Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 16 Ιουνίου 2014
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

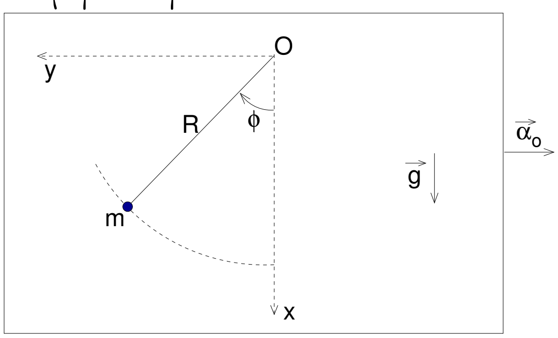
Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ______________

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 6ης Μαρτίου 2014: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐

Θέμα 1ο:

Όχημα επιταχύνεται από την ηρεμία με σταθερή οριζόντια επιτάχυνση $\vec{a}_0$. Μέσα στο όχημα υπάρχει παρατηρητής Π ο οποίος κρατά σώμα μάζας m μέσω αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους R, μέσα σε ομογενή βαρύτητα $\vec{g}$. Η μάζα m είναι αρχικά ακίνητη στην κατώτερη θέση.



(α) Ποιες δυνάμεις «βλέπει» ο Π να ασκούνται στη μάζα m (πραγματικές και υποθετικές);

(β) Δικαιολογήστε γιατί το σώμα εκτελεί ταλάντωση εκκρεμούς (πάντα στο επιταχυνόμενο σύστημα του Π). Ποια η θέση ισορροπίας και ποιες οι ακραίες θέσεις της μάζας m; Πως από τη γωνία μέγιστης εκτροπής από την κατακόρυφη μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση $\vec{a}_0$;

(γ) Αν στο σώμα ασκείται και δύναμη αντίστασης $\vec{F}_\alpha = -\dfrac{m\lambda}{R}|\vec{v}_\sigma|\vec{v}_\sigma$ όπου λ σταθερά και $\vec{v}_\sigma$ η ταχύτητα του σώματος m ως προς τον Π, βρείτε τη διαφορική εξίσωση που καθορίζει τη γωνία μεταξύ νήματος και κατακόρυφης $\phi(t)$ για το πρώτο στάδιο της κίνησης, από την αρχική στιγμή όπου το σώμα είναι ακίνητο στην κατώτερη θέση $\phi = 0$ μέχρι τη νέα θέση όπου το σώμα ξανά ακινητοποιείται στιγμιαία ως προς τον Π.

★ (δ) Ποια η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi}$ σαν συνάρτηση της γωνίας ϕ για το πρώτο στάδιο της κίνησης του προηγούμενου ερωτήματος;

★ (ε) Ποια η εξίσωση κίνησης αν η αντίσταση είναι $\vec{F}_\alpha = -\dfrac{m\lambda}{R}|\vec{v}_a|\vec{v}_a$ όπου $\vec{v}_a = \vec{v}_\sigma + \vec{v}_0$ η ταχύτητα του σώματος m ως προς αδρανειακό παρατηρητή που βλέπει το όχημα να κινείται με $\vec{v}_0 = \vec{a}_0 t$;

Δίνεται η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a}_\sigma = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (2\dot{\varpi}\dot{\phi} + \varpi\ddot{\phi})\hat{\phi}$.

Θέμα 2ο:

Έστω πεδίο δύναμης $\vec{F} = (2x + y)\hat{x} + F_y(x, y)\hat{y}$.

(α) Για ποιες $F_y(x, y)$ είναι συντηρητικό και ποια είναι τότε η δυναμική ενέργεια;

(β) Ποια είναι η $F_y(x, y)$ αν το πεδίο είναι συντηρητικό και τα σημεία της ευθείας $y = -2x$ είναι όλα σημεία ισορροπίας;

(γ) Έστω μια άλλη περίπτωση συντηρητικού πεδίου μορφής $\vec{F} = (2x + y)\hat{x} + F_y(x, y)\hat{y}$, στο οποίο ένα σώμα μάζας $m = 1$ κινείται με $x(t) = e^{-t}$. Ποια είναι η $F_y(x, y)$;
Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα την $y(t)$.

Θέμα 3^o:

Ένα διαστημόπλοιο κινείται προς ένα μεγάλο Πλανήτη. Στο αδρανειακό σύστημα του Πλανήτη, το διαστημόπλοιο όταν αρχικά βρίσκεται μακρυά του, έχει ταχύτητα v_0 και παράμετρο σκέδασης b. Η ελκτική βαρυτική δύναμη που ασκείται απο τον Πλανήτη στο διαστημόπλοιο είναι $F = -k/r^2$.

(α) Υπολογίστε τη στροφορμή L και την ενέργεια E του διαστημοπλοίου, θεωρώντας μηδενική δυναμική ενέργεια όταν τα δύο σώματα είναι μακρυά.

(β) Σχεδιάστε το υποθετικό δυναμικό και εξηγείστε/δικαιολογήστε το είδος της τροχιάς που διαγράφει το διαστημόπλοιο στο σύστημα του Πλανήτη.

(γ) Υπολογίστε συναρτήσει της ενέργειας του διαστημοπλοίου και της σταθεράς k, την παράμετρο της σκέδασης b, έτσι ώστε να αλλάξει πορεία το διαστημόπλοιο μετά από τη σκέδασή του από τον Πλανήτη κατά 120 μοίρες.

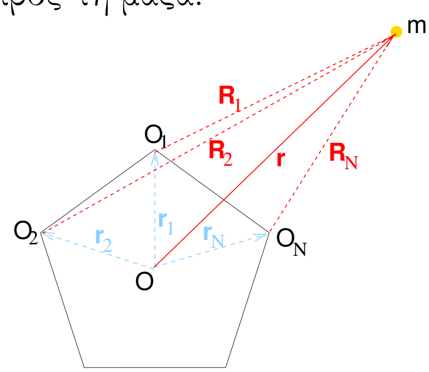
(δ) Στην περίπτωση του προηγούμενου ερωτήματος εκτροπής του διαστημοπλοίου κατά 120 μοίρες, υπολογίστε την πολική εξίσωση της τροχιάς του διαστημοπλοίου $r(\theta)$ συναρτήσει της παραμέτρου της σκέδασης b που υπολογίσθηκε στο ανωτέρω ερώτημα. Ποια η ελάχιστη απόσταση μεταξύ του Πλανήτη και του διαστημοπλοίου και ποια η μέγιστη ταχύτητα του διαστημοπλοίου;

(ε) Εάν $\vec{v}_\pi$ είναι η απόλυτη ταχύτητα του Πλανήτη γύρω από τον Ήλιο, $\vec{u}_\delta$ είναι η σχετική ταχύτητα του διαστημοπλοίου ως προς τον Πλανήτη κάποια στιγμή μετά τη σκέδαση από τον Πλανήτη, και ϕ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα δύο αυτά διανύσματα, ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του διαστημοπλοίου ως προς τον Ήλιο συναρτήσει των μέτρων των $\vec{v}_\pi$, $\vec{u}_\delta$ και της ϕ ;

Θεωρήστε γνωστή την εξίσωση τροχιάς $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$ με $p = \dfrac{L^2}{mk}$ και $\varepsilon = \sqrt{1+\dfrac{2L^2E}{k^2m}}$.

Θέμα 4^o:

N πεδία κεντρικών δυνάμεων έχουν τα κέντρα τους O_1, O_2, …, O_N στις κορυφές κανονικού $N-$γώνου (βλέπε σχήμα). Μια μάζα m βρίσκεται σε τυχούσα απόσταση $\vec{r}$ από το κέντρο Ο του $N-$γώνου. Η δύναμη $\vec{F}_i\,, i = 1, 2, \ldots, N$, που ασκείται από κάθε ένα από τα πεδία πάνω στη μάζα m είναι ελκτική και είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο του αντίστοιχου πεδίου, δηλ., ισούται με $\vec{F}_i = -k\vec{R}_i\,, i = 1, 2, \ldots, N$, όπου $\vec{R}_i$ είναι το διάνυσμα από το κέντρο του πεδίου προς τη μάζα.



(α) Να αποδειχθεί ότι η συνολική δύναμη που ασκείται από τα πεδία πάνω στη μάζα είναι $\vec{F} = -Nk\vec{r}$ και ότι η κίνηση της μάζας είναι επίπεδη.

(β) Την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$, η μάζα βρίσκεται στην τυχούσα θέση $\vec{r}_0$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0$. Να λυθεί η εξίσωση της κίνησης που προκύπτει από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα και να υπολογισθούν η θέση του σωματιδίου $\vec{r}(t)$ συναρτήσει των $\vec{r}_0$ και $\vec{v}_0$.

(γ) Εστω ότι $\vec{r}_0 = x_0\,\hat{x}$ και $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{y}$. Δείξτε ότι η τροχιά είναι ελλειπτική.

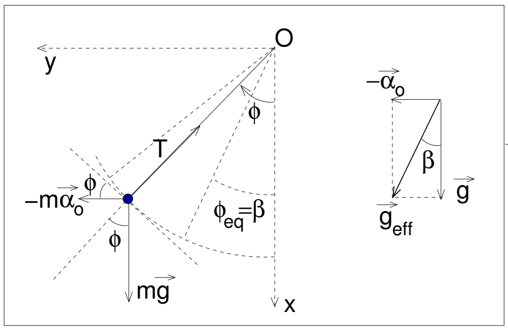
(δ) Κάτω από ποιες συνθήκες η κίνηση είναι κυκλική;

★ = bonus ερωτήματα

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) Εκτός της τάσης του νήματος και του βάρους $m\vec{g}$ ασκείται και η υποθετική δύναμη $-m\vec{a}_0$.
(β) Αφού $m\vec{g} - m\vec{a}_0 =$ σταθερά έχουμε κίνηση ίδια με κίνηση εκκρεμούς σε «βαρύτητα» $\vec{g}_{\rm eff} = \vec{g} - \vec{a}_0$. Η θέση ισορροπίας είναι στη φορά της $\vec{g}_{\rm eff}$, όπως στο σχήμα, δηλ. σε γωνία $\phi_{\rm eq} = \beta = \arctan\dfrac{a_0}{g}$.



Οι ακραίες θέσεις είναι η κατώτερη (αφού εκεί είναι μηδέν η ταχύτητα) και η συμμετρική ως προς τη θέση ισορροπίας, δηλ. η $\phi_{\rm max} = 2\beta$.
Αφού $\dfrac{\phi_{\rm max}}{2} = \beta = \arctan\dfrac{a_0}{g}$ είναι $\dfrac{a_0}{g} = \tan\dfrac{\phi_{\rm max}}{2}$ από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του οχήματος a_0.
Αλλιώς: Ο νόμος Νεύτωνα $m\vec{a}_\sigma = -m\vec{a}_0 + m\vec{g} + \vec{T}$ με $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$ και $\vec{a}_\sigma = -R\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$ δίνει στη $\hat{\phi}$ κατεύθυνση $\ddot{\phi} = \dfrac{a_0}{R}\cos\phi - \dfrac{g}{R}\sin\phi$.
Με $a_0 = g_{\rm eff}\sin\beta$, $g = g_{\rm eff}\cos\beta$, $g_{\rm eff} = \sqrt{a_0^2 + g^2}$ (βλέπε σχήμα), έχουμε $\ddot{\phi} = -\dfrac{g_{\rm eff}}{R}\sin(\phi - \beta)$, οπότε με $\theta = \phi - \beta$ προκύπτει η συνήθης εξίσωση του εκκρεμούς $\ddot{\theta} + \dfrac{g_{\rm eff}}{R}\sin\theta = 0$.
Η θέση ισορροπίας είναι η $\theta_{\rm eq} = 0 \Leftrightarrow \phi_{\rm eq} = \beta$.
Η μια ακραία θέση είναι η $\phi_{\rm min} = 0 \Leftrightarrow \theta_{\rm min} = -\beta$ και άρα η άλλη είναι η αντίθετη, $\theta_{\rm max} = +\beta$. Αυτή αντιστοιχεί στη γωνία μέγιστης εκτροπής από την κατακόρυφη $\phi_{\rm max} = 2\beta$.
Αφού $\dfrac{\phi_{\rm max}}{2} = \beta = \arctan\dfrac{a_0}{g}$ είναι $\dfrac{a_0}{g} = \tan\dfrac{\phi_{\rm max}}{2}$.
(γ) Στο στάδιο αυτό της κίνησης η ταχύτητα είναι $\vec{v}_\sigma = R\dot{\phi}\hat{\phi}$ με $\dot{\phi} \geq 0$, άρα $|\vec{v}_\sigma| = R\dot{\phi}$ και η αντίσταση είναι $\vec{F}_\alpha = -m\lambda R\dot{\phi}^2\hat{\phi}$.
Ο νόμος Νεύτωνα $m\vec{a}_\sigma = -m\vec{a}_0 + m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_\alpha$ με $\vec{a}_\sigma = -R\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$ δίνει στη $\hat{\phi}$ κατεύθυνση $\ddot{\phi} = \dfrac{a_0}{R}\cos\phi - \dfrac{g}{R}\sin\phi - \lambda\dot{\phi}^2$.
(δ) Με $\ddot{\phi} = \dfrac{d\dot{\phi}}{d\phi}\dot{\phi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\dot{\phi}^2}{d\phi}$ η προηγούμενη εξίσωση γίνεται $\dfrac{d\dot{\phi}^2}{d\phi} + 2\lambda\dot{\phi}^2 = \dfrac{2a_0}{R}\cos\phi - \dfrac{2g}{R}\sin\phi$, διαφορική εξίσωση που δίνει την $\dot{\phi}^2$ σαν συνάρτηση της ϕ.
Η λύση της ομογενούς είναι $\dot{\phi}^2_{\rm ομ} = De^{-2\lambda\phi}$. Η μερική λύση είναι $\dot{\phi}^2_{\rm μερ} = A\cos\phi + B\sin\phi$ με την αντικατάσταση να δίνει $B + 2\lambda A = \dfrac{2a_0}{R}$ από τους συντελεστές του $\cos\phi$ και $-A + 2\lambda B = -\dfrac{2g}{R}$ από τους συντελεστές του $\sin\phi$. Η λύση του συστήματος δίνει $A = \dfrac{4\lambda a_0 + 2g}{R(1+4\lambda^2)}$, $B = \dfrac{2a_0 - 4\lambda g}{R(1+4\lambda^2)}$ οπότε $\dot{\phi}^2_{\rm μερ} = \dfrac{4\lambda a_0 + 2g}{R(1+4\lambda^2)}\cos\phi + \dfrac{2a_0 - 4\lambda g}{R(1+4\lambda^2)}\sin\phi$.
Επομένως η γενική λύση είναι
$\dot{\phi}^2 = De^{-2\lambda\phi} + \dfrac{4\lambda a_0 + 2g}{R(1+4\lambda^2)}\cos\phi + \dfrac{2a_0 - 4\lambda g}{R(1+4\lambda^2)}\sin\phi$.
Η αρχική συνθήκη $\dot{\phi}|_{\phi=0} = 0$ προσδιορίζει τη σταθερά $D = -\dfrac{4\lambda a_0 + 2g}{R(1+4\lambda^2)}$, οπότε η λύση για το πρώτο στάδιο της κίνησης είναι $\dot{\phi} = \sqrt{\dfrac{4\lambda a_0 + 2g}{R(1+4\lambda^2)}\left(\cos\phi - e^{-2\lambda\phi}\right) + \dfrac{2a_0 - 4\lambda g}{R(1+4\lambda^2)}\sin\phi}$.
Αν θέσουμε $2\lambda = \tan c$ με $c \in (0, \pi/2)$, μπορούμε να γράψουμε τη λύση σαν $\dot{\phi} = \sqrt{\dfrac{2g_{\rm eff}\cos c}{R}\left[\cos(\beta - c - \phi) - \cos(\beta - c)e^{-\phi\tan c}\right]}$.
Η γωνιακή ταχύτητα μηδενίζεται για $\phi = 0$ και για $\phi = \phi_{\rm max} \in (0, 2\beta)$ όπου η φορά κίνησης του σώματος αντιστρέφεται.
(ε) Η ταχύτητα $\vec{v}_a$ είναι $\vec{v}_a = -a_0 t\hat{y} + R\dot{\phi}\hat{\phi} = -a_0 t\sin\phi\ \hat{\varpi} + (R\dot{\phi} - a_0 t\cos\phi)\hat{\phi}$ και το μέτρο της $|\vec{v}_a| = \sqrt{a_0^2 t^2 + R^2\dot{\phi}^2 - 2R\dot{\phi}a_0 t\cos\phi}$. Άρα η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει την εξίσωση κίνησης $\ddot{\phi} = \dfrac{a_0}{R}\cos\phi - \dfrac{g}{R}\sin\phi - \lambda\left(\dot{\phi} - \dfrac{a_0}{R}t\cos\phi\right)\sqrt{\dfrac{a_0^2}{R^2}t^2 + \dot{\phi}^2 - 2\dfrac{a_0}{R}t\dot{\phi}\cos\phi}$.
Η $\hat{\varpi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει την τάση του νήματος $\dfrac{T}{mR} = \dot{\phi}^2 + \dfrac{a_0}{R}\sin\phi + \dfrac{g}{R}\cos\phi + \lambda\dfrac{a_0}{R}t\sin\phi\sqrt{\dfrac{a_0^2}{R^2}t^2 + \dot{\phi}^2 - 2\dfrac{a_0}{R}t\dot{\phi}\cos\phi}$.
Θέτοντας $a_0 = g_{\rm eff}\sin\beta$, $g = g_{\rm eff}\cos\beta$ και μετρώντας το χρόνο σε $\sqrt{R/g_{\rm eff}}$ (δηλ. με $\sqrt{g_{\rm eff}/R}\ t \to t$) η εξίσωση κίνησης γράφεται $\ddot{\phi} = -\sin(\phi - \beta) - \lambda\left(\dot{\phi} - t\cos\phi\sin\beta\right)\sqrt{t^2\sin^2\beta + \dot{\phi}^2 - 2t\dot{\phi}\cos\phi\sin\beta}$ και η τάση του νήματος είναι $\dfrac{T}{mg_{\rm eff}} = \cos(\phi - \beta) + \dot{\phi}^2 + \lambda t\sin\phi\sin\beta\sqrt{t^2\sin^2\beta + \dot{\phi}^2 - 2t\dot{\phi}\cos\phi\sin\beta}$.

Θέμα 2ο:

(α) Η $\hat{x}$ συνιστώσα της $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ δίνει
$2x + y = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \Leftrightarrow V = -x^2 - yx + f(y)$,
οπότε η $\hat{y}$ συνιστώσα δίνει $F_y(x,y) = x - \dfrac{df(y)}{dy}$
($f(y)$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση του y).
Αλλιώς: Η απαίτηση $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ δίνει $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial(2x+y)}{\partial y} = 1 \Leftrightarrow F_y = x + g(y)$, όπου $g(y)$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση του y. Στη συνέχεια η $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ δίνει τη δυναμική ενέργεια: Η $\hat{x}$ συνιστώσα δίνει $2x + y = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \Leftrightarrow V = -x^2 - yx + f(y)$ και η $\hat{y}$ συνιστώσα $x + g(y) = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \Leftrightarrow g(y) = -\dfrac{df(y)}{dy}$.
(β) Πρέπει $\vec{F}|_{y=-2x} = 0 \Leftrightarrow \left[x - \dfrac{df(y)}{dy}\right]_{y=-2x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{df(y)}{dy} = -\dfrac{y}{2}$. Άρα $F_y(x,y) = x + \dfrac{y}{2}$.
Τότε $\vec{F} = \dfrac{1}{2}(2x+y)(2\hat{x}+\hat{y})$, οπότε με κατάλληλη στροφή του συστήματος συντεταγμένων $x' = x\cos\phi + y\sin\phi$, $y' = -x\sin\phi + y\cos\phi$ με $\sin\phi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\phi = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ έχουμε $\vec{F} = \dfrac{3}{2}x'\hat{x}'$.
(γ) $\ddot{x} = 2x + y \Leftrightarrow e^{-t} = 2e^{-t} + y \Leftrightarrow y = -e^{-t}$.
$\ddot{y} = x - \dfrac{df(y)}{dy} \Leftrightarrow -e^{-t} = e^{-t} - \dfrac{df(y)}{dy} \Leftrightarrow \dfrac{df(y)}{dy} = -2y$. Άρα $F_y = x + 2y$.

Θέμα 3ο:

(α) $E = mv_0^2/2$, $L = m|\vec{r} \times \vec{v}_0| = mbv_0$.
(β) Για θετική ενέργεια η τροχιά είναι υπερβολική.
(γ) Η εξίσωση τροχιάς είναι $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta}$ με $p = L^2/mk = mb^2v_0^2/k$ και $\varepsilon = \sqrt{1 + 2L^2E/k^2m} = \sqrt{1 + m^2b^2v_0^4/k^2}$.
Σε υπερβολικές τροχιές οι ασύμπτωτες ($r \to \infty$) είναι $\theta = \pm\theta_0$ με $\cos\theta_0 = -1/\varepsilon$.
Η γωνία εκτροπής είναι $\vartheta = \pi - (2\pi - 2\theta_0) = 2\theta_0 - \pi$. Στην περίπτωσή μας έχουμε $\vartheta = 2\pi/3$, $\cos\theta_0 = -\sin(\vartheta/2) = -\sqrt{3}/2 = -1/\varepsilon$, οπότε $\varepsilon = 2/\sqrt{3}$.

Από τη σχέση $\varepsilon = \sqrt{1 + m^2b^2v_0^4/k^2}$ βρίσκουμε $b = \dfrac{k}{\sqrt{3}mv_0^2} = \dfrac{k}{2\sqrt{3}E}$.
(δ) $p = \dfrac{mb^2v_0^2}{k} = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$, άρα $r = \dfrac{b}{\sqrt{3} + 2\cos\theta}$.
Η ελάχιστη απόσταση είναι
$r_{\min} = \dfrac{p}{1+\varepsilon} = \dfrac{b}{\sqrt{3}+2}$.
Το διαστημόπλοιο έχει μέγιστη ταχύτητα στην ελάχιστη απόσταση $v_{\max} = L/mr_{\min} = v_0(\sqrt{3}+2)$.
Το ίδιο προκύπτει και από τη διατήρηση ενέργειας $mv_{\max}^2/2 - k/r_{\min} = E$.
(ε) $\vec{v}_\delta = \vec{u}_\delta + \vec{v}_\pi$, $|\vec{v}_\delta|^2 = |\vec{u}_\delta|^2 + |\vec{v}_\pi|^2 + 2|\vec{u}_\delta| \times |\vec{v}_\pi|\cos\phi$.

Θέμα 4ο:

(α) Λόγω της συμμετρίας $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \ldots + \vec{r}_N = 0$, $\vec{F} = -k(\vec{r}-\vec{r}_1) - k(\vec{r}-\vec{r}_2) - \ldots - k(\vec{r}-\vec{r}_N) = -Nk\vec{r}$.
$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Longrightarrow$ η τροχιά σε επίπεδο κάθετο στην σταθερή στροφορμή, $\vec{L}\cdot\vec{r} = 0$.

(β) $m\ddot{\vec{r}} + Nk\vec{r} = 0$,
$\vec{r}(t) = \vec{r}_0\cos\omega t + \dfrac{\vec{v}_0}{\omega}\sin\omega t$ με $\omega = \sqrt{\dfrac{Nk}{m}}$.
(γ) $x(t) = x_0\cos\omega t\,, y = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$,
$\dfrac{x^2}{x_0^2} + \dfrac{y^2}{v_0^2/\omega^2} = 1$, δηλ. ελλειπτική τροχιά.
(δ) Κυκλική τροχιά αν $|x_0| = \dfrac{|v_0|}{\omega}$.