Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 29 Σεπτεμβρίου 2014
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 6ης Μαρτίου 2014: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐

Θέμα 1ο:

Έστω κίνηση σώματος μάζας m στο επίπεδο Oxy κατά την οποία η στροφορμή ως προς το O μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, $L = L_0 e^{-2\lambda t}$.

(α) Δείξτε ότι η εμβαδική ταχύτητα (ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού που διαγράφει η επιβατική ακτίνα η οποία ενώνει το σώμα με την αρχή O) μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

(β) Δείξτε ότι οι αζιμουθιακές συνιστώσες δύναμης και ταχύτητας (οι $\hat{\phi}$ συνιστώσες σε πολικές συντεταγμένες) είναι ανάλογες.

(γ) Δείξτε ότι η κίνηση με $r = r_0 e^{-\lambda t}$ και $\phi = \lambda t$ είναι συμβατή με μηδενική δύναμη στην ακτινική κατεύθυνση και $L = L_0 e^{-2\lambda t}$.

(δ) Για την κίνηση του προηγούμενου ερωτήματος να βρεθούν η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση καθώς και η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς.

Δίνεται η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d(r^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi}$.

Θέμα 2ο:

Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται στο επίπεδο Oxy μέσα σε πεδίο $V = 3xy - 4y^2$.

(α) Ποιες είναι οι εξισώσεις κίνησης;

(β) Λύστε τις εξισώσεις αυτές και βρείτε τη γενική μορφή των $x(t)$, $y(t)$.

Υπόδειξη: Απαλλείφοντας την $y(t)$ καταλήξτε σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς $x(t)$.

(γ) Αν αρχικά (για $t = 0$) είναι $x = 0$, $y = 0$, $v_x = 3$, $v_y = 1$, βρείτε τη θέση σε κάθε χρόνο.

★ (δ) Επαληθεύστε ότι η αρχή των αξόνων είναι σημείο ισορροπίας. Είναι ευσταθές ή ασταθές;

Θέμα 3ο:

Από ύψος h πάνω από την επιφάνεια της γης εκτοξεύουμε οριζόντια σώμα μάζας m με ταχύτητα v_o.

(α) Ποια η ενέργεια και η στροφορμή του σώματος;

(β) Ποια η v_o αν το σώμα εκτελεί τροχιά η οποία εφάπτεται της Γης σε κάποιο σημείο Γ; Ποια η ταχύτητα του σώματος στο σημείο Γ;

(γ) Ποια η v_o αν το σώμα μόλις διαφεύγει στο $r \to \infty$;

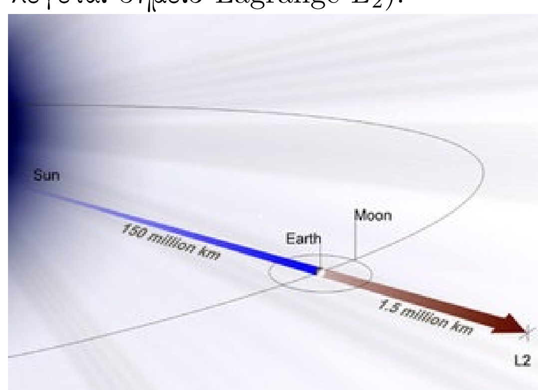
(δ) Ποια η v_o αν το σώμα διαφεύγει στο $r \to \infty$ και η ταχύτητά του εκεί είναι λv_o; (Το λ γνωστό.)

★ (ε) Ποια η τελική διεύθυνση κίνησης του σώματος στην τελευταία περίπτωση;

Η σταθερά παγκόσμιας έλξης G, η ακτίνα και η μάζα της γης (R, M) θεωρούνται γνωστά.

Θέμα 4ο:

Το Herschel Infrared Observatory βρίσκεται σε ένα ιδιαίτερο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τη Γη με τον Ήλιο αλλά μακρύτερα από ότι η Γη από τον Ήλιο, έτσι ώστε να στρέφει πάντα τα νώτα του προς τον Ήλιο αλλά και να είναι σχετικά κοντά στη Γη. Συγκεκριμένα, απέχει απόσταση d από τη Γη προς την αντίθετη κατεύθυνση προς την οποία είναι ο Ήλιος, τέτοια ώστε η συνολική βαρυτική δύναμη που δέχεται από τον Ήλιο και τη Γη να είναι συμβατή με περιστροφή του παρατηρητηρίου γύρω από τον Ήλιο με την ίδια γωνιακή ταχύτητα όπως αυτή της Γης γύρω από τον Ήλιο (Το σημείο αυτό λέγεται σημείο Lagrange L_2).



(α) Γράψτε την κεντρομόλο επιτάχυνση του Herschel συναρτήσει της μάζας του Ήλιου $M_\oplus$, της απόστασης Γης-Ηλίου $r_\oplus$ και της ακτίνας της τροχιάς του Herschel $r_\oplus + d$.

(β) Γράψτε την εξίσωση που καθορίζει την απόσταση d συναρτήσει του λόγου μαζών Γης και Ήλιου $M_\oplus/M_\odot$ και της απόστασης Γης-Ηλίου $r_\oplus$.

(γ) Δείξτε ότι προσεγγιστικά (για $d \ll r_\oplus$) προκύπτει $d \approx r_\oplus \left(M_\oplus/3M_\odot\right)^{1/3}$.

Δίνεται $(1+x)^\nu \approx 1 + \nu x$ για μικρά x.

★ = bonus ερωτήματα

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α) Το εμβαδόν που σαρώνει η επιβατική ακτίνα σε χρόνο dt είναι $d\mathcal{E} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times (\vec{r} + d\vec{r})| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$ με $d\vec{r} = \vec{v}dt$, επομένως η εμβαδική ταχύτητα είναι $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{L}{2m} = \frac{L_0}{2m}e^{-2\lambda t}$.

(β) $F_\phi = m\vec{a} \cdot \hat{\phi} = \frac{1}{r}\frac{d(mr^2\dot{\phi})}{dt} = \frac{1}{r}\dot{L}$, διότι $L = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mrv_\phi = mr^2\dot{\phi}$. Αφού $\dot{L} = -2\lambda L$ έχουμε $F_\phi = -2\lambda L/r = -2\lambda m v_\phi$.

Αλλιώς: $\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times \vec{F} = rF_\phi\hat{z}$, δηλ. $\dot{L} = rF_\phi$. Αφού $\dot{L} = -2\lambda L = -2\lambda mrv_\phi$ έχουμε $F_\phi = -2\lambda m v_\phi$.

(γ) Η $\hat{r}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα ικανοποιείται, αφού $a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = 0$ σε συμφωνία με την $F_r = 0$.

$L = mr^2\dot{\phi} = mr_0^2\lambda e^{-2\lambda t}$, σε συμφωνία με την $L = L_0 e^{-2\lambda t}$ αν $L_0 = mr_0^2\lambda$.

Από την $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα προκύπτει $F_\phi = \frac{1}{r}\frac{d(mr^2\dot{\phi})}{dt} = -2m\lambda^2 r_0 e^{-\lambda t}$, όπως αναμενόταν με βάση το ερώτημα (β) σύμφωνα με το οποίο $F_\phi = -2\lambda m v_\phi$ (με $v_\phi = r\dot{\phi} = \lambda r_0 e^{-\lambda t}$).

Επομένως η κίνηση με $r = r_0 e^{-\lambda t}$ και $\phi = \lambda t$ είναι συμβατή με $F_r = 0$ και $L = L_0 e^{-2\lambda t}$ (με $L_0 = mr_0^2\lambda$).

Η συγκεκριμένη κίνηση «επιλέγεται» από τις αρχικές συνθήκες $r = r_0$, $\phi = 0$, $v_\phi = \lambda r_0$ και $v_r = -\lambda r_0$.

(δ) $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} = \lambda r(-\hat{r} + \hat{\phi})$,

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi} = -2\lambda^2 r\hat{\phi}$,

$v = \sqrt{2}\,\lambda r$, $\hat{\varepsilon} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{-\hat{r} + \hat{\phi}}{\sqrt{2}}$,

$a_\varepsilon = \vec{a} \cdot \hat{\varepsilon} = -\sqrt{2}\,\lambda^2 r$ (το ίδιο από $a_\varepsilon = \dot{v}$),

$\hat{n} = \hat{z} \times \hat{\varepsilon} = \frac{-\hat{r} - \hat{\phi}}{\sqrt{2}}$,

$a_\kappa = \vec{a} \cdot \hat{n} = \sqrt{2}\,\lambda^2 r$ (το ίδιο από $\vec{a}_\kappa = \vec{a} - \vec{a}_\varepsilon$),

$R = \frac{v^2}{a_\kappa} = \sqrt{2}\,r$.

Θα μπορούσαμε να βρούμε τα R και $\hat{n}$ (και την a_κ) μέσω της $\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} = v\frac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \frac{v}{R}\hat{n}$. Είναι $\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} = -\lambda\frac{\hat{r} + \hat{\phi}}{\sqrt{2}}$ (αφού $\dot{\hat{r}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$, $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{r}$), οπότε $\frac{v}{R} = \left|\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}\right| = \lambda \Leftrightarrow R = \frac{v}{\lambda} = \sqrt{2}\,r$ και $\hat{n} = \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}/\left|\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}\right| = \frac{-\hat{r} - \hat{\phi}}{\sqrt{2}}$.

$a_\kappa = \vec{a} \cdot \hat{n} = \sqrt{2}\,\lambda^2 r$.

Θέμα 2^o:

(α) Από $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ βρίσκουμε

$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -3y\,, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -3x + 8y.$

Άρα οι εξισώσεις κίνησης είναι $\begin{cases} \ddot{x} = -3y \\ \ddot{y} = -3x + 8y \end{cases}$

(β) Από την πρώτη είναι $y = -\ddot{x}/3$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη έχουμε $\frac{d^4x}{dt^4} - 8\frac{d^2x}{dt^2} - 9x = 0$. Αυτή είναι μια γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση η οποία δέχεται λύσεις της μορφής $e^{\lambda t}$. Αντικαθιστώντας προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^4 - 8\lambda^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = 9$ ή -1, δηλ. $\lambda = 3$ ή -3 ή i ή $-i$. Άρα η γενική λύση είναι $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} + C_{3o}e^{it} + C_{4o}e^{-it}$. Οι δύο τελευταίοι όροι γράφονται ισοδύναμα $C_3\sin t + C_4\cos t$ (διότι $e^{it} = \cos t + i\sin t$, $e^{-it} = \cos t - i\sin t$), οπότε η γενική λύση για την x είναι $x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} + C_3\sin t + C_4\cos t$.

Από $y = -\ddot{x}/3$ βρίσκουμε τη γενική λύση για την y, $y(t) = -3C_1e^{3t} - 3C_2e^{-3t} + \frac{C_3}{3}\sin t + \frac{C_4}{3}\cos t$.

Θα μπορούσαμε να αλλάξουμε σύστημα συντεταγμένων και να απλοποιήσουμε τις διαφορικές εξισώσεις. Διαγωνοποιώντας τον πίνακα $\mathbf{A}$ στην $\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, όπου $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, βρίσκουμε ιδιοτιμές -1, 9 και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Άρα με την αλλαγή συντεταγμένων

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{3x + y}{\sqrt{10}} \\ y' &= \frac{-x + 3y}{\sqrt{10}} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}} \\ y &= \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}} \end{aligned}\right.$$

(δηλ. στρέφοντας το σύστημα Oxy κατά γωνία $\arcsin 1/\sqrt{10}$) οι διαφορικές εξισώσεις γίνονται $\ddot{x}' = -x'$ και $\ddot{y}' = 9y'$, δηλ. χωρίζονται και λύνονται η καθεμία ανεξάρτητα: $y' = D_1e^{3t} + D_2e^{-3t}$, $x' = D_3\sin t + D_4\cos t$, οπότε με $x = (3x' - y')/\sqrt{10}$, $y = (x' + 3y')/\sqrt{10}$ καταλήγουμε στην ίδια γενική λύση όπως πριν.

Στις νέες αυτές συντεταγμένες η δυναμική ενέργεια είναι $V = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{9}{2}y'^2$, οπότε φαίνεται ότι η κίνηση στους δύο νέους άξονες είναι ανεξάρτητη (αρμονικός ταλαντωτής στον x' και απωστικό δυναμικό στον y').

(γ) Από τις αρχικές συνθήκες, θέτοντας $t = 0$ στις $x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} + C_3\sin t + C_4\cos t$,

$y(t) = -3C_1 e^{3t} - 3C_2 e^{-3t} + \frac{C_3}{3}\sin t + \frac{C_4}{3}\cos t,$
$v_x(t) = 3C_1 e^{3t} - 3C_2 e^{-3t} + C_3 \cos t - C_4 \sin t,$
$v_y(t) = -9C_1 e^{3t} + 9C_2 e^{-3t} + \frac{C_3}{3}\cos t - \frac{C_4}{3}\sin t,$
βρίσκουμε

$$\left.\begin{array}{l} 0 = C_1 + C_2 + C_4 \\ 0 = -3C_1 - 3C_2 + \frac{C_4}{3} \\ 3 = 3C_1 - 3C_2 + C_3 \\ 1 = -9C_1 + 9C_2 + \frac{C_3}{3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 3 \\ C_4 = 0 \end{array}\right.$$

Άρα η θέση του σώματος σε κάθε χρόνο είναι $x(t) = 3\sin t$, $y(t) = \sin t$.
Το σώμα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση με μοναδιαία κυκλική συχνότητα, πάνω στην ευθεία $x = 3y$, μεταξύ των σημείων $\{x = -3, y = -1\}$ και $\{x = 3, y = 1\}$, με πλάτος $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.
Για τυχαίες αρχικές συνθήκες x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0} βρίσκουμε όμοια $C_1 = \frac{x_0 - 3y_0}{20} + \frac{v_{x0} - 3v_{y0}}{60}$, $C_2 = \frac{x_0 - 3y_0}{20} - \frac{v_{x0} - 3v_{y0}}{60}$, $C_3 = 3\frac{3v_{x0} + v_{y0}}{10}$, $C_4 = 3\frac{3x_0 + y_0}{10}$.
Άρα η λύση για τυχαίες αρχικές συνθήκες είναι
$x(t) = \frac{x_0 - 3y_0}{10}\cosh(3t) + \frac{v_{x0} - 3v_{y0}}{30}\sinh(3t) + 3\frac{3v_{x0} + v_{y0}}{10}\sin t + 3\frac{3x_0 + y_0}{10}\cos t,$
$y(t) = -3\frac{x_0 - 3y_0}{10}\cosh(3t) - \frac{v_{x0} - 3v_{y0}}{10}\sinh(3t) + \frac{3v_{x0} + v_{y0}}{10}\sin t + \frac{3x_0 + y_0}{10}\cos t.$

(δ) Η αρχή των αξόνων είναι σημείο ισορροπίας αφού για $x = y = 0$ είναι $F_x = F_y = 0$.
Αν μετακινήσουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας οι εξισώσεις κίνησης είναι αυτές του ερωτήματος (α) (δεν χρειάζεται καν να τις αναπτύξουμε κατά Taylor αφού είναι ήδη γραμμικές ως προς τις μικρές ποσότητες) και η γενική λύση αυτή του ερωτήματος (β). Λόγω του μέρους e^{3t} στη γενική λύση η ισορροπία είναι ασταθής.

Θέμα 3ο:

(α) $E = \frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{R+h}$ (θεωρούμε μηδενική δυναμική ενέργεια στο άπειρο), $L = m(R+h)v_o$.
(β) Από διατήρηση ενέργειας $\frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{R+h} = \frac{1}{2}mv_\Gamma^2 - \frac{GMm}{R}$ και από διατήρηση στροφορμής $m(R+h)v_o = mRv_\Gamma$. Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε $v_o = \sqrt{\frac{2GMR}{(R+h)(h+2R)}}$ και $v_\Gamma = \sqrt{\frac{2GM(R+h)}{R(h+2R)}}$.
(γ) Από διατήρηση ενέργειας $\frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{R+h} = 0 \Leftrightarrow v_o = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$.
(δ) Από διατήρηση ενέργειας $\frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{R+h} = \frac{1}{2}m(\lambda v_o)^2 + 0 \Leftrightarrow v_o = \sqrt{\frac{2}{1-\lambda^2}\frac{GM}{R+h}}$.
(ε) Η τροχιά είναι υπερβολική με εξίσωση $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$ και ασύμπτωτη την $\cos\theta_\infty = -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \theta_\infty - \frac{\pi}{2} = \arcsin\frac{1}{\varepsilon}$. Η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}}$. Αντικαθιστώντας την ενέργεια $E = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\frac{GMm}{R+h}$ και την στροφορμή $L = \sqrt{\frac{2GMm^2(R+h)}{1-\lambda^2}}$ βρίσκουμε $\varepsilon = \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}$, επομένως η τελική διεύθυνση κίνησης σχηματίζει γωνία $\theta_\infty - \frac{\pi}{2} = \arcsin\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$ με την αρχική.

Θέμα 4ο:

Η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο με γωνιακή ταχύτητα $\Omega_\oplus = \sqrt{GM_\odot/r_\oplus^3}$ (νόμος Kepler).
Το Herschel κινείται με αυτή την γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον Ήλιο, σε τροχιά ακτίνας $r_\oplus + d$, άρα η συνισταμένη των βαρυτικών δυνάμεων πρέπει να δίνει κεντρομόλο δύναμη $m\Omega_\oplus^2(r_\oplus + d) = GM_\odot m(r_\oplus + d)/r_\oplus^3$ (όπου m η μάζα του Herschel), δηλ. $\frac{GM_\odot m}{(r_\oplus + d)^2} + \frac{GM_\oplus m}{d^2} = \frac{GM_\odot m(r_\oplus + d)}{r_\oplus^3} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{M_\oplus/M_\odot}{x^2} = 1 + x$, όπου $x = \frac{d}{r_\oplus}$ είναι η απόσταση d μετρημένη σε αστρονομικές μονάδες ($r_\oplus = 1$ AU). Αφού $x \ll 1$ είναι $1/(1+x)^2 \approx 1 - 2x$ (ανάπτυγμα Taylor), οπότε προσεγγιστικά $1 - 2x + \frac{M_\oplus/M_\odot}{x^2} = 1 + x \Leftrightarrow x \approx \left(\frac{M_\oplus}{3M_\odot}\right)^{1/3}$.

Είναι $M_\odot/M_\oplus = 333000$ οπότε $x = 0.01$, δηλ. $d = 0.01$ AU $= 1.5 \times 10^6$ km.