Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 17 Φεβρουαρίου 2015
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

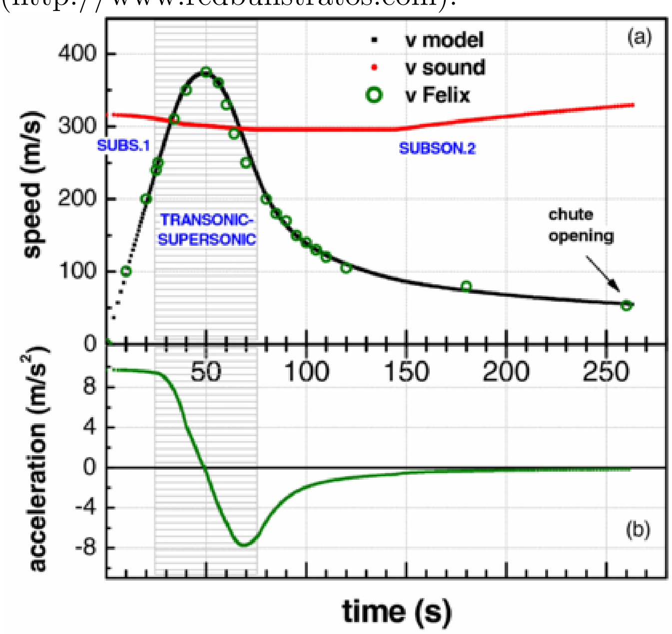
Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _ _

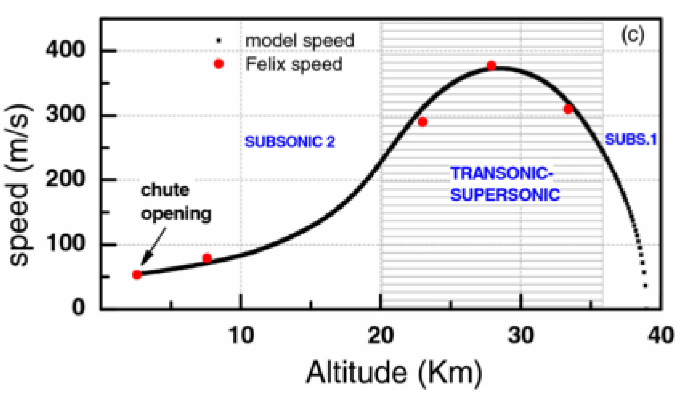
Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 8ης Ιανουαρίου 2015: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐ 13η ☐

Θέμα 1ο:

Κατά τον αλεξιπτωτισμό (skydiving) η αντίσταση του αέρα είναι σε καλή προσέγγιση $\frac{1}{2}CS\rho v^2$, όπου ρ η πυκνότητα του αέρα, S η επιφάνεια του σώματος και C ένας συντελεστής τάξης μονάδας.
(α) Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα ενός αλεξιπτωτιστή μάζας $m = 80$ kg που κινείται κατακόρυφα, για τυπικές τιμές πριν ανοίξει το αλεξίπτωτο $C = 1.2$, $S = 0.5$ m^2, $\rho = 1.2$ kg m^{-3} και $g = 9.8$ m s^{-2}.
(β) Στις 14 Οκτωβρίου 2012 ο Felix Baumgartner έπεσε ελεύθερα από τη στρατόσφαιρα, από ύψος ρεκόρ 38969.4 m πάνω από την επιφάνεια της Γης και απέκτησε υπερηχητική ταχύτητα ρεκόρ 1357.6 km/h (http://www.redbullstratos.com).

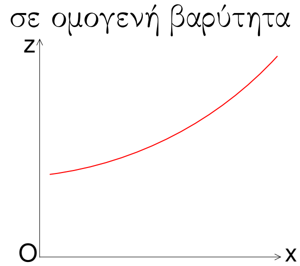




(β_1) Το διάγραμμα (a) δείχνει την ταχύτητα $|v|$ και το (b) την επιτάχυνση $d|v|/dt$ συναρτήσει του χρόνου, ενώ το (c) την ταχύτητα $|v|$ συναρτήσει του ύψους από την επιφάνεια της Γης (από Colino & Barbero 2013, European Journal of Physics, 34, 841). Όπως φαίνεται σε αυτά, κατά την πτώση η ταχύτητα δεν απέκτησε οριακή τιμή, ούτε καν αυξανόταν συνεχώς, αλλά στο μεγαλύτερο μέρος της πτώσης ο Felix επιβραδυνόταν. Πως εξηγείται αυτό;
(β_2) Αν θέλουμε να μοντελοποιήσουμε την πτώση του Felix χρειάζεται να λάβουμε υπόψη ότι το πεδίο βαρύτητας της Γης δεν είναι ομογενές; Δίνεται η ακτίνα της Γης 6400 km.
(β_3) Θεωρήστε κατακόρυφη πτώση σε στατική ατμόσφαιρα με πυκνότητα $\rho(z)$ που μεταβάλλεται με το ύψος z από την επιφάνεια της Γης και ομογενή βαρύτητα g. Από την εξίσωση Νεύτωνα και τα δεδομένα των διαγραμμάτων εκτιμήστε την πυκνότητα της ατμόσφαιρας σε κάποιο ύψος της επιλογής σας.
★ (β_4) Αν $\rho = \rho_0 e^{-\lambda z}$ με σταθερά ρ_0, λ, και το σώμα ξεκινά με μηδενική ταχύτητα από ύψος z_0, βρείτε το ολοκλήρωμα που δίνει την v^2 σε κάθε ύψος z.
Δίνεται ότι η εξίσωση $\dfrac{dF(z)}{dz} = A(z)F(z) + B(z)$ απλοποιείται θέτοντας $F(z) = f(z)\exp\left[\int A(z)dz\right]$.

Θέμα 2ο:

Δαχτυλίδι μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε σύρμα το οποίο βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο Oxz και έχει εξίσωση $z = z(x)$. Το σύρμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ γύρω από τον άξονα z, μέσα σε ομογενή βαρύτητα $\vec{g} = -g\hat{z}$.



(α) Για τυχούσα μορφή της $z(x)$ γράψτε την έκφραση της ταχύτητας και της κινητικής ενέργειας στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς.

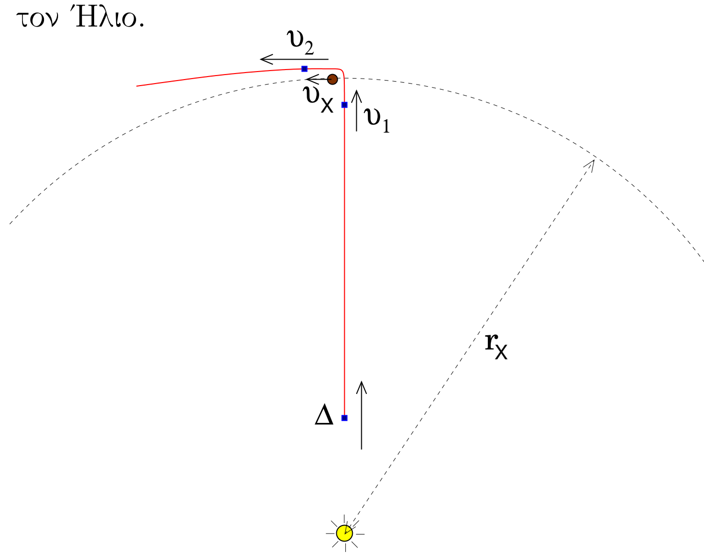
(β) Ποια η δυναμική ενέργεια λόγω βάρους και ποια λόγω της φυγόκεντρου δύναμης;
(γ) Γράψτε ένα ολοκλήρωμα κίνησης, το οποίο αποτελεί και την εξίσωση κίνησης του δαχτυλιδιού.
(δ) Για ποιο σχήμα του σύρματος $z(x)$ όλα τα σημεία του είναι σημεία ισορροπίας;
★ (ε) Συνδέστε το προηγούμενο αποτέλεσμα με την ελεύθερη επιφάνεια υγρού που περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα.

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

Ένα σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση της ελκτικής κεντρικής δύναμης $f(r) = -\dfrac{L^2}{mr^3}(1+\lambda r)$, όπου L είναι η στροφορμή του σώματος ως προς το κέντρο O της κεντρικής δύναμης και λ μια σταθερά.
(α) Δείξτε ότι η κίνηση είναι επίπεδη και ότι η εμβαδική ταχύτητα (δλδ, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού που διαγράφει η επιβατική ακτίνα η οποία ενώνει την αρχή O με το σώμα) είναι σταθερή.
(β) Για δεδομένη κεντρική δύναμη $f(r)$ αποδείξτε την έκφραση $u'' + u = -\dfrac{m}{L^2u^2} f\left(\dfrac{1}{u}\right)$ της εξίσωσης τροχιάς, όπου $u = 1/r$ και u'' είναι η δεύτερη παράγωγος του u ως προς την πολική γωνία θ.
(γ) Υπολογίστε την ενέργεια E του σώματος συναρτήσει των L, m και λ και της αρχικής απόστασης r_o από το κέντρο της κεντρικής δύναμης. Το σώμα έχει αρχική ταχύτητα $\vec{v}_o$ κάθετη στην $\vec{r}_o$.
(δ) Βρείτε το υποθετικό δυναμικό $V'(r)$ και σχεδιάστε τη γραφική του παράσταση ανάλογα με το πρόσημο της σταθεράς λ. Από αυτή τη γραφική παράσταση εξηγείστε αν η κίνηση είναι περατωμένη ή όχι.
(ε) Λύστε την εξίσωση της κίνησης για τη δεδομένη κεντρική δύναμη $f(r)$, υπολογίζοντας την πολική απόσταση $r(\theta)$.
★ (στ) Αν $\lambda > 0$ σε πόσο χρόνο το σώμα φτάνει στο κέντρο O;
Δίδεται η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}\hat{\theta}$.

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

Ένα διαστημόπλοιο (Δ) εκτοξεύεται από τη Γη σε ακτινική τροχιά αντίθετα προς τη διεύθυνση του Ήλιου και με την *ελάχιστη* απαιτούμενη ενέργεια E_1 που θα του επιτρέψει να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας του Ήλιου (αγνοούμε το πεδίο βαρύτητας της Γης). Η εκτόξευση γίνεται την κατάλληλη χρονική στιγμή που θα επιτρέψει στο Δ έτσι ώστε η τροχιά του να τέμνει την τροχιά ενός μακρυνού πλανήτη X περί τον Ήλιο σε μικρή απόσταση πίσω από τον πλανήτη αυτόν, ενώ αμέσως μετά την αλληλεπίδραση του Δ με το πεδίο βαρύτητας του πλανήτη το Δ κινείται σε γωνία 90° σε σχέση με την αρχική του ακτινική διεύθυνση ως προς τον Ήλιο, δλδ, κινείται εφαπτομενικά στην κυκλική τροχιά του πλανήτη περί τον Ήλιο.



(α) Πόση είναι η ενέργεια E_1 και πόση η ταχύτητα v_1 του Δ ως προς τον Ήλιο, στην απόσταση r_{X} της κυκλικής τροχιάς του μακρυνού πλανήτη X;
(β) Υπολογίστε τη σχετική ταχύτητα u_1 του Δ ως προς τον πλανήτη, στην απόσταση r_{X} της τροχιάς του πλανήτη, πριν επηρεάσει την κίνηση το πεδίο του πλανήτη.
(γ) Ποια η σχετική ταχύτητα u_2 του Δ ως προς τον πλανήτη, αμέσως μετά τη βαρυτική σκέδαση του Δ από το πεδίο του πλανήτη και ποια η ταχύτητα v_2 του Δ στο σύστημα αναφοράς του Ήλιου;
(δ) Δείξτε ότι ο λόγος T_2/T_1 της κινητικής ενέργειας του Δ όταν εξέρχεται από το πεδίο βαρύτητας του πλανήτη ως προς την αυτήν όταν εισέρχεται στο πεδίο του πλανήτη είναι $2+\sqrt{3} = 3.73$. Ποιο το είδος της τροχιάς που θα διαγράψει το διαστημόπλοιο μετά τη σκέδασή του από τον πλανήτη;
(ε) Να υπολογισθεί ο χρόνος της μετάβασης του Δ από τη Γη στον πλανήτη X αν αυτός είναι ο Δίας, ο οποίος απέχει απόσταση $r_{\text{X}} = 5.2$ AU από τον Ήλιο. Δίδεται ότι $2\pi\sqrt{\dfrac{r_\oplus^3}{GM}} = 1$ έτος, όπου $r_\oplus = 1$ AU η απόσταση Γης-Ηλίου και M η μάζα του Ήλιου.
★ (στ) Να υπολογισθούν τα στοιχεία της τροχιάς του Δ μετά τη σκέδαση από τον Δία, δηλ, οι τιμές των $p = \dfrac{L^2}{GMm^2}$ και e στην $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$. Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση του Δ από τον Ήλιο είναι η r_{X}.

★ = bonus ερωτήματα

<u>ΛΥΣΕΙΣ:</u>

<u>Θέμα 1ο</u>:

(α) Με άξονα z προς τα πάνω και κίνηση προς τα κάτω είναι $\vec{v} = v\hat{z} = -|v|\hat{z}$ (αφού $v < 0$) και η αντίσταση από τον αέρα έχει φορά προς τα πάνω. Άρα η εξίσωση Νεύτωνα είναι $m\dot{v} = \frac{1}{2}CS\rho v^2 - mg$.
Όταν η ταχύτητα αποκτά την οριακή της τιμή το δεξιό μέλος μηδενίζεται, άρα $0 = \frac{1}{2}CS\rho v^2 - mg \Leftrightarrow |v| = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}} = 47$ m/s $= 168$ km/h.

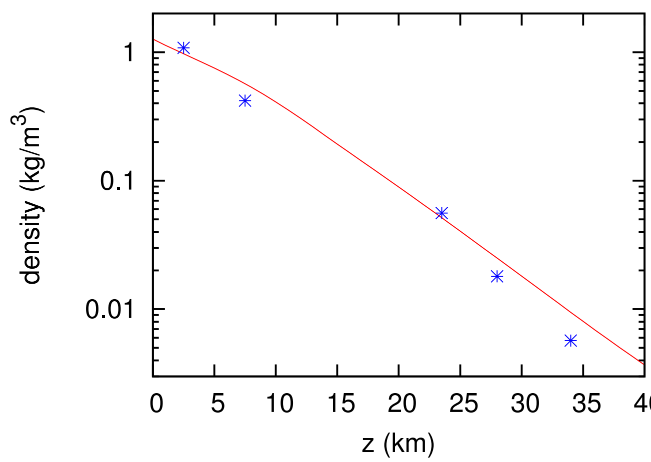
(β_1) Στο δεξιό μέλος η πυκνότητα είναι συνάρτηση της θέσης επομένως μια σταθερή ταχύτητα δεν ικανοποιεί την εξίσωση. Άρα δεν υπάρχει οριακή τιμή της ταχύτητας.
Στα πρώτα ~ 30 δευτερόλεπτα της πτώσης η πυκνότητα είναι τόσο μικρή ώστε η αντίσταση είναι αμελητέα και η επιτάχυνση είναι πρακτικά g, αυξάνοντας πολύ γρήγορα την ταχύτητα. Στη συνέχεια η αντίσταση γίνεται σημαντική και συνεχώς αυξάνεται αφού τόσο το μέτρο της ταχύτητας όσο και η πυκνότητα αυξάνονται με το χρόνο. Κάποια στιγμή η αντίσταση γίνεται ίση με το βάρος και στιγμιαία η ταχύτητα δεν αλλάζει αφού η επιτάχυνση είναι μηδενική. Ο Felix όμως κινείται διαρκώς προς πυκνότερα στρώματα της ατμόσφαιρας οπότε η δύναμη της αντίστασης αυξάνεται περαιτέρω και η συνισταμένη των δυνάμεων αποκτά φορά προ τα πάνω (δηλ. επιβραδύνει τον Felix).

(β_2) Η επιτάχυνση βαρύτητας ελαττώνεται με το τετράγωνο της απόστασης από το κέντρο της Γης, δηλ. $g = g_0\frac{R_\oplus^2}{(R_\oplus + z)^2} = \frac{g_0}{(1 + z/R_\oplus)^2}$, όπου g_0 η τιμή στην επιφάνεια της Γης. Αφού το μέγιστο ύψος είναι $z_{\max} \approx 39$ km και $\frac{z_{\max}}{R_\oplus} \approx \frac{1}{160}$ το σφάλμα είναι αμελητέο, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε το πεδίο βαρύτητας της Γης ομογενές.

(β_3) Η εξίσωση Νεύτωνα $m\dot{v} = \frac{1}{2}CS\rho v^2 - mg$ δίνει $\rho = \frac{2m}{CSv^2}\left(g + \frac{dv}{dt}\right) = \frac{2m}{CSv^2}\left(g - \frac{d|v|}{dt}\right)$, οπότε χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις $|v|(z)$ από το διάγραμμα (c) και την κλίση $\frac{d|v|}{dt}$ για την εκάστοτε $|v|$ από το διάγραμμα (a) ή το (b), μπορούμε να υπολογίσουμε την $\rho(z)$. Με $m = 80$ kg, $C = 1.2$, $S = 0.5$ m^2, $g = 9.8$ m/s^2 συμπληρώνουμε τον ακόλουθο πίνακα.

z (km)	$\lvert v\rvert$ (m/s)	$\frac{d\lvert v\rvert}{dt}$ (m/s^2)	ρ (kg/m^3)
34	305	$\frac{450-60}{50-0} = 7.8$	0.0057
28	380	0	0.018
23.5	290	$\frac{250-330}{70-60} = -8$	0.056
7.5	80	$\frac{55-105}{260-120} = -0.36$	0.42
2.5	50	$\frac{55-80}{260-180} = -0.31$	1.08

Οι τιμές αυτές είναι αρκετά κοντά στις γενικά αποδεκτές. Στο γράφημα η καμπύλη είναι δεδομένα από omniweb.gsfc.nasa.gov/vitmo/msis_vitmo.html και τα σημεία τα αποτελέσματά μας.



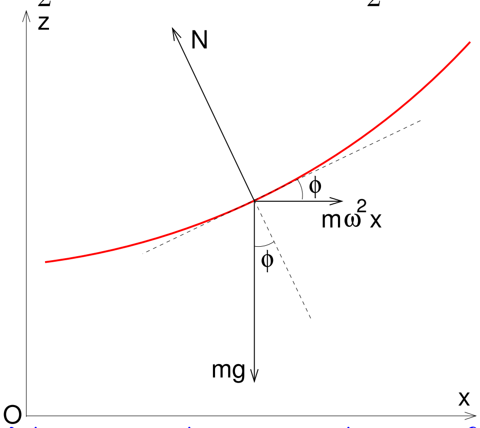
(β_4) Με $\dot{v} = \frac{dv}{dz}v = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dz}$ η εξίσωση Νεύτωνα δίνει $\frac{dv^2}{dz} = \frac{CS}{m}\rho v^2 - 2g$. Με $\rho = \rho_0 e^{-\lambda z}$ έχουμε $\frac{dv^2}{dz} = k\lambda e^{-\lambda z}v^2 - 2g$ όπου $k = \frac{CS\rho_0}{m\lambda}$.
Θέτοντας $v^2 = f(z)\exp\left(k\lambda\int e^{-\lambda z}dz\right) = f(z)e^{-ke^{-\lambda z}}$ προκύπτει $\frac{df}{dz} = -2ge^{ke^{-\lambda z}}$ και άρα $f(z) = -2g\int_{z_0}^{z} e^{ke^{-\lambda z'}}dz'$ (το κάτω όριο στο ολοκλήρωμα επιλέχθηκε ώστε η ταχύτητα να μηδενίζεται στο ύψος z_0).
Η τελική έκφραση: $v^2 = 2ge^{-ke^{-\lambda z}}\int_{z}^{z_0} e^{ke^{-\lambda z'}}dz'$.

Θέμα 2^o:

(α) $\vec{v}_\sigma = \dot{x}\hat{x} + \dot{z}\hat{z}$ με $\dot{z} = z'(x)\dot{x}$ (ο τόνος σημαίνει παράγωγος ως προς x), άρα $\vec{v}_\sigma = \dot{x}(\hat{x} + z'\hat{z})$ και $T = \frac{1}{2}mv_\sigma^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+z'^2)$.

(β) Η δυναμική ενέργεια του βάρους $-mg\hat{z}$ είναι mgz και της φυγόκεντρου $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\omega^2\vec{r}_\perp = m\omega^2x\hat{x}$ είναι $-\frac{1}{2}m\omega^2x^2$.

(γ) Η ολική δυναμική ενέργεια είναι $mgz - m\omega^2x^2/2$ (η αντίδραση και η Coriolis δεν παράγουν έργο σαν κάθετες στην κίνηση). Άρα υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» $\frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+z'^2) + mgz - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E$.



Το ολοκλήρωμα προκύπτει και από την προβολή του νόμου Νεύτωνα πάνω στο εφαπτόμενο μοναδιαίο στο σύρμα στη φορά της ταχύτητας $\hat{\varepsilon} = \pm(\cos\phi\ \hat{x} + \sin\phi\ \hat{z})$, όπου $\phi = \arctan z'$, δηλ. $\hat{\varepsilon} = \pm\frac{\hat{x}+z'\hat{z}}{\sqrt{1+z'^2}}$ ($\pm$ είναι το πρόσημο του $\dot{x}$). Έτσι προκύπτει $\vec{a}_\sigma\cdot\hat{\varepsilon} = \vec{g}\cdot\hat{\varepsilon} - [\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\cdot\hat{\varepsilon} - 2\,(\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma)\cdot\hat{\varepsilon} \Leftrightarrow \dot{v}_\sigma = \mp g\sin\phi \pm \omega^2x\cos\phi$, η οποία με $\dot{v}_\sigma = \dot{x}\frac{dv_\sigma}{dx}$ και $v_\sigma = \pm\dot{x}\sqrt{1+z'^2}$ δίνει $v_\sigma\frac{dv_\sigma}{dx} = -gz' + \omega^2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_\sigma^2 + gz - \frac{1}{2}\omega^2x^2 = \text{σταθερό}$.

Το ολοκλήρωμα E δεν είναι η πραγματική ενέργεια του δαχτυλιδιού. Η απόλυτη ταχύτητά του είναι $\vec{v} = \vec{v}_\sigma + \vec{\omega}\times\vec{r}$, οπότε η κινητική ενέργεια είναι $\frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+z'^2) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ και η μηχανική ενέργεια $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+z'^2) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + mgz = E + m\omega^2x^2$. Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας $\mathcal{E}$ ισούται με την ισχύ της δύναμης αντίδρασης $\vec{N}$, της οποίας η $\hat{y}$ συνιστώσα είναι αντίθετη της Coriolis όπως προκύπτει από τον νόμο Νεύτωνα στη διεύθυνση $\hat{y}$. Πράγματι $N_y\hat{y} = 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma = 2m\omega\dot{x}\ \hat{y}$ και η ισχύς είναι $\vec{N}\cdot\vec{v} = \vec{N}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{N}\cdot\omega x\hat{y} = 2m\omega^2x\dot{x} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$.

(δ) Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $T + V_{\text{eff}} = E$ με $V_{\text{eff}} = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Τα σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν σε $\frac{dV_{\text{eff}}}{dx} = 0$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε x πρέπει να είναι $V_{\text{eff}} = \text{σταθερό}$, το οποίο δίνει παραβολικό σχήμα $z(x) = z_0 + \frac{\omega^2x^2}{2g}$ με σταθερό z_0.

Το ίδιο προκύπτει και μέσω της ισορροπίας δυνάμεων. Παράλληλα στο $\hat{\varepsilon}$ όπου η κάθετη αντίδραση δεν συνεισφέρει, οι συνιστώσες του βάρους και της φυγόκεντρου είναι ίσες, δηλ. $g\sin\phi = \omega^2x\cos\phi \Leftrightarrow \tan\phi = z' = \frac{\omega^2x}{g} \Leftrightarrow z = z_0 + \frac{\omega^2x^2}{2g}$.

Ένας τρίτος τρόπος να βρεθεί το σχήμα του σύρματος είναι να σκεφτούμε ότι πρέπει να είναι ισοδυναμική καμπύλη $V_{\text{eff}} = \text{σταθερό}$, ώστε η δύναμη $-\vec{\nabla}V_{\text{eff}}$ να είναι κάθετη στο σύρμα.

Ένας τέταρτος τρόπος προκύπτει από την εφαρμογή του νόμου Νέυτωνα, η προβολή του οποίου πάνω στο σύρμα δίνει, όπως βρέθηκε στο ερώτημα (γ), $\dot{v}_\sigma = \mp g\sin\phi \pm \omega^2x\cos\phi$. Θέτοντας $v_\sigma = \pm\dot{x}\sqrt{1+z'^2}$ και $\phi = \arctan z'$ βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης $(1+z'^2)\ddot{x} + z'z''\dot{x}^2 = -gz' + \omega^2x$ (η οποία είναι ισοδύναμη με το ολοκλήρωμα «ενέργειας»). Σημεία ισορροπίας ισοδυναμούν με λύσεις $x = \text{σταθερό}$, οπότε $0 = -gz' + \omega^2x$. Αυτή πρέπει να ισχύει για κάθε x, οπότε ολοκληρώνοντας προκύπτει $z' = \frac{\omega^2x}{g} \Leftrightarrow z = z_0 + \frac{\omega^2x^2}{2g}$.

(ε) Κάθε τμήμα του υγρού σε απόσταση ϖ από τον άξονα περιστροφής ισορροπεί στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, όπως ακριβώς το δαχτυλίδι. (Η πίεση είναι σταθερή στην επιφάνεια του υγρού – ίση με την ατμοσφαιρική – επομένως δεν υπάρχει δύναμη πίεσης παράλληλα στην επιφάνεια.) Άρα η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού είναι $z = z_0 + \frac{\omega^2\varpi^2}{2g}$.

Θέμα 3^o:

(α) Η στροφορμή διατηρείται αφού $\dot{\vec{L}} = \vec{r}\times\vec{F} = 0$, οπότε η κίνηση γίνεται σε επίπεδο κάθετο στην $\vec{L}$. Η εμβαδική ταχύτητα είναι $\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{1}{2}|\vec{r}\times(\vec{r}+d\vec{r})|}{dt} = \frac{|\vec{r}\times\vec{v}|}{2} = \frac{L}{2m} = \text{σταθερή}$.

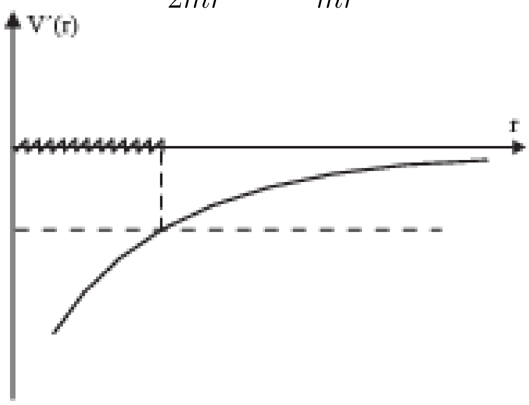
(β) Η $\hat{\theta}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει τη διατήρηση της στροφορμής $L = mr^2\dot{\theta}$, ενώ η $\hat{r}$ συνιστώσα, με $\dot{r} = \frac{d(1/u)}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{L}{m}u'$ και $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{L^2}{m^2}u^2u''$ δίνει την ζητούμενη.

(γ) $V = -\int f(r)dr = \int \left(\frac{L^2}{mr^3}+\frac{L^2\lambda}{mr^2}\right)dr = -\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{L^2\lambda}{mr}$ (μηδενίζουμε την σταθερά ολοκλήρωσης χωρίς βλάβη της γενικότητας).

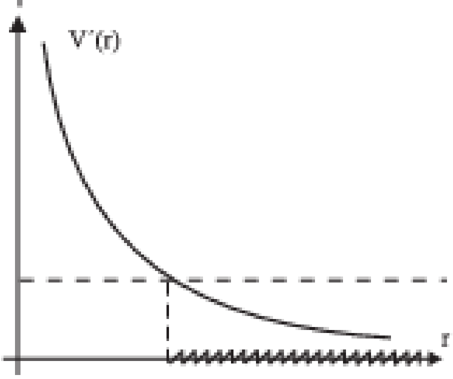
Η ενέργεια είναι $E = \frac{mv_o^2}{2}+V(r_o) = -\frac{L^2\lambda}{mr_o}$, διότι $v_o = \frac{L}{mr_o}$ (αφού $\vec{v}_o \perp \vec{r}_o$).

(δ) $V'(r) = V(r)+\frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{L^2\lambda}{mr}$.

$\lambda > 0$



$\lambda < 0$



Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα του υποθετικού δυναμικού, η κίνηση είναι περατωμένη για $\lambda > 0$ (το σώμα καταλήγει στο $r = 0$) και απεριόριστη για $\lambda < 0$ (το σώμα καταλήγει στο $r = \infty$). (Για $\lambda = 0$ το σώμα κινείται κυκλικά στην ακτίνα r_o.)

(ε) $u''+u = \frac{m}{L^2u^2}\frac{L^2u^3}{m}\left(1+\frac{\lambda}{u}\right) \Leftrightarrow u'' = \lambda$ οπότε ολοκληρώνοντας $u' = \lambda\theta + C$. Αν θεωρήσουμε αρχικά $\theta = 0$ τότε $u'|_{\theta=0} = 0$ (αφού $\dot r|_{t=0} = 0$), δηλ. $C = 0$ και άρα $u' = \lambda\theta$. Ολοκληρώνοντας ξανά βρίσκουμε $u = \frac{\lambda\theta^2}{2}+D$, όπου από την αρχική συνθήκη $r|_{\theta=0} = r_o$ βρίσκουμε $D = 1/r_o$ και άρα $u = \frac{\lambda\theta^2}{2}+\frac{1}{r_o} \Leftrightarrow r = \frac{r_o}{1+\frac{\lambda r_o}{2}\theta^2}$.

(στ) Από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{m\dot r^2}{2} + V'(r) = E \Leftrightarrow \dot r = -\sqrt{\frac{2L^2\lambda}{m^2r_o}\left(\frac{r_o}{r}-1\right)}$ και άρα το σώμα φτάνει στο κέντρο σε χρόνο $t = \int_{r_o}^0 \frac{dr}{\dot r} = -\frac{m}{L}\sqrt{\frac{r_o}{2\lambda}}\int_{r_0}^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_o}{r}-1}}$. Θέτοντας $r = r_o\cos^2\xi$, $dr = -2r_o\sin\xi\cos\xi d\xi$, βρίσκουμε $t = \frac{m}{L}\sqrt{\frac{r_o^3}{2\lambda}}\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\xi d\xi = \frac{m}{L}\sqrt{\frac{r_o^3}{2\lambda}}\int_0^{\pi/2}[1+\cos(2\xi)]\,d\xi = \frac{\pi m}{2L}\sqrt{\frac{r_o^3}{2\lambda}}$.

Το ίδιο προκύπτει από $t = \int_0^\infty \frac{d\theta}{\dot\theta} = \int_0^\infty \frac{mr^2 d\theta}{L} = \int_0^\infty \frac{mr_o^2 d\theta}{L\left(1+\frac{\lambda r_o}{2}\theta^2\right)^2}$ θέτοντας $\theta = \sqrt{\frac{2}{\lambda r_o}}\tan\xi$.

<u>Θέμα 4^o</u>:

(α) $E_1 = 0$, $\frac{mv_1^2}{2}-\frac{GMm}{r_X} = 0 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r_X}}$.

(β) $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_X$. Η $v_X = \sqrt{\frac{GM}{r_X}}$, κάθετη στην $\vec{v}_1$, άρα $u_1 = \sqrt{v_1^2+v_X^2} = \sqrt{(2+1)\frac{GM}{r_X}} = \sqrt{3\frac{GM}{r_X}}$.

(γ) $u_1 = u_2$ και $\vec{v}_2 = \vec{u}_2+\vec{v}_X$ με μέτρο $v_2 = u_2+v_X = (\sqrt{3}+1)\sqrt{\frac{GM}{r_X}}$ αφού οι $\vec{u}_2$ και $\vec{v}_X$ είναι ομόρροπες.

(δ) $\frac{T_2}{T_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2+\sqrt{3} = 3.73$.

$v_2 = (\sqrt{3}+1)\sqrt{\frac{GM}{r_X}} > v_X^{\delta\iota\alpha\varphi} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{GM}{r_X}} \Longrightarrow E > 0 \Longrightarrow$ υπερβολική τροχιά.

Αλλιώς: Η κινητική ενέργεια αυξήθηκε ενώ η δυναμική έμεινε ίδια, οπότε η ενέργεια αυξήθηκε. Από μηδέν έγινε θετική, άρα η τροχιά θα είναι υπερβολική.

(ε) $E_1 = 0 \Leftrightarrow \dot r = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ και $T = \int_{r_\oplus}^{r_X}\frac{dr}{\dot r} = \int_{r_\oplus}^{r_X}\frac{\sqrt{r}dr}{\sqrt{2GM}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{r_X^{3/2}-r_\oplus^{3/2}}{\sqrt{GM}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{5.2^{3/2}-1}{2\pi} =$ 0.8 έτη, αφού $\frac{r_X}{r_\oplus} = 5.2$ και $2\pi\sqrt{\frac{r_\oplus^3}{GM}} = 1$ έτος.

(στ) Η στροφορμή του Δ ως προς τον Ήλιο είναι $L = mv_2r_X$. Συνεπώς, $p = \frac{L^2}{GMm^2} = \frac{(v_2r_X)^2}{GM} = (\sqrt{3}+1)^2 r_X = (4+2\sqrt{3})r_X$.

Η εγγύτερη απόσταση του Δ από τον Ήλιο μετά τη σκέδαση είναι ίση με την απόσταση του Δία από τον Ήλιο, $r_X = 5.2$ AU, δηλ. $r_X = \frac{p}{1+e} \Leftrightarrow e = \frac{p}{r_X}-1 = 3+2\sqrt{3}$.