Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 8 Ιανουαρίου 2015
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

(α) Είναι σωστές οι ακόλουθες απαντήσεις σε πρόβλημα κλασικής μηχανικής όπου ψάχνουμε χρόνο;

(α$_1$) $t = \dfrac{\text{ισχύς}}{\text{μάζα} \times \text{ταχύτητα} \times \text{επιτάχυνση}}$
(α$_2$) $t = 10^{-20}$ s
(α$_3$) $t = 10^{10}$ έτη
(α$_4$) $t = 10$ m s^{-1}

(β) Σε μια κυκλική κίνηση ακτίνας R η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση έχουν ίσα μέτρα. Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας v σε κάθε χρόνο t αν αρχικά (για $t = 0$) είναι v_0;

(γ) Για κίνηση με επιτάχυνση παράλληλη του διανύσματος θέσης από κέντρο Ο, δηλ. $\vec{a} = f\,\vec{r}$, δείξτε ότι η στροφορμή $\vec{L}$ ως προς το Ο είναι σταθερή και ότι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς είναι $\mathcal{R} = \dfrac{mv^3}{|f|L}$.

(δ) Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση και αρμονικό διεγέρτη μένει σταθερό το πλάτος με την πάροδο του χρόνου;

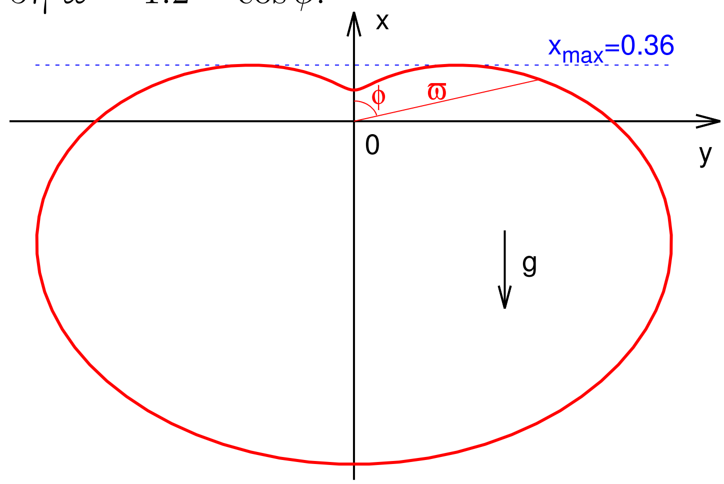
(ε) Από ύψος h αφήνουμε σώμα να πέσει. Αν λάβουμε υπόψη την περιστροφή της Γης η τροχιά του σώματος αποκλίνει προς την ανατολή ή προς τη δύση; Αλλάζει η απάντηση στο νότιο ημισφαίριο;

★ (στ) Η καμπύλη φάσης μιας ευθύγραμμης κίνησης αποτελεί τμήμα της ευθείας $v = -\lambda x$. Μπορεί να τέμνει τον άξονα των θέσεων; Σε τι δύναμη μπορεί να αντιστοιχεί αυτή η κίνηση;

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

Δαχτυλίδι μάζας $m = 1$ κινείται χωρίς τριβές περασμένο στο σύρμα του σχήματος, υπό την επίδραση βαρύτητας $\vec{g} = -\hat{x}$.

Το σύρμα σε πολικές συντεταγμένες έχει εξίσωση $\varpi = 1.2 - \cos\phi$.



(α) Βρείτε την ταχύτητα και την κινητική ενέργεια συναρτήσει της $\phi(t)$.

(β) Βρείτε την έκφραση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας $V(\phi)$ και γράψτε το ολοκλήρωμα ενέργειας, το οποίο αποτελεί και την εξίσωση κίνησης που καθορίζει την $\phi(t)$.

(γ) Αν το δαχτυλίδι βρίσκεται αρχικά στο $\phi = 0$ (δηλ. στο $x = \varpi\cos\phi = 0.2$, $y = \varpi\sin\phi = 0$) διερευνήστε τι κίνηση θα κάνει ανάλογα με την τιμή της αρχικής του ταχύτητας v_0.

(δ) Ποιο ολοκλήρωμα δίνει την περίοδο της κίνησης σε κάθε περίπτωση; (Μελετήστε ξεχωριστά την περίπτωση πλήρων περιστροφών και ταλαντώσεων γύρω από το $\phi = 0$.)

(ε) Στην περίπτωση μικρών ταλαντώσεων γύρω από το $\phi = 0$ δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης καταλήγει σε μορφή $\dot{\phi}^2 + \Omega^2\phi^2 =$ σταθερά (ισοδύναμα $\ddot{\phi} + \Omega^2\phi = 0$) και βρείτε την περίοδο.

★ (στ) Έστω περιστρέφουμε το σύρμα γύρω από τον άξονα $x'x$ με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \hat{x}$. Ποιο το δυναμικό της φυγόκεντρου, ποια η εξίσωση κίνησης που καθορίζει την $\phi(t)$ και ποια η εξίσωση που καθορίζει τα σημεία ισορροπίας;

★ = bonus ερωτήματα

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α$_1$) λάθος μονάδες (το δεξί μέλος είναι αδιάστατο αφού ισχύς = δύναμη × ταχύτητα = μάζα × επιτάχυνση × ταχύτητα)
(α$_2$) πρέπει να ληφθεί υπόψη κβαντική μηχανική
(α$_3$) η ηλικία του σύμπαντος (δεκτό γενικά)
(α$_4$) λάθος μονάδες

(β) $|\dot{v}| = \dfrac{v^2}{R} \Leftrightarrow \displaystyle\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \pm \int_0^t \frac{dt}{R} \Leftrightarrow -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = \pm\frac{t}{R} \Leftrightarrow v = \frac{v_0}{1 \mp v_0 t/R}$.

(γ) $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times m\vec{a} = 0$, άρα $\vec{L} =$ σταθερό.
$|\vec{a} \times \vec{v}| = \left|\left(\dot{v}\hat{\varepsilon} + \dfrac{v^2}{\mathcal{R}}\hat{n}\right) \times v\hat{\varepsilon}\right| = \dfrac{v^3}{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \mathcal{R} = \dfrac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}$. Όμως $|\vec{a} \times \vec{v}| = |f\vec{r} \times \vec{v}| = |f|\dfrac{L}{m}$, οπότε $\mathcal{R} = \dfrac{mv^3}{|f|L}$.

(δ) Ναι, μένει μόνο η μερική λύση η οποία είναι αρμονική (η λύση της ομογενούς ελαττώνεται εκθετικά και πρακτικά δεν υπάρχει μετά από πεπερασμένο χρόνο).

(ε) Ως προς αδρανειακό σύστημα με κέντρο το κέντρο της Γης, αρχικά το σώμα περιστρέφεται πιο γρήγορα απ΄ ότι η προβολή του πάνω στη Γη, οπότε πέφτοντας αποκλίνει προς την ανατολή.
Το ίδιο συμπεραίνουμε μέσω της φοράς της δύναμης Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma$ η οποία για $\vec{v}_\sigma$ με φορά προς τη Γη έχει φορά προς την ανατολή.
Το ίδιο και στο νότιο ημισφαίριο.

(στ) Δεν μπορεί να τέμνει τον άξονα των θέσεων γιατί στο σημείο τομής η ταχύτητα είναι μηδέν και άρα η θέση δεν θα έπρεπε να μεταβάλλεται (πάντα οι καμπύλες φάσης περνάνε «κάθετα» τον άξονα των θέσεων). Μπορεί όμως να πλησιάζει οσοδήποτε κοντά έχοντας πεπερασμένη αρνητική κλίση (για $\lambda > 0$) αρκεί και η επιτάχυνση να μηδενίζεται (τότε $\dfrac{dx}{dv} = \dfrac{dx/dt}{dv/dt} = \dfrac{v}{a} = \dfrac{0}{0}$ και μπορεί η κλίση να είναι πεπερασμένη). Στις περιπτώσεις αυτές χρειάζεται άπειρος χρόνος για να φτάσει η καμπύλη τον άξονα των θέσεων, όπως άλλωστε προκύπτει και από την ολοκλήρωση της $\dot{x} = -\lambda x \Leftrightarrow x = x_0 e^{-\lambda t}$ (με x_0 την θέση για $t = 0$) η οποία δίνει $v = -\lambda x_0 e^{-\lambda t}$.
Μπορεί επίσης να ξεκινά από σημείο οσοδήποτε κοντά στον άξονα των θέσεων έχοντας πεπερασμένη θετική κλίση (για $\lambda < 0$).
Τέτοιες περιπτώσεις προκύπτουν κοντά σε μέγιστο δυναμικού με ενέργεια ίση με το μέγιστο. Είναι $F = m\ddot{x} = \lambda^2 m x_0 e^{-\lambda t}$. Αν η δύναμη εξαρτάται μόνο από τη θέση τότε είναι $F = \lambda^2 m x$, δηλ. απωστική με σημείο ισορροπίας το $x = 0$ (η δυναμική ενέργεια έχει μέγιστο στο $x = 0$). Αυτή δεν είναι η μόνη περίπτωση. Αν η δύναμη εξαρτάται μόνο από την ταχύτητα τότε είναι $F = -\lambda m v$. Υπάρχουν επίσης άπειρες περιπτώσεις με $F = F(x, v)$, π.χ. $F = -\dfrac{\lambda m v}{2} + \dfrac{\lambda^2 m}{2}x$, αλλά και $F = F(x, v, t)$, π.χ. $F = -\dfrac{\lambda m v}{3} + \dfrac{\lambda^2 m}{3}x + \dfrac{\lambda^2 m x_0}{3}e^{-\lambda t}$.

Θέμα 2ο:

(α) $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} = \left(\dfrac{d\varpi}{d\phi}\hat{\varpi} + \varpi\hat{\phi}\right)\dot{\phi}$ με $\varpi = 1.2 - \cos\phi$ και $\dfrac{d\varpi}{d\phi} = \sin\phi$.

Ισοδύναμα σε καρτεσιανές:
$x(\phi) = (1.2 - \cos\phi)\cos\phi$,
$y(\phi) = (1.2 - \cos\phi)\sin\phi$,
$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} = \left(\dfrac{dx}{d\phi}\hat{x} + \dfrac{dy}{d\phi}\hat{y}\right)\dot{\phi}$ με
$\dfrac{dx}{d\phi} = 2\sin\phi\cos\phi - 1.2\sin\phi$ και
$\dfrac{dy}{d\phi} = 1.2\cos\phi + \sin^2\phi - \cos^2\phi$.

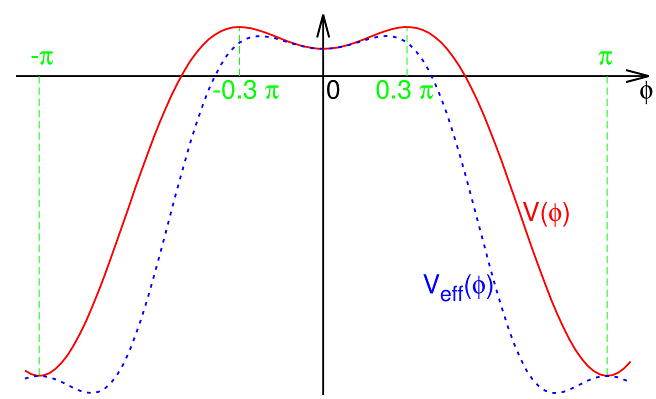
$T = \dfrac{v^2}{2} = (1.22 - 1.2\cos\phi)\,\dot{\phi}^2$.
(β) $V = mgx = \varpi\cos\phi = (1.2 - \cos\phi)\cos\phi$. Το ολοκλήρωμα ενέργειας $T + V = E$ γράφεται $(1.22 - 1.2\cos\phi)\,\dot{\phi}^2 + (1.2 - \cos\phi)\cos\phi = E$.

(γ) Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας (δηλ. το μέγιστο ύψος x) βρίσκεται μελετώντας την συνάρτηση $V(\phi)$. Είναι άρτια οπότε αρκεί να μελετηθεί στο διάστημα $[0, \pi]$. Η παράγωγος $V'(\phi) = 2\sin\phi\,(\cos\phi - 0.6)$ μηδενίζεται στα $\phi = 0, 0.3\pi, \pi$ (διότι $\arccos 0.6 \approx 0.3\pi$), είναι θετική στο $(0, 0.3\pi)$ και αρνητική στο $(0.3\pi, \pi)$. Επομένως η $V(\phi)$ έχει ελάχιστο στο $\phi = 0$ ίσο με $V(0) = 0.2$, μέγιστα στα $\phi = \pm 0.3\pi$ ίσα με $V(\pm 0.3\pi) = 0.36$ και ελάχιστο στο $\phi = \pi$ ίσο με $V(\pi) = -2.2$ (κόκκινη καμπύλη στο σχήμα).
Αν αρχικά το δαχτυλίδι βρίσκεται στο $\phi = 0$ και έχει ταχύτητα μέτρου v_0 η ενέργεια είναι $E = \dfrac{v_0^2}{2} + 0.2$. Αν $E > x_{\max} = 0.36 \Leftrightarrow |v_0| > \sqrt{0.32}$ θα περάσει από το μέγιστο ύψος και θα κάνει πλήρεις περιστροφές περνώντας από όλο το σύρμα. Αν $E < 0.36 \Leftrightarrow |v_0| < \sqrt{0.32}$ θα κάνει ταλάντωση στο διάστημα $[-\phi_0, \phi_0]$ όπου ϕ_0 η θετική λύση της $V(\phi) = E$. Αν $E = 0.36 \Leftrightarrow |v_0| = \sqrt{0.32}$ θα πλησιάζει επ' άπειρον το μέγιστο ύψος $x_{\max}$.

(δ) Από το ολοκλήρωμα ενέργειας
$|\dot{\phi}| = \sqrt{\dfrac{E - (1.2 - \cos\phi)\cos\phi}{1.22 - 1.2\cos\phi}}$.
Στην περίπτωση που το δαχτυλίδι κάνει πλήρεις περιστροφές ($E > 0.36$) η περίοδος είναι $T = 2\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\phi}{|\dot{\phi}|}$, ενώ για ταλαντώσεις στο διάστημα $[-\phi_0, \phi_0]$ γύρω από το $\phi = 0$ η περίοδος είναι $T = 4\displaystyle\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{|\dot{\phi}|}$, με $E = V(\phi_0)$.

(ε) Για μικρές ταλαντώσεις $|\phi| \ll 1$ είναι $V(\phi) \approx V(0) + V'(0)\phi + \dfrac{V''(0)}{2}\phi^2 = 0.2 + 0.4\phi^2$, ενώ η κινητική ενέργεια είναι $T \approx 0.02\dot{\phi}^2$ (κρατώντας μέχρι 2ης τάξης όρους). Άρα το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει $\dot{\phi}^2 + 20\phi^2 =$ σταθερά. Ισοδύναμα $\ddot{\phi} + 20\phi = 0$, δηλ. $\Omega = \sqrt{20}$. Η περίοδος $T = 2\pi/\Omega = \pi/\sqrt{5}$.

(στ) Η φυγόκεντρος δύναμη είναι $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = y\hat{y}$ και το αντίστοιχο δυναμικό $-\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{\varpi^2 \sin^2\phi}{2} = -\dfrac{(1.2 - \cos\phi)^2 \sin^2\phi}{2}$.
Το ολοκλήρωμα ενέργειας (που αποτελεί και την εξίσωση κίνησης) είναι $T + V_{\text{eff}} = E$, όπου το V_{eff} συμπεριλαμβάνει και τη συνεισφορά της φυγόκεντρου, δηλ. $(1.22 - 1.2\cos\phi)\,\dot{\phi}^2 + (1.2 - \cos\phi)\cos\phi - \dfrac{(1.2 - \cos\phi)^2\sin^2\phi}{2} = E$.
(Η Coriolis δεν συνεισφέρει στην ενέργεια σαν κάθετη στην ταχύτητα.)
Η εξίσωση κίνησης προκύπτει και από την προβολή του νόμου Νεύτωνα πάνω στο εφαπτόμενο μοναδιαίο στο σύρμα $\hat{\varepsilon} = \dfrac{dx}{ds}\hat{x} + \dfrac{dy}{ds}\hat{y}$, δηλ. $\vec{a}_\sigma \cdot \hat{\varepsilon} = \vec{g} \cdot \hat{\varepsilon} - [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \cdot \hat{\varepsilon} - 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma) \cdot \hat{\varepsilon} \Leftrightarrow \dot{v}_\sigma = -\dfrac{dx}{ds} + y\dfrac{dy}{ds}$ η οποία με $ds = v_\sigma dt$ ολοκληρώνεται και δίνει $\dfrac{v_\sigma^2}{2} + x - \dfrac{y^2}{2} = E$.
Η εξίσωση που καθορίζει τα σημεία ισορροπίας είναι η $V'_{\text{eff}}(\phi) = 0$ ή $\sin\phi(2\cos^3\phi - 3.6\cos^2\phi - 1.56\cos\phi + 2.4) = 0$.
Προκύπτουν οι ακόλουθες λύσεις $\phi \in (-\pi, \pi]$: $0, \pm 0.2234\pi, \pm 0.8164\pi, \pi$.



Οι θέσεις ισορροπίας μπορούν να βρεθούν και από την απαίτηση οι προβολές του βάρους και της φυγόκεντρου που εφάπτονται στο σύρμα να εξουδετερώνονται, $\vec{g} \cdot \hat{\varepsilon} - [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \cdot \hat{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow -\hat{x} \cdot \hat{\varepsilon} + y\hat{y} \cdot \hat{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dx}{d\phi} = y\dfrac{dy}{d\phi}$.