχύτητα δίνει την εξίσωση κίνησης $\ddot{\phi} = -\mu\dot{\phi}^2$.
(β$_2$) Η διαφορική αυτή εξίσωση, με $\dot{\phi} = \omega(t)$, γράφεται $\dfrac{d\omega}{dt} = -\mu\omega^2 \Leftrightarrow -\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega^2} = \mu\int_0^t dt \Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{\omega} - \dfrac{1}{\omega_0} = \mu t \Leftrightarrow \omega = \dfrac{\omega_0}{1+\mu\omega_0 t}$.
Άρα $\dot{\phi} = \dfrac{\omega_0}{1+\mu\omega_0 t} \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{\phi} d\phi = \int_0^t \frac{\omega_0}{1+\mu\omega_0 t}dt \Leftrightarrow$ $\phi = \dfrac{1}{\mu}\ln(1+\mu\omega_0 t)$.
Αλλιώς: Θεωρώντας $\dot{\phi} = \omega(\phi)$ γράφουμε $\ddot{\phi} = \omega\dfrac{d\omega}{d\phi}$ οπότε η διαφορική εξίσωση $\ddot{\phi} = -\mu\dot{\phi}^2$ γράφεται $\dfrac{d\omega}{d\phi} + \mu\omega = 0$ και ολοκληρώνεται σε $\omega = \omega_0 e^{-\mu\phi}$, δηλ. $\dfrac{d\phi}{dt} = \omega_0 e^{-\mu\phi}$. Η ολοκλήρωση της τελευταίας δίνει $\displaystyle\int_0^{\phi} e^{\mu\phi}d\phi = \omega_0\int_0^t dt \Leftrightarrow \phi = \frac{1}{\mu}\ln(1+\mu\omega_0 t)$.
(γ) $m\vec{a} = \vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} \Leftrightarrow -mR\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + mR\ddot{\phi}\hat{\phi} = \vec{N} + \vec{T} - mg\hat{z}$, άρα η συνιστώσα παράλληλα στην ταχύτητα δίνει $\vec{T} = mR\ddot{\phi}\hat{\phi}$ και οι υπόλοιποι όροι δίνουν $\vec{N} = mg\hat{z} - mR\dot{\phi}^2\hat{\varpi}$.
$|\vec{T}| = \mu|\vec{N}| \Leftrightarrow \ddot{\phi} = -\mu\sqrt{\dot{\phi}^4 + \dfrac{g^2}{R^2}}$.
Η προηγούμενη, με $\dot{\phi} = \omega(\phi)$, $\ddot{\phi} = \omega\dfrac{d\omega}{d\phi}$, ολοκληρώνεται σε $\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{2\omega d\omega}{\sqrt{\omega^4 + g^2/R^2}} = -2\mu\int_0^{\phi}d\phi$. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αλλαγή μεταβλητής $\omega^2 = \dfrac{g}{R}\sinh\xi \Leftrightarrow \xi = \text{arcsinh}\dfrac{\omega^2 R}{g}$ (δίνεται στο τυπολόγιο) και προκύπτει $\xi - \xi_0 = -2\mu\phi \Leftrightarrow$ $\text{arcsinh}\dfrac{\omega^2 R}{g} - \text{arcsinh}\dfrac{\omega_0^2 R}{g} = -2\mu\phi$, ή ισοδύναμα, $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}\sinh\left(\text{arcsinh}\dfrac{\omega_0^2 R}{g} - 2\mu\phi\right)}$.
Χρησιμοποιώντας ταυτότητες υπερβολικών συναρτήσεων το αποτέλεσμα γράφεται και σαν $\omega = \omega_0\sqrt{\cosh(2\mu\phi) - \sqrt{1 + \dfrac{g^2}{\omega_0^4 R^2}}\sinh(2\mu\phi)}$.
Το δαχτυλίδι σταματά όταν $\omega = 0 \Leftrightarrow \phi = \dfrac{1}{2\mu}\text{arcsinh}\dfrac{\omega_0^2 R}{g} = \dfrac{1}{2\mu}\ln\left(\dfrac{\omega_0^2 R}{g} + \sqrt{\dfrac{\omega_0^4 R^2}{g^2} + 1}\right)$.

Θέμα 2^o:

(α) Τα σημεία $x = \pm 2$ όπου η $V(x)$ είναι τοπικά ελάχιστη είναι ευσταθή σημεία ισορροπίας. Το $x = 0$ όπου η $V(x)$ είναι τοπικά μέγιστη είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.
(β)



(γ$_1$) Αν το σώμα είναι αρχικά ακίνητο ($\dot{x} = 0$) στο $x = 1$ έχει ενέργεια $E = 0 + V(1) = -1/2$ και άρα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των σημείων $x = 1$ και $x = 3$ (τα άκρα είναι λύσεις της $V(x) = E$). Μάλιστα η ταλάντωση είναι αρμονική γιατί η δυναμική ενέργεια είναι παραβολική. Αυτό φαίνεται και από το νόμο Νεύτωνα για την κίνηση αυτή $m\ddot{x} = -V' \Leftrightarrow \ddot{x} + x = 2 \Leftrightarrow x = 2 + C_1\cos t + C_2\sin t$ και $\dot{x} = -C_1\sin t + C_2\cos t$. Οι αρχικές συνθήκες δίνουν $C_1 = -1$ και $C_2 = 0$, επομένως $x = 2 - \cos t$.
(γ$_2$) Αν το σώμα ξεκινά από το $x = 1$ με ταχύτητα $\dot{x} = -1$ έχει ενέργεια $E = \dot{x}^2/2 + V(1) = 0$, ίση με το μέγιστο της δυναμικής ενέργειας και άρα θα

πλησιάζει επ΄ άπειρον το σημείο $x = 0$. Για την κίνηση αυτή είναι $m\ddot{x} = -V' \Leftrightarrow \ddot{x} - x = 0 \Leftrightarrow x = D_1 e^t + D_2 e^{-t}$ και $\dot{x} = D_1 e^t - D_2 e^{-t}$. (Οι εκθετικές λύσεις είναι αναμενόμενες αφού το πεδίο είναι απωστικό και η δυναμική ενέργεια παραβολική.) Οι αρχικές συνθήκες δίνουν $D_1 = 0$ και $D_2 = 1$, επομένως $x = e^{-t}$. (Πρακτικά το σώμα θα φτάσει στο σημείο ισορροπίας $x = 0$ σε μερικές μονάδες χρόνου.)

(γ$_3$) Αν το σώμα ξεκινά από το $x = 1$ με ταχύτητα $\dot{x} = +1$ έχει ενέργεια $E = \dot{x}^2/2 + V(1) = 0$, οπότε θα εκτελέσει μέρος αρμονικής ταλάντωσης, από το $x = 1$ στο $x = 2 + \sqrt{2}$ (όπου $V(x) = 0$) και πάλι πίσω στο $x = 1$. Κατόπιν θα μπει στην περιοχή του απωστικού πεδίου και θα πλησιάζει επ΄ άπειρον το σημείο $x = 0$ (αφού έχει ενέργεια ίση με τη μέγιστη δυναμική ενέργεια).

Για το πρώτο μέρος της κίνησης είναι $m\ddot{x} = -V' \Leftrightarrow \ddot{x} + x = 2 \Leftrightarrow x = 2 + C_1 \cos t + C_2 \sin t$ και $\dot{x} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Οι αρχικές συνθήκες δίνουν $C_1 = -1$ και $C_2 = 1$, επομένως $x = 2 - \cos t + \sin t$. Θα ξαναγυρίσει στο $x = 1$ σε χρόνο που ικανοποιεί την $1 = -\cos t + \sin t + 2 \Leftrightarrow \cos(t + \pi/4) = \cos(\pi/4) \Leftrightarrow t + \pi/4 = 2k\pi \pm \pi/4$, δηλ. σε $t_1 = 3\pi/2$ (αυτή είναι η μικρότερη θετική λύση). Στο σημείο αυτό θα έχει ταχύτητα $\dot{x} = -1$, οπότε από εκεί και στο εξής θα εκτελεί την κίνηση που βρέθηκε στο ερώτημα (γ$_2$), απλά μετατοπισμένη χρονικά. Αν θεωρήσουμε $t' = t - t_1$ η θέση θα είναι $x = e^{-t'}$, δηλ. στο δεύτερο αυτό στάδιο της κίνησης θα είναι $x = e^{3\pi/2 - t}$. Η θέση για κάθε χρόνο είναι

$$x = \begin{cases} 2 - \cos t + \sin t\,, & 0 \le t \le 3\pi/2\,, \\ e^{3\pi/2 - t}\,, & t \ge 3\pi/2\,. \end{cases}$$

(δ) Η θέση συναρτήσει του χρόνου έχει βρεθεί στις απαντήσεις των (γ$_1$), (γ$_2$), (γ$_3$).

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

(α) Στο μη αδρανειακό σύστημα ο άνθρωπος εκτελεί κυκλική κίνηση, επομένως η συνισταμένη των δυνάμεων πρέπει να δίνει την κεντρομόλο $m\omega^2 R$ προς το κέντρο. Η Κοριόλειος είναι $2m\omega v_\sigma = 2m\omega^2 R$ με φορά προς το κέντρο και η φυγόκετρος $m\omega^2 R$ αντίθετα. Επομένως $N + 2m\omega^2 R - m\omega^2 R = m\omega^2 R \Leftrightarrow N = 0$.

(β) Στο αδρανειακό σύστημα ο άνθρωπος είναι συνεχώς ακίνητος αφού $\vec{v}_a = \vec{v}_\sigma + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0$. Άρα η $\vec{N}$ που είναι η μόνη πραγματική δύναμη που δέχεται ο άνθρωπος είναι μηδέν.

(γ) Πρέπει οι φυγόκεντρος και Κοριόλειος να είναι αντίθετες $2\omega v_\sigma = \omega^2 R \Leftrightarrow v_\sigma = \omega R/2$ με τη φορά του σχήματος. Τότε οι δύο παρατηρητές βλέπουν κυκλικές κινήσεις αντίθετης φοράς, $\vec{v}_\alpha = -\vec{v}_\sigma$ (το μέτρο της κεντρομόλου είναι ίδιο).

Για κάθε v_σ, ο αδρανειακός γράφει $mv_\alpha^2/R = N$ με $v_\alpha = v_\sigma - \omega R$, ενώ ο μη αδρανειακός γράφει $mv_\sigma^2/R = N + 2m\omega v_\sigma - m\omega^2 R$.

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

Αν $m\omega^2$ είναι η σταθερά του ελατηρίου η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{x} = mg - 2m\gamma\dot{x} - m\omega^2 x \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = g$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς έχει διπλή λύση αφού η απόσβεση είναι κρίσιμη. Άρα $\gamma = \omega$ και οι λύσεις της ομογενούς είναι $e^{-\omega t}$ και $te^{-\omega t}$. Μια μερική λύση είναι σταθερή και ίση με $\dfrac{g}{\omega^2}$ (η οποία είναι η θέση ισορροπίας του σώματος), οπότε η γενική λύση είναι $x = \dfrac{g}{\omega^2} + (C_1 + C_2 t)\, e^{-\omega t}$, $\dot{x} = (C_2 - \omega C_1 - \omega C_2 t)\, e^{-\omega t}$.
Σε μεγάλους χρόνους $x_0 = g/\omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{g/x_0}$.
Από αρχικές συνθήκες $x = 0$, $\dot{x} = 0$ βρίσκουμε $C_1 = -x_0$, $C_2 = -\omega x_0$ και άρα σε κάθε χρόνο $x = x_0\,[1 - (1 + \omega t)\, e^{-\omega t}]$ με $\omega = \sqrt{g/x_0}$.
Το σώμα πρακτικά σταματά σε χρόνο $\sim 5/\omega$.