Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 1 Σεπτεμβρίου 2015
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________________, ΑΜ: __ __ __ __ __ __ __

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 8ης Ιανουαρίου 2015: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐ 13η ☐

Θέμα 1ο:

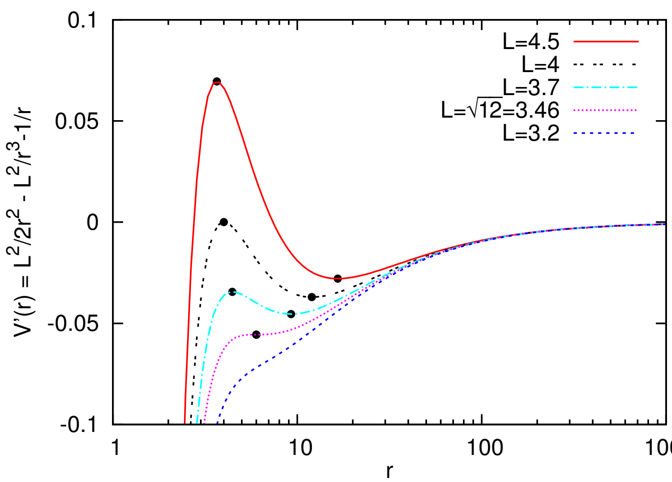
(α) Σώμα κινείται μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης (η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος του $m\vec{g}$). Σε κάποια στιγμή κινείται απομακρυνόμενο από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα μέτρου v και διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με τον ορίζοντα. Τη στιγμή εκείνη ζητούνται
(α_1) η επιτρόχιος επιτάχυνση,
(α_2) η κεντρομόλος επιτάχυνση,
(α_3) η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς.
(β) Όμοια αν στο σώμα ασκείται επιπλέον και αντίσταση αέρα μέτρου $F(v)$, αντίθετη στην ταχύτητα.
(γ) Καθώς το σώμα κινείται υπό την επίδραση του βάρους του και μόνο (αγνοήστε εδώ την αντίσταση), πότε η ακτίνα καμπυλότητας γίνεται ελάχιστη; Πόση είναι αυτή η ελάχιστη τιμή;
★ (δ) Στην περίπτωση με αντίσταση $-F(v)\dfrac{\vec{v}}{v}$ ποια η συνθήκη ελάχιστης ακτίνας καμπυλότητας;

Θέμα 2ο:

(α) Έστω ιδανικό εκκρεμές το οποίο εκτελεί μικρές ταλαντώσεις σε κατακόρυφο επίπεδο, μέσα σε υγρό. Η συνισταμένη βάρους και άνωσης είναι $m\omega_0^2 R$ (m η μάζα του σώματος, R η ακτίνα του νήματος και ω_0 σταθερά), ενώ η αντίσταση από το υγρό είναι $-2m\gamma\vec{v}_{\sigma\chi}$ όπου γ θετική σταθερά με $\gamma < \omega_0$ και $\vec{v}_{\sigma\chi} = \vec{v} - \vec{c}$ η ταχύτητα του σώματος ως προς το υγρό ($\vec{c}$ είναι η ταχύτητα του υγρού). Αν το υγρό είναι ακίνητο ($c = 0$) δώστε τη γενική λύση για την γωνιακή απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας $\phi(t)$.
(β) Έστω το προηγούμενο εκκρεμές ισορροπεί με το υγρό ακίνητο. Σε κάποια στιγμή $t = 0$ το υγρό αρχίζει να κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα $\vec{c}$.
(β_1) Θεωρώντας ότι η απομάκρυνση από την αρχική θέση μένει πάντα μικρή (κάτι που ισχύει για αρκούντως μικρή c), βρείτε τη θέση του εκκρεμούς σε κάθε χρόνο $t > 0$.
(β_2) Που θα καταλήξει το σώμα σε «μεγάλους» χρόνους; Ποια η έννοια των «μεγάλων» χρόνων;
★ (β_3) Ποιο το εύρος κίνησης του εκκρεμούς; Θα ξαναπεράσει από την αρχική του θέση; Για ποιες ταχύτητες c είναι σωστή η θεώρηση μικρών ταλαντώσεων;

Θέμα 3ο:

Η κίνηση σώματος μάζας m γύρω από μια μελανή οπή Schwarzschild μάζας M περιγράφεται από τις διατηρήσεις στροφορμής $L = mr^2\dot{\theta}$ και ενέργειας $E = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{L^2}{2mr^2}\left(1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}\right) - \dfrac{GMm}{r}$.
(α) Το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $E = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + V'(r)$ με το γράφημα της $V'(r)$ για διάφορες τιμές της στροφορμής να φαίνεται παρακάτω (σε κατάλληλες μονάδες, με την δυναμική ενέργεια σε μονάδες mc^2, την απόσταση σε μονάδες GM/c^2 και την στροφορμή σε μονάδες GMm/c). Τα μαύρα σημεία είναι τα ακρότατα της συνάρτησης $V'(r)$.



Βρείτε τις ακτίνες όπου η $V'(r)$ έχει ακρότατα, οι οποίες αντιστοιχούν σε κυκλικές τροχιές.
★ (β) Δείξτε ότι όλες οι ευσταθείς κυκλικές τροχιές έχουν ακτίνες μεγαλύτερες του $6GM/c^2$.
(γ) Δείξτε ότι όλες οι τροχιές του σώματος είναι λύσεις της $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{GMm^2}{L^2} + \dfrac{3GM}{c^2}u^2$ με $u = \dfrac{1}{r}$.
(δ) Έστω R_+ η ακτίνα κυκλικής ευσταθούς τροχιάς που αντιστοιχεί σε στροφορμή L, οπότε η $u = 1/R_+$ ικανοποιεί την εξίσωση του προηγούμενου ερωτήματος, δηλ. $\dfrac{1}{R_+} = \dfrac{GMm^2}{L^2} + \dfrac{3GM}{c^2 R_+^2}$. Αν διαταράξουμε την κυκλική αυτή τροχιά χωρίς να αλλάξουμε τη στροφορμή, δηλ. $u = \dfrac{1 + \epsilon(\theta)}{R_+}$ με $|\epsilon(\theta)| \ll 1$, ποια εξίσωση ικανοποιεί η συνάρτηση $\epsilon(\theta)$ και ποια η λύση της;

Θέμα 4^o:

Ένας δορυφόρος της Γης κινείται κυκλικά σε απόσταση r_o από το κέντρο της. Σε κάποια στιγμή σπάει σε δύο ίσα μέρη μαζών $m_1 = m_2 = m$. Το m_1 αμέσως μετά τη διάσπαση κινείται στην ίδια κυκλική τροχιά, αλλά με αντίθετη φορά σε σχέση με την κίνηση του αρχικού δορυφόρου. Βρείτε τα χαρακτηριστικά της κίνησης του m_2. Συγκεκριμένα βρείτε:

(α) την ταχύτητά του αμέσως μετά τη διάσπαση,

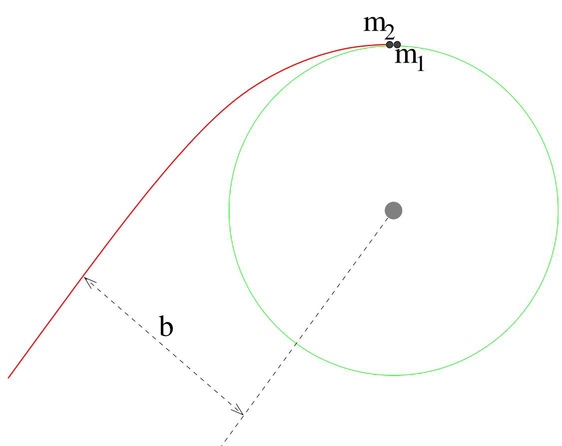
(β) την ενέργεια και τη στροφορμή του,

(γ) την εκκεντρότητα της τροχιάς του,

(δ) την τελική ταχύτητά του (μέτρο και διεύθυνση) και

(ε) την απόσταση b που φαίνεται στο σχήμα.

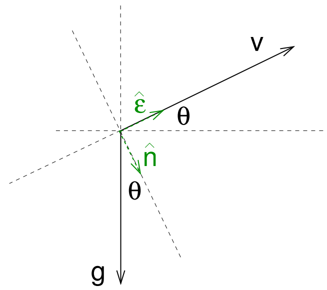
Δεδομένα θεωρούνται η μάζα της Γης M, η μάζα m, η ακτίνα r_o και η σταθερά G.



Δίνονται οι σχέσεις $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$ με $p = \dfrac{L^2}{GMm^2}$ και $\varepsilon = \sqrt{1+\dfrac{2L^2E}{G^2M^2m^3}}$.

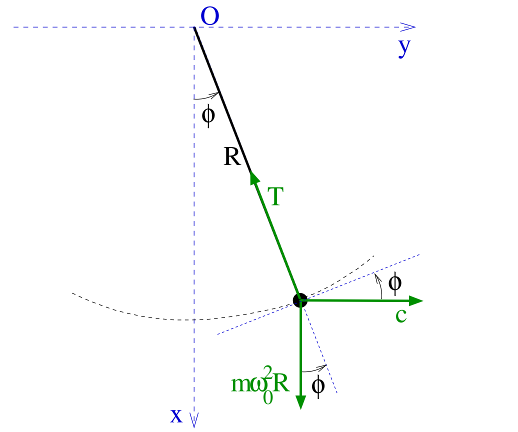
ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:



(α₁) $\vec{a}_\varepsilon = (\vec{a}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon} = (\vec{g}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon} = -g\sin\theta\ \hat{\varepsilon}$.
(α₂) $\vec{a}_\kappa = (\vec{a}\cdot\hat{n})\hat{n} = (\vec{g}\cdot\hat{n})\hat{n} = g\cos\theta\ \hat{n}$.
(α₃) $a_\kappa = v^2/\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R} = v^2/(g\cos\theta)$.
(β) Τώρα $\vec{a} = \vec{g} - \dfrac{F}{m}\hat{\varepsilon}$ οπότε η επιτρόχιος γίνεται $\vec{a}_\varepsilon = (\vec{a}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon} = \left(-g\sin\theta - \dfrac{F}{m}\right)\hat{\varepsilon}$, ενώ η κεντρομόλος και η ακτίνα καμπυλότητας μένουν όπως πριν.
(γ) Είναι $\cos\theta = \dfrac{v_x}{v}$, όπου v_x η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας, η οποία μένει σταθερή. Άρα η $\mathcal{R} = \dfrac{v^2}{g\cos\theta} = \dfrac{v^3}{gv_x}$ γίνεται ελάχιστη στο ανώτατο ύψος όπου η v γίνεται ελάχιστη. Αφού $v_{\min} = v_x$ η ελάχιστη τιμή είναι $\mathcal{R}_{\min} = \dfrac{v_x^2}{g} = \dfrac{v^2\cos^2\theta}{g}$, δηλ. $\cos^3\theta$ φορές μικρότερη της $\mathcal{R} = v^2/(g\cos\theta)$.
(δ) Αν $\hat{x}$ ο οριζόντιος άξονας στη φορά της οριζόντιας κίνησης και $\hat{y}$ ο κατακόρυφος με φορά προς τα πάνω, είναι $\dot{v}_x = -\dfrac{F}{m}\dfrac{v_x}{v}$ και $\dot{v}_y = -g - \dfrac{F}{m}\dfrac{v_y}{v}$. Χρησιμοποιώντας αυτές στην χρονική παράγωγο της $\mathcal{R} = \dfrac{(v_x^2+v_y^2)^{3/2}}{gv_x}$ βρίσκουμε $\dfrac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = \dfrac{3g}{v}\left(-\dfrac{v_y}{v} - \dfrac{2F}{3mg}\right)$. Άρα όσο ανεβαίνει το σώμα ($v_y > 0$) η $\mathcal{R}$ ελαττώνεται. Το ίδιο και όταν κατεβαίνει ($v_y < 0$) όσο ισχύει $\dfrac{-v_y}{v} < \dfrac{2F}{3mg}$. Όταν γίνει $\dfrac{-v_y}{v} = \dfrac{2F}{3mg}$ η ακτίνα καμπυλότητας γίνεται ελάχιστη. Στη συνέχεια η $|v_y|$ συνεχίζει να αυξάνεται μέχρι να πάρει τη μέγιστη τιμή της όταν $F = mg$. Στην περιοχή αυτή η ακτίνα καμπυλότητας επίσης αυξάνεται και γίνεται άπειρη όταν η ταχύτητα αποκτά την οριακή της τιμή (διότι $v_x \to 0$).
Η συνθήκη για ελάχιστη ακτίνα καμπυλότητας γράφεται και σαν $mg_\parallel = \dfrac{2}{3}F$, όπου $g_\parallel = \vec{g}\cdot\dfrac{\vec{v}}{v} = g\dfrac{-v_y}{v}$ η προβολή του $\vec{g}$ πάνω στην κίνηση. Αν $mg_\parallel < \dfrac{2}{3}F$ η $\mathcal{R}$ μειώνεται ενώ αν $mg_\parallel > \dfrac{2}{3}F$ αυξάνεται.

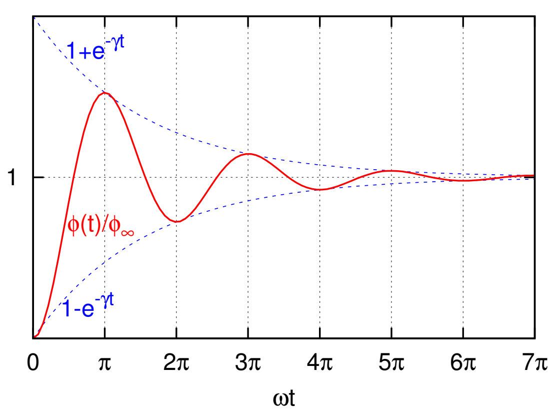
Θέμα 2ο:



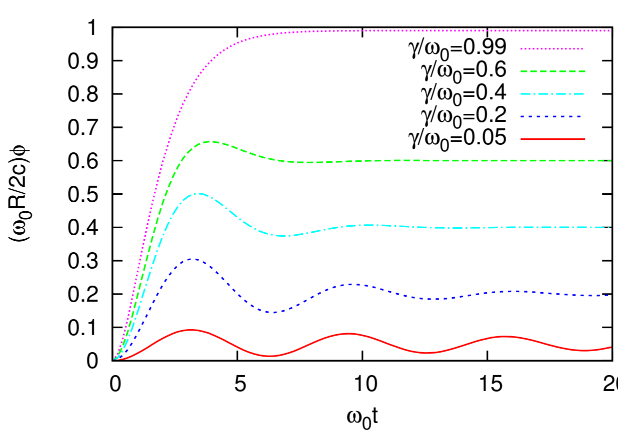
$\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a} = R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{\varpi}$.
Η προβολή του νόμου Νεύτωνα στη διεύθυνση $\hat{\phi}$ δίνει την εξίσωση κίνησης $mR\ddot{\phi} = m\omega_0^2 R\hat{x}\cdot\hat{\phi} - 2m\gamma(R\dot{\phi} - \vec{c}\cdot\hat{\phi})$. Είναι $\hat{x}\cdot\hat{\phi} = -\sin\phi$ ενώ για οριζόντια ταχύτητα του υγρού $\vec{c} = c\hat{y}$ είναι $\vec{c}\cdot\hat{\phi} = c\cos\phi$. Επομένως η γενική εξίσωση κίνησης είναι $mR\ddot{\phi} = -m\omega_0^2 R\sin\phi - 2m\gamma R\dot{\phi} + 2m\gamma c\cos\phi \Leftrightarrow$ $\ddot{\phi} + 2\gamma\dot{\phi} + \omega_0^2\sin\phi - \dfrac{2\gamma c}{R}\cos\phi = 0$.
(α) Για ακίνητο υγρό ($c = 0$) και μικρές ταλαντώσεις ($\sin\phi \approx \phi$) έχουμε $\ddot{\phi} + 2\gamma\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0$. Οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου για ασθενή απόσβεση είναι $-\gamma \pm i\omega$ με $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, οπότε η γενική λύση είναι $\phi = e^{-\gamma t}\left[C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\right]$.
(β₁) Για οριζόντια κινούμενο υγρό με σταθερή ταχύτητα $\vec{c} = c\hat{y}$ και μικρές ταλαντώσεις (κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους ως προς ϕ θέτουμε $\sin\phi \approx \phi$, $\cos\phi \approx 1$) έχουμε $\ddot{\phi} + 2\gamma\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = \dfrac{2\gamma c}{R}$. Μια μερική λύση είναι η σταθερά $\phi_\infty = \dfrac{2\gamma c}{\omega_0^2 R}$, ενώ η λύση της ομογενούς βρέθηκε πριν. Επομένως η γενική λύση είναι $\phi = \phi_\infty + e^{-\gamma t}\left[C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\right]$ και η παράγωγός της $\dot{\phi} = e^{-\gamma t}\left[(\omega C_2 - \gamma C_1)\cos(\omega t) - (\gamma C_2 + \omega C_1)\sin(\omega t)\right]$. Με αρχικές συνθήκες $\phi(t=0) = 0$, $\dot{\phi}(t=0) = 0$ βρίσκουμε $C_1 = -\phi_\infty$, $C_2 = -\dfrac{\gamma}{\omega}\phi_\infty$, οπότε η λύση είναι $\phi(t) = \phi_\infty - \dfrac{\phi_\infty}{\omega}e^{-\gamma t}\left[\omega\cos(\omega t) + \gamma\sin(\omega t)\right]$.
Ορίζοντας $\omega = \omega_0\cos\lambda$ και $\gamma = \omega_0\sin\lambda$ με $\lambda \in (0, \pi/2)$, η λύση μπορεί να γραφεί σαν
$\phi(t) = \phi_\infty - \dfrac{\phi_\infty}{\cos\lambda}e^{-\omega_0 t\sin\lambda}\cos(\lambda - \omega_0 t\cos\lambda)$.
(β₂) Το σώμα θα καταλήξει στη γωνία ϕ_∞. Θεωρητικά αυτό θα γίνει σε $t \to \infty$, πρακτικά όμως σε «μεγάλους» χρόνους $\sim 5/\gamma$ στους οποίους το $e^{-\gamma t}$ μπορεί να θεωρηθεί μηδέν.

Η τελική θέση ισορροπίας βρίσκεται και από την απαίτηση οι συνιστώσες του βάρους και της αντίστασης πάνω στο $\hat{\phi}$ να αλληλοαναιρούνται. Έτσι βρίσκουμε το ακριβές αποτέλεσμα $m\omega_0^2 R\sin\phi_\infty = 2m\gamma c\cos\phi_\infty \Leftrightarrow \tan\phi_\infty = \dfrac{2\gamma c}{\omega_0^2 R}$ το οποίο για μικρές γωνίες δίνει $\phi_\infty = \dfrac{2\gamma c}{\omega_0^2 R}$.

(β$_3$) Αφού $\dot{\phi} = \dfrac{\phi_\infty \omega_0^2}{\omega} e^{-\gamma t}\sin(\omega t)$ η $\phi(t)$ είναι αύξουσα στα διαστήματα $\omega t \in (2k\pi, 2k\pi + \pi)$ με $k \in \mathbb{N}$ στα οποία αυξάνεται από $\phi_\infty\left(1 - e^{-2k\pi\gamma/\omega}\right)$ σε $\phi_\infty\left(1 + e^{-(2k+1)\pi\gamma/\omega}\right)$ και φθίνουσα στα διαστήματα $\omega t \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$ με $k \in \mathbb{N}$ στα οποία μειώνεται από $\phi_\infty\left(1 + e^{-(2k+1)\pi\gamma/\omega}\right)$ σε $\phi_\infty\left(1 - e^{-(2k+2)\pi\gamma/\omega}\right)$.
Όλα τα τοπικά ελάχιστα είναι θετικά για $k \in \mathbb{N}^\star$ και μηδέν για $k = 0$. Άρα $\phi > 0$ για $t > 0$, δηλ. το σώμα δεν ξαναγυρίζει στην αρχική θέση.
Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της γωνίας είναι το $\phi_{\max} = \phi_\infty\left(1 + e^{-\pi\gamma/\omega}\right)$.
Η προσέγγιση των «μικρών» γωνιών ισχύει σε κάθε χρόνο αν $\phi_{\max} \ll 1$, ή ισοδύναμα αν $c \ll \omega_0^2 R/\gamma$.
Το επόμενο γράφημα δείχνει τη λύση για $\gamma/\omega_0 = 0.2$. Φαίνονται τα τοπικά ελάχιστα και μέγιστα.



Το επόμενο γράφημα δείχνει τη λύση για διάφορα γ/ω_0. Για συγκεκριμένα ω_0 και c, το γ καθορίζει την περίοδο, την τελική θέση και το πόσο γρήγορα φτάνει το σώμα σε αυτή.



Θέμα 3ο:

(α) $\dfrac{dV'}{dr} = \dfrac{GMm}{r^4}\left(r^2 - \dfrac{L^2}{GMm^2}r + \dfrac{3L^2}{m^2c^2}\right) = 0$ στα σημεία $r = R_\pm = \dfrac{L^2\left(1 \pm \lambda^2\right)}{2GMm^2} = \dfrac{6GM/c^2}{1 \mp \lambda^2}$ όπου $\lambda^2 = \sqrt{1 - \dfrac{12G^2M^2m^2}{L^2c^2}}$. Όπως φαίνεται από το σχήμα η μεγαλύτερη ακτίνα αντιστοιχεί σε ελάχιστο οπότε είναι ευσταθής και η μικρότερη ακτίνα αντιστοιχεί σε μέγιστο και είναι ασταθής.
Το ίδιο προκύπτει και από τη μελέτη της μονοτονίας της V' μέσω του πρόσημου της παραγώγου dV'/dr, το οποίο είναι αρνητικό ανάμεσα στις ρίζες $R_\pm$ και θετικό για $r > R_+$ και $r < R_-$.

(β) Προφανώς τα ακρότατα αυτά υπάρχουν αν το υπόριζο στην έκφραση του λ^2 είναι θετικό, δηλ. αν $L > \dfrac{\sqrt{12}GMm}{c}$ το οποίο αντιστοιχεί σε ακτίνες $R_+ > 6GM/c^2$.
Η ελάχιστη τιμή $6GM/c^2$ αντιστοιχεί στην «εσώτατη ευσταθή κυκλική τροχιά» (innermost stable circular orbit).

(γ) Θέτοντας $\dot{r} = \dot{\theta}\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{L}{mr^2}\dfrac{dr}{d\theta} = -\dfrac{L}{m}\dfrac{du}{d\theta}$ στο ολοκλήρωμα ενέργειας έχουμε $E = \dfrac{L^2}{2m}\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + \dfrac{L^2}{2m}u^2 - \dfrac{L^2GM}{mc^2}u^3 - GMmu$. Παραγωγίζοντας ως προς u έχουμε $0 = \dfrac{L^2}{m}\dfrac{du}{d\theta}\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{du}{d\theta}\right) + \dfrac{L^2}{m}u - \dfrac{3L^2GM}{mc^2}u^2 - GMm$. Θέτοντας $\dfrac{du}{d\theta}\dfrac{d}{du} = \dfrac{d}{d\theta}$ βρίσκουμε τη ζητούμενη.
Αλλιώς: Το ολοκλήρωμα ενέργειας δείχνει ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με κίνηση σώματος σε κεντρικό πεδίο $V(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2}\left(-\dfrac{2GM}{c^2r}\right) - \dfrac{GMm}{r}$, $F(r) = -\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{3L^2GM}{mc^2r^4} - \dfrac{GMm}{r^2}$. Αντικαθιστώντας τη δύναμη αυτή στην εξίσωση $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2}$ βρίσκουμε τη ζητούμενη.

(δ) Αντικαθιστώντας $u = \dfrac{1 + \epsilon(\theta)}{R_+}$ στην εξίσωση που καθορίζει την τροχιά και διώχνοντας τόσο τους όρους μηδενικής τάξης (λόγω της $\dfrac{1}{R_+} = \dfrac{GMm^2}{L^2} + \dfrac{3GM}{c^2R_+^2}$) όσο και τον όρο δεύτερης τάξης ϵ^2, βρίσκουμε $\dfrac{d^2\epsilon}{d\theta^2} + \left(1 - \dfrac{6GM}{c^2R_+}\right)\epsilon = 0$, ή αντικα-

θιστώντας την ακτίνα $\frac{d^2\epsilon}{d\theta^2} + \lambda^2\epsilon = 0$. Η διαταραχή γύρω από την τροχιά ακτίνας R_+ είναι αρμονική συνάρτηση $\epsilon = e\cos\left[\lambda\left(\theta - \theta_0\right)\right]$ (με κατάλληλη στροφή του συστήματος μπορούμε να διώξουμε τη σταθερά θ_0). Φαίνεται κι από εδώ ότι η τροχιά αυτή είναι ευσταθής. Η εξίσωση της διαταραγμένης τροχιάς είναι $r = \frac{R}{1 + e\cos\left(\lambda\theta\right)}$.
Η εξίσωση αυτή περιγράφει έλλειψη της οποίας το περίκεντρο μεταπίπτει (δείτε και το 4ο θέμα της εξέτασης 16/2/2011).
Όμοια μελέτη για διαταραχές γύρω από την ασταθή κυκλική τροχιά R_- καταλήγει στην εξίσωση $\frac{d^2\epsilon}{d\theta^2} - \lambda^2\epsilon = 0$, εξίσωση που έχει εκθετικές λύσεις κάτι που δείχνει ότι η τροχιά είναι ασταθής.

Θέμα 4^o:

(α) Η αρχική ταχύτητα του δορυφόρου είναι $v_o = \sqrt{\frac{GM}{r_o}}$ (από $\frac{(2m)v_o^2}{r_o} = \frac{GM(2m)}{r_o^2}$).
Το m_1 κινείται επίσης με ταχύτητα v_o (από $\frac{mv_o^2}{r_o} = \frac{GMm}{r_o^2}$).
Από διατήρηση ορμής $(2m)v_o = -mv_o + mv_2 \Leftrightarrow v_2 = 3v_o = 3\sqrt{\frac{GM}{r_o}}$ είναι η αρχική ταχύτητα του m_2.
(β) $E = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_o} = \frac{7}{2}\frac{GMm}{r_o}$,
$L = mr_ov_2 = 3m\sqrt{GMr_o}$.
(γ) $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}} = 8$.
(δ) Το m_2 εκτελεί υπερβολική τροχιά. Η τελική ταχύτητά του έχει μέτρο v_∞ με $E = \frac{mv_\infty^2}{2} \Leftrightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{7GM}{r_o}}$.
Όταν η απόσταση απειρίζεται είναι $1+\varepsilon\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{8} \approx \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}$ ακτίνια $= 97.2$ μοίρες. Άρα η τελική ταχύτητα σχηματίζει γωνία 7.2 μοιρών με την αρχική.
(ε) $L = m|\vec{r}\times\vec{v}| = mr_\perp v = mbv_\infty \Leftrightarrow b = \frac{3}{\sqrt{7}}r_o$.