Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 9 Ιουνίου 2015
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 8ης Ιανουαρίου 2015: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐ 13η ☐

Θέμα 1ο:

Από ύψος h πάνω από το έδαφος αφήνουμε σώμα αμελητέας επιφάνειας, οπότε και η αντίσταση αέρα είναι αμελητέα. Λόγω της (ομογενούς) βαρύτητας g αυτό φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα v_0. Αν αφήσουμε άλλο σώμα μάζας m στο οποίο εκτός του βάρους ασκείται και αντίσταση $\lambda m v^2$ (με λ σταθερά) αυτό φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα v_1. Δείξτε ότι στο όριο της μικρής αντίστασης είναι $v_1 \approx v_0 \left(1 - \dfrac{\lambda h}{2}\right)$.

Δίνονται τα αναπτύγματα $\dfrac{1-e^{-2u}}{2u} = 1 - u + \mathcal{O}(u^2)$, $(1-u)^k = 1 - ku + \mathcal{O}(u^2)$.

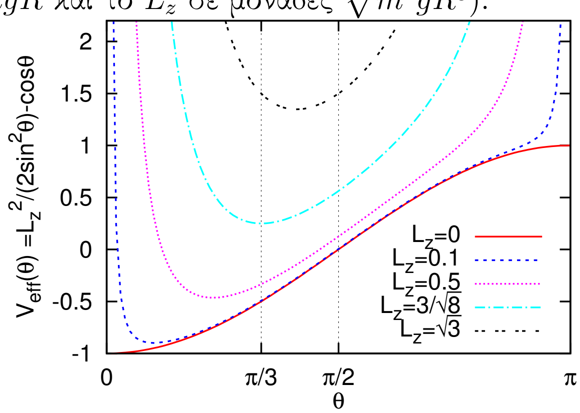
Θέμα 2ο:

Σημειακό σώμα μάζας m κινείται χωρίς τριβές στο εσωτερικό ημισφαιρικού μπολ ακτίνας R κάτω από την επίδραση του βάρους του $mg\hat{z}$ και της κάθετης αντίδρασης $\vec{N} = -N\hat{r}$ (σφαιρικό εκκρεμές).

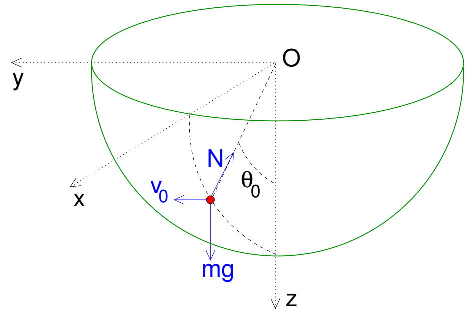
(α) Δείξτε ότι διατηρείται η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής $L_z = (\vec{r} \times m\vec{v}) \cdot \hat{z}$.
Βρείτε την έκφρασή της σε σφαιρικές συντεταγμένες.
Ίσως χρειαστείτε την $\hat{z} = \cos\theta\, \hat{r} - \sin\theta\, \hat{\theta}$.

(β) Γράψτε σε σφαιρικές συντεταγμένες την κινητική, τη βαρυτική δυναμική και την ολική ενέργεια E.

(γ) Δείξτε ότι η διατήρηση της στροφορμής L_z και της ενέργειας E ανάγουν το πρόβλημα σε «μονοδιάστατο» στο οποίο ισχύει $\dfrac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\theta) = E$ με $V_{\text{eff}}(\theta) = \dfrac{L_z^2}{2mR^2\sin^2\theta} - mgR\cos\theta$. Το γράφημα της $V_{\text{eff}}(\theta)$ για διάφορα L_z είναι το ακόλουθο (με το V_{eff} σε μονάδες mgR και το L_z σε μονάδες $\sqrt{m^2 g R^3}$).



(δ) Έστω αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $\theta_0 = \pi/3$ και έχει οριζόντια ταχύτητα $\vec{v} = v_0\hat{\phi}$ (εφαπτόμενη στο μπολ).



(δ$_1$) Για δεδομένο v_0 ποια η στροφορμή L_z, ποια η συνάρτηση $V_{\text{eff}}(\theta)$ και ποια η ενέργεια E;

(δ$_2$) Για ποιες τιμές της v_0 το σώμα δεν φεύγει έξω από το ημισφαιρικό μπολ;

(δ$_3$) Για ποια v_0 το σώμα εκτελεί οριζόντια κυκλική τροχιά θ = σταθερό = $\pi/3$ (κωνικό εκκρεμές);

★ (δ$_4$) Αν διαταράξουμε την κυκλική αυτή τροχιά δίνοντας μια στιγμιαία μικρή ώθηση στην $\hat{\theta}$ κατεύθυνση ποια η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων; Ποια η σχέση της με την περίοδο της αρχικής κυκλικής κίνησης;

Θέμα 3ο:

(α) Σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο κεντρικής δύναμης $f(r) = -\dfrac{dV}{dr}$ με $V = V(r)$. Αν L η στροφορμή του, $u = 1/r$, u' και u'' η πρώτη και δεύτερη παράγωγος του u ως προς την πολική γωνία θ στο επίπεδο της τροχιάς, δείξτε ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος γράφονται $\vec{v} = \dfrac{L}{m}\left(-u'\hat{r} + u\hat{\theta}\right)$, $\vec{a} = -\dfrac{L^2}{m^2}u^2\left(u'' + u\right)\hat{r}$, ενώ το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{L^2}{2m}\left(u'^2 + u^2\right) + V\left(\dfrac{1}{u}\right) = E$.

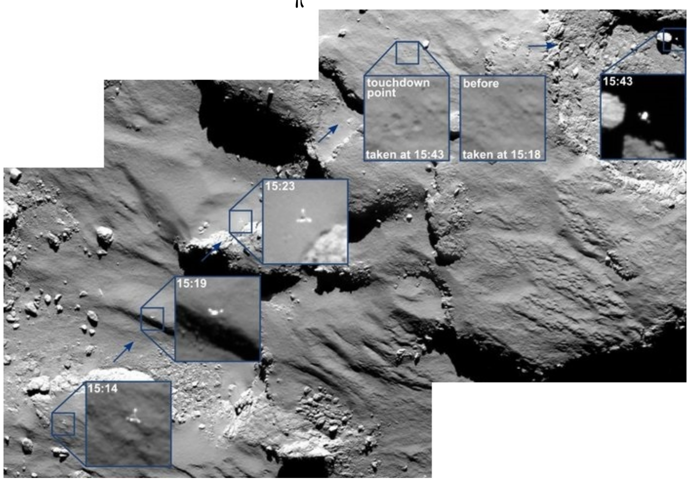
(β) Έστω $f(r) = -\dfrac{dV}{dr}$ με $V(r) = -\dfrac{\lambda^2}{2r^2}\left(1 + \dfrac{\kappa^2}{r^{2n}}\right)$, όπου n, κ, λ σταθερές (οι κ και λ θετικές).

(β$_1$) Δείξτε ότι η σπειροειδής τροχιά $r = (r_o^n - n\kappa\theta)^{1/n}$ αντιστοιχεί σε κίνηση σώματος m μέσα στο παραπάνω πεδίο, με στροφορμή $L = \lambda\sqrt{m}$ και ενέργεια $E = 0$.

(β$_2$) Ποια η σχέση της απόστασης r με το χρόνο γι' αυτή την τροχιά; Σε πόσο χρόνο το σώμα θα φτάσει στο $r = 0$ στις περιπτώσεις $n > -2$, $n = -2$ και $n < -2$;
Δίδεται η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$.

Θέμα 4^o:

(α) Όπως θα ακούσατε πρόσφατα, το διαστημικό σκάφος προσεδάφισης Philae της αποστολής Rosetta του Ευρωπαϊκού Οργανισμού Διαστήματος (ESA) μετά από ένα δεκάχρονο ταξίδι τελικά προσεδαφίστηκε την 12η Νοεμβρίου 2014 στην επιφάνεια του κομήτη 67P/Churyumov-Gerasimenko. Ήταν η πρώτη προσεδάφιση διαστημοπλοίου σε κομήτη. Όπως δείχνουν οι φωτογραφίες που πάρθηκαν από το μητρικό διαστημόπλοιο Rosetta, το σκάφος Philae αναπήδησε στην επιφάνειά του κομήτη, παρότι υπήρξε προσπάθεια να αποφευχθεί κάτι τέτοιο χρησιμοποιώντας γάντζους. Υπήρχε μάλιστα ο φόβος ότι μετά την πρώτη αναπήδηση το διαστημόπλοιο θα εκτοξευόταν πάλι στο διάστημα.



Ο κομήτης 67P έχει ακανόνιστο σχήμα $4.1 \times 3.3 \times 1.8$ km αλλά προσεγγιστικά εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι σφαιρικός με μια μέση ακτίνα 2 km, έχοντας την ίδια πυκνότητα με αυτή της Γης.

Υποθέστε ότι είσθε και εσείς στην επιφάνεια του κομήτη 67P και προσπαθείτε να σκεφτείτε αν μπορείτε να εκτοξευθείτε στο διάστημα με ένα πηδηματάκι. Στη Γη, όταν θέλετε να κάνετε ένα πήδημα, λυγίζετε τα γόνατά σας για να χαμηλώσει το κέντρο βάρους του σώματός σας κατά περίπου 50 cm και στη συνέχεια αναπηδώντας φτάνετε σε ένα ύψος περίπου 60 cm πάνω από το κεφάλι σας. Υπολογίστε το έργο που δαπανάτε σε αυτή τη διαδικασία στη Γη και θεωρείστε ότι και στον κομήτη δαπανάτε την ίδια ενέργεια. Με αυτό το δεδομένο και την ακτίνα της Γης $R_{\oplus} = 6400$ km, υπολογίστε την ακτίνα R_{κ} του κομήτη από τον οποίο με ένα τέτοιο πηδηματάκι μπορείτε να εκτοξευτείτε στο διάστημα. Τι συμπέρασμα βγάζετε, θα μπορέσετε να εκτοξευθείτε στο διάστημα με ένα πηδηματάκι από την επιφάνειά του 67P;

(β) Με δεδομένο ότι ένας δορυφόρος χαμηλής τροχιάς γύρω από τη Γη έχει περίοδο περίπου 90 mins και ότι ένα διαστημόπλοιο χαμηλής τροχιάς γύρω από τη Σελήνη έχει περίοδο επίσης περίπου 90 mins, τι συμπέρασμα συνάγετε για τη σύσταση της Σελήνης;

(γ) Ένας κομήτης σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο έχει ταχύτητα $v_{\alpha} = 10$ km/sec στο αφήλιο και $v_{\pi} = 80$ km/sec στο περιήλιο. Αν η ταχύτητα της περίπου κυκλικής τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι $v_{\oplus} = 30$ km/sec και η ακτίνα της τροχιάς αυτής είναι $r_{\oplus} = 1.5 \times 10^8$ km, υπολογίστε την απόσταση του αφηλίου r_{α} του κομήτη.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

Χωρίς αντίσταση $mgh = \frac{mv_0^2}{2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$.
Με αντίσταση $m\dot{v} = mg - \lambda m v^2$.
Με $\dot{v} = v\frac{dv}{dz}$ είναι $\int_0^h dz = \int_0^{v_1} \frac{v dv}{g - \lambda v^2} \Leftrightarrow$
$h = -\frac{1}{2\lambda}\ln(g - \lambda v^2)\big|_0^{v_1} = -\frac{1}{2\lambda}\ln\left(1 - \frac{\lambda v_1^2}{g}\right) \Leftrightarrow$
$v_1 = \sqrt{\frac{g}{\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda h}\right)}$.
Στο όριο της μικρής αντίστασης χρησιμοποιώντας το πρώτο δοσμένο ανάπτυγμα με $u = \lambda h \ll 1$ είναι $1 - e^{-2\lambda h} \approx 2\lambda h - 2\lambda^2 h^2$, οπότε $v_1 \approx \sqrt{2gh}\sqrt{1 - \lambda h}$. Χρησιμοποιώντας το δεύτερο ανάπτυγμα (με $u = \lambda h$ και $k = 1/2$) βρίσκουμε $v_1 \approx v_0\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right)$.

Θέμα 2^o:

(α) $\dot{L}_z = \left(\dot{\vec{r}} \times m\vec{v}\right)\cdot\hat{z} + \left(\vec{r} \times m\dot{\vec{v}}\right)\cdot\hat{z} = 0 + (\vec{r} \times m\vec{a})\cdot\hat{z} = [\vec{r} \times (-N\hat{r} + mg\hat{z})]\cdot\hat{z} = 0$.
$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + R\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}$,
$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ R & 0 & 0 \\ 0 & mR\,\dot{\theta} & mR\sin\theta\,\dot{\phi} \end{vmatrix} = -mR^2\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\theta} + mR^2\,\dot{\theta}\,\hat{\phi}$,
$L_z = \vec{L}\cdot\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right) = mR^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$.
(β) $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)$,
$V = -mgz = -mgR\cos\theta$,
$E = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - mgR\cos\theta$.
(γ) Αντικαθιστώντας $\dot{\phi} = \frac{L_z}{mR^2\sin^2\theta}$ στο ολοκλήρωμα ενέργειας (η ενέργεια είναι σταθερή αφού το βάρος είναι συντηρητική δύναμη ενώ η κάθετη αντίδραση δεν έχει έργο) βρίσκουμε τη ζητούμενη.
(δ$_1$) Αρχικά $\vec{v} = v_0\hat{\phi}$, δηλ. $\dot{\theta} = 0$ και $\dot{\phi} = \frac{v_0}{R\sin\theta_0}$.
Άρα $L_z = mR\sin\theta_0 v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}mRv_0$,
$V_{\rm eff}(\theta) = \frac{3mv_0^2}{8\sin^2\theta} - mgR\cos\theta$,
$E = \frac{mv_0^2}{2} - mgR\cos\theta_0 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mgR}{2}$.
(δ$_2$) Η εξίσωση $V_{\rm eff}(\theta) = E$ έχει λύσεις τα όρια της τροχιάς $\theta_{\rm min}$ και $\theta_{\rm max}$, τα οποία εδώ είναι $\theta_{\rm min} = \pi/3$ και $\theta_{\rm max} < \pi/2$ αντίστοιχα. Δηλ. πρέπει $V_{\rm eff}(\pi/2) > E \Leftrightarrow v_0 < 2\sqrt{gR}$

Στην οριακή περίπτωση $v_0 = 2\sqrt{gR}$, οπότε $L_z = \sqrt{3}\sqrt{m^2 g R^3}$ και $E = 1.5mgR$. Όπως φαίνεται από το γράφημα της $V_{\rm eff}(\theta)$ τα όρια της τροχιάς είναι $V_{\rm eff}(\theta) \leq E \Leftrightarrow \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2$.
(δ$_3$) Πρέπει η $V_{\rm eff}(\theta)$ να έχει ελάχιστο στο $\theta = \pi/3$, δηλ. $V'_{\rm eff}(\pi/3) = 0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{3gR/2}$.
Ισοδύναμα μέσω των δυνάμεων, στη διεύθυνση $\hat{z}$ πρέπει $N\cos\theta_0 = mg$ ενώ στην οριζόντια $N\sin\theta_0 = \frac{mv_0^2}{R\sin\theta_0}$.

Απαλείφοντας το N προκύπτει $v_0 = \sqrt{\frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}gR} = \sqrt{\frac{3gR}{2}}$ για $\theta_0 = \pi/3$.
Όπως φαίνεται από το γράφημα της $V_{\rm eff}(\theta)$, αν $v_0 < \sqrt{\frac{3}{2}gR} \Leftrightarrow L_z < \frac{3}{\sqrt{8}}\sqrt{m^2 g R^3}$ το σώμα κινείται στο χώρο $\theta_{\rm min} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, δηλ. $\pi/3$ είναι η μεγαλύτερη από τις δύο ρίζες της $V_{\rm eff}(\theta) = E$. Όμοια, αν $v_0 > \sqrt{\frac{3}{2}gR} \Leftrightarrow L_z > \frac{3}{\sqrt{8}}\sqrt{m^2 g R^3}$ το σώμα κινείται στο χώρο $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \theta_{\rm max}$, δηλ. $\pi/3$ είναι η μικρότερη από τις δύο ρίζες της $V_{\rm eff}(\theta) = E$.
Τα ίδια προκύπτουν και από τη λύση της ανισότητας $V_{\rm eff}(\theta) - E \leq 0$. Η διαφορά $V_{\rm eff}(\theta) - E$ γράφεται $\frac{mgR}{\sin^2\theta}\left(\cos^3\theta + \frac{c-1}{2}\cos^2\theta - \cos\theta + \frac{4-c}{8}\right)$, όπου $c = \frac{v_0^2}{gR} > 0$. Η παρένθεση μπορεί να παραγοντοποιηθεί (αφού ξέρουμε ότι μηδενίζεται για $\theta = \pi/3$, δηλ. για $\cos\theta = 1/2$) και προκύπτει $V_{\rm eff}(\theta) - E = \frac{mgR}{\sin^2\theta}(\cos\theta + \mu_2)(\cos\theta - \mu_1)(\cos\theta - 1/2)$ με $\mu_2 = \frac{\sqrt{c^2 - 4c + 16} + c}{4}$ και $\mu_1 = \frac{\sqrt{c^2 - 4c + 16} - c}{4}$. Για κάθε $c > 0$ είναι $\mu_2 > 1$ και $-1 < \mu_1 < 1$, επομένως η ανισότητα $V_{\rm eff}(\theta) - E \leq 0$ ισχύει για $\cos\theta$ μεταξύ των τιμών $1/2$ και μ_1. Ελέγχοντας αν το μ_1 είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του $1/2$ προκύπτει ότι για $c < 3/2$ είναι $\mu_1 > 1/2$ και η επιτρεπτή περιοχή είναι $1/2 \leq \cos\theta \leq \mu_1 \Leftrightarrow \arccos\mu_1 \leq \theta \leq \pi/3$ (διότι η $\cos\mu_1$ είναι φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $0 \leq \mu_1 \leq \pi$), ενώ για $c > 3/2$ είναι $\mu_1 < 1/2$ και η επιτρεπτή περιοχή είναι $\mu_1 \leq \cos\theta \leq 1/2 \Leftrightarrow \pi/3 \leq \theta \leq \arccos\mu_1$. Για $c = 3/2$ η επιτρεπτή περιοχή ανάγεται στο σημείο $\theta = \pi/3$, περίπτωση που αντιστοιχεί στο κωνικό εκκρεμές.
Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε πότε το σώμα θα φύγει εκτός του μπολ. Αυτό θα γίνει αν $\arccos\mu_1 > \pi/2 \Leftrightarrow \mu_1 < 0$ το οποίο υλοποιείται αν $c > 4$.

(δ$_4$) Μετά την ώθηση η ταχύτητα είναι $v_0\hat{\phi}+\epsilon\hat{\theta}$ με $v_0 = \sqrt{3gR/2}$. Επομένως δεν αλλάζει η $L_z = \frac{3}{\sqrt{8}}\sqrt{m^2gR^3}$, ούτε η $V_{\rm eff}(\theta) = \frac{9mgR}{16\sin^2\theta} - mgR\cos\theta$,
$V'_{\rm eff}(\theta) = -\frac{9mgR\cos\theta}{8\sin^3\theta} + mgR\sin\theta$,
$V''_{\rm eff}(\theta) = \frac{9mgR}{8\sin^2\theta} + \frac{27mgR\cos^2\theta}{8\sin^4\theta} + mgR\cos\theta$, ενώ η ενέργεια γίνεται $\frac{m(v_0^2+\epsilon^2)}{2} - mg\cos\theta_0 = \frac{mgR}{4} + \frac{m\epsilon^2}{2}$.
Με $\theta = \frac{\pi}{3} + q$ (όπου $|q| \ll 1$), είναι $V_{\rm eff}\left(\frac{\pi}{3}+q\right) \approx V_{\rm eff}\left(\frac{\pi}{3}\right) + V'_{\rm eff}\left(\frac{\pi}{3}\right)q + \frac{1}{2}V''_{\rm eff}\left(\frac{\pi}{3}\right)q^2 = \frac{mgR}{4} + \frac{7mgR}{4}q^2$ και το ολοκλήρωμα ενέργειας (με $\dot{\theta} = \dot{q}$) δίνει $\dot{q}^2 + \frac{7g}{2R}q^2 = \frac{\epsilon^2}{R^2}$, ή $\ddot{q} + \frac{7g}{2R}q = 0$. Άρα $\Omega = \sqrt{\frac{7g}{2R}}$ και η περίοδος είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{7g}}$.
Η περίοδος της αρχικής κυκλικής κίνησης ήταν $T_0 = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi R\sin\theta_0}{v_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}$, άρα $\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\sqrt{7}} \approx 0.756$.
Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $q_0 = \epsilon/\Omega R$.

Θέμα 3$^{\rm o}$:

(α) Η $\hat{\theta}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει τη διατήρηση της στροφορμής $L = mr^2\dot{\theta}$, οπότε $\dot{\theta} = \frac{L}{m}u^2$. $\dot{r} = \frac{d(1/u)}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{L}{m}u'$ και Με $v_r = \dot{r} = \frac{d(1/u)}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{L}{m}u'$ και $v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{L}{mr} = \frac{L}{m}u$ βρίσκουμε την έκφραση της ταχύτητας $\vec{v} = \frac{L}{m}\left(-u'\hat{r} + u\hat{\theta}\right)$.
Με $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{L^2}{m^2}u^2u''$ προκύπτει η έκφραση της επιτάχυνσης $\vec{a} = -\frac{L^2}{m^2}u^2\left(u''+u\right)\hat{r}$.
Αντικατάσταση της ταχύτητας στο ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{mv^2}{2} + V = E$ δίνει $\frac{L^2}{2m}\left(u'^2+u^2\right) + V\left(\frac{1}{u}\right) = E$.
Ισοδύναμη σχέση προκύπτει από την $m\vec{a} = f\hat{r}$ και είναι η $u'' + u = -\frac{m}{L^2u^2}f\left(\frac{1}{u}\right)$.
(β$_1$) Αντικαθιστώντας στην $\frac{L^2}{2m}\left(u'^2+u^2\right) + V\left(\frac{1}{u}\right) = E$ τη συνάρτηση $u = \left(r_o^n - n\kappa\theta\right)^{-1/n}$ και τη δυναμική ενέργεια $V = -\frac{\lambda^2u^2}{2}\left(1+\kappa^2u^{2n}\right)$ βρίσκουμε $\frac{L^2 - m\lambda^2}{2m}\left(\kappa^2u^{2n+2}+u^2\right) = E$, η οποία ικανοποιείται αν $L = \lambda\sqrt{m}$ και $E = 0$.
Αλλιώς: Αντικαθιστώντας στην $u'' + u = -\frac{m}{L^2u^2}f\left(\frac{1}{u}\right)$ την στροφορμή $L = \lambda\sqrt{m}$, τη συνάρτηση $u = \frac{1}{\left(r_o^n - n\kappa\theta\right)^{1/n}}$ και $f(r) = -\frac{\lambda^2}{r^3} - \frac{(n+1)\lambda^2\kappa^2}{r^{2n+3}}$ βλέπουμε ότι ικανοποιείται.
Αντικαθιστώντας $\dot{r} = -\frac{\kappa\dot{\theta}}{r^{n-1}} = -\frac{\kappa L}{mr^{n+1}}$ βρίσκουμε $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = 0$.
(β$_2$) $t = \int_{r_o}^{r}\frac{dr}{\dot{r}}$ με $\dot{r} = -\frac{\kappa\dot{\theta}}{r^{n-1}} = -\frac{\kappa L}{mr^{n+1}}$, δηλ. $t = \frac{m}{\kappa L}\int_r^{r_o} r^{n+1}dr$.
Άρα για $n \neq -2$ είναι $t = \frac{m}{(n+2)\kappa L}\left(r_o^{n+2} - r^{n+2}\right)$ και για $n = -2$ είναι $t = \frac{m}{\kappa L}\ln\frac{r_o}{r} \Leftrightarrow r = r_oe^{-\frac{\kappa L}{m}t}$.
Για $n > -2$ το σώμα φτάνει στο $r = 0$ σε χρόνο $\frac{m}{(n+2)\kappa L}r_o^{n+2}$.
Για $n = -2$ ο χρόνος αυτός θεωρητικά είναι άπειρος, πρακτικά όμως το σώμα φτάνει στο $r = 0$ σε μερικά $m/\kappa L$ (η απόσταση r μειώνεται εκθετικά).
Για $n < -2$ θέλει άπειρο χρόνο για να φτάσει στο $r = 0$.

Θέμα 4$^{\rm o}$:

(α) $W = mg\ \Delta h = \frac{GM_\oplus m\Delta h}{R_\oplus^2}$.
Στον κομήτη πριν το πηδηματάκι έχουμε ενέργεια $-\frac{GM_\kappa m}{R_\kappa}$ και μετά 0, οπότε $W = \frac{GM_\kappa m}{R_\kappa}$.
Εξισώνοντας τα W και χρησιμοποιώντας την $M_\kappa/R_\kappa^3 = M_\oplus/R_\oplus^3$ (ίδιες πυκνότητες) βρίσκουμε $R_\kappa = \sqrt{R_\oplus\Delta h} = 2.65$ km.
Ο κομήτης 67P έχει μικρότερη ακτίνα, άρα θα αρκούσε το πηδηματάκι για να εκτοξευόμασταν στο διάστημα (η ενέργεια που χρειάζεται είναι $\frac{GM_\kappa m}{R_\kappa} \propto R_\kappa^2$ για δεδομένη πυκνότητα).
(β) Ίδιες περίοδοι σημαίνει ίδια $2\pi\sqrt{R^3/GM}$, δηλ. ίδιο λόγο M/R^3 και άρα ίδια πυκνότητα.
(γ) Διατήρηση στροφορμής: $v_\alpha r_\alpha = v_\pi r_\pi$.
Διατήρηση ενέργειας: $\frac{v_\alpha^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r_\alpha} = \frac{v_\pi^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r_\pi}$.
Απαλείφοντας το r_π βρίσκουμε $r_\alpha = \frac{2GM_\odot}{v_\alpha(v_\alpha+v_\pi)}$.
Η ταχύτητα της Γης είναι $v_\oplus = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_\oplus}} \Leftrightarrow GM_\odot = r_\oplus v_\oplus^2$, οπότε $r_\alpha = \frac{2r_\oplus v_\oplus^2}{v_\alpha(v_\alpha+v_\pi)} = 3\times 10^8$ km.