Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 28 Απριλίου 2014
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 6ης Μαρτίου 2014: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐

Θέμα 1ο:

Σώμα μάζας $m = 2$ κινείται μονοδιάστατα σε πεδίο δύναμης $F = -6x(x+1)$.

(α) Βρείτε τη δυναμική ενέργεια $V(x)$ και σχεδιάστε το γράφημά της.

(Βρείτε πρώτα τα ακρότατα της συνάρτησης $V(x)$ και αν είναι μέγιστα ή ελάχιστα, τις περιοχές όπου η $V(x)$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα, καθώς επίσης και τη συμπεριφορά της $V(x)$ όταν $x \to \pm\infty$.)

(β) Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στο $x = 0$ και έχει ταχύτητα $v_0 \geq 0$ περιγράψτε την κίνησή του ανάλογα με την τιμή της v_0. Αν είναι ταλάντωση, ποιο ολοκλήρωμα δίνει την περίοδό της και ποια η περίοδος αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι μικρό;

Θέμα 2ο:

(α) Έστω σώμα μάζας m και φορτίου q που κινείται υπό την επίδραση δύναμης $\vec{F}(\vec{r})$. Η τροχιά του προκύπτει από την εξίσωση κίνησης $m\vec{a} = \vec{F}$.

Έστω τώρα ότι στο χώρο υπάρχει ομογενές, ασθενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ το οποίο ασκεί στο σώμα επιπλέον δύναμη $q\vec{v} \times \vec{B}$ και του αλλάζει αργά την τροχιά. Δείξτε ότι στο σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται με (σταθερή) γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = -\dfrac{q}{2m}\vec{B}$ η κίνηση είναι ίδια με πριν, δηλ. η εξίσωση κίνησης είναι $m\vec{a}_\sigma = \vec{F}$.

Θεωρήστε γνωστές τις εκφράσεις των υποθετικών δυνάμεων Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma$ και φυγόκεντρου $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ καθώς και τη σχέση $\vec{v} = \vec{v}_\sigma + \vec{\omega} \times \vec{r}$.

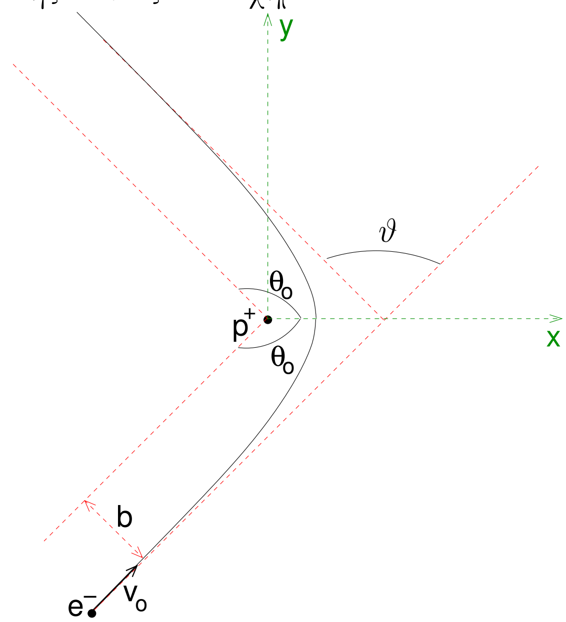
Υπόδειξη: Αμελήστε όρους ανάλογους του B^2, αφού το πεδίο είναι ασθενές.

(β) Έστω ηλεκτρόνιο κινείται ελλειπτικά γύρω από τον πυρήνα σε ένα άτομο. Πως επιδρά στην τροχιά του ένα ασθενές μαγνητικό πεδίο που είναι κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς; (Δεν χρειάζονται πράξεις, απλά χρησιμοποιήστε το προηγούμενο ερώτημα.)

★ (γ) Όμοια αν το ηλεκτρόνιο κινείται κυκλικά γύρω από τον πυρήνα, αλλά το μαγνητικό πεδίο δεν είναι κάθετο στην τροχιά.

Θέμα 3ο:

Ένα ηλεκτρόνιο κινείται προς ένα ακίνητο πρωτόνιο. Αρχικά βρίσκεται πολύ μακρυά από το πρωτόνιο (στο άπειρο), έχει ταχύτητα v_0 και παράμετρο κρούσης b όπως στο σχήμα.



(α) Ποιά η στροφορμή L και ποιά η ενέργεια E του ηλεκτρονίου; Θεωρήστε μηδενική δυναμική ενέργεια όταν τα φορτία είναι μακρυά.

(β) Η κεντρική ελκτική δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο είναι $F = -k/r^2$. Σχεδιάστε το υποθετικό δυναμικό και εξηγήστε/δικαιολογήστε το είδος της τροχιάς που διαγράφει το ηλεκτρόνιο.

(γ) Δείξτε ότι για να αλλάξει πορεία το ηλεκτρόνιο κατά $\vartheta = 90$ μοίρες πρέπει να ισχύει $k = mbv_0^2$.

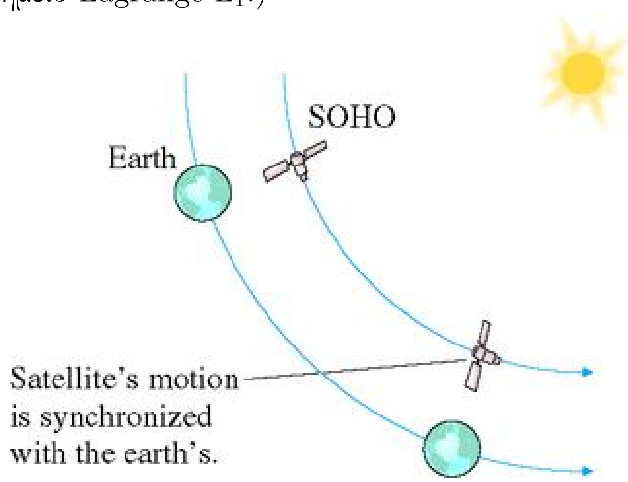
(δ) Στην περίπτωση του προηγούμενου ερωτήματος (όταν $k = mbv_0^2$) δείξτε ότι η πολική εξίσωση της τροχιάς του ηλεκτρονίου είναι $r = \dfrac{b}{1+\sqrt{2}\,\cos\theta}$ και η ταχύτητά του συναρτήσει της απόστασής του από το πρωτόνιο δίδεται από τη σχέση $\left(\dfrac{v}{v_0}\right)^2 = 1 + \dfrac{2b}{r}$.

(ε) Στην ίδια περίπτωση (όταν $k = mbv_0^2$) ποιά η ελάχιστη απόσταση μεταξύ του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου και ποιά η μέγιστη ταχύτητα του ηλεκτρονίου;

★ (στ) Στη γενική περίπτωση όπου η γωνία εκτροπής είναι ϑ υπολογίστε την ελάχιστη απόσταση και τη μέγιστη ταχύτητα για δεδομένα b, v_0 και ϑ.
Θεωρήστε γνωστή την εξίσωση τροχιάς
$r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$ με $p = \dfrac{L^2}{mk}$ και $\varepsilon = \sqrt{1+\dfrac{2L^2E}{k^2m}}$.

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

Το Solar and Heliospheric Observatory (SOHO) παρατηρεί συνεχώς τον Ήλιο και βρίσκεται σε ένα ιδιαίτερο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τη Γη με τον Ήλιο. Απέχει απόσταση d από τη Γη τέτοια ώστε η συνολική βαρυτική δύναμη που δέχεται από τον Ήλιο και τη Γη να είναι συμβατή με περιστροφή του παρατηρητηρίου γύρω από τον Ήλιο με την ίδια γωνιακή ταχύτητα όπως αυτή της Γης γύρω από τον Ήλιο. (Το σημείο αυτό λέγεται σημείο Lagrange L_1.)



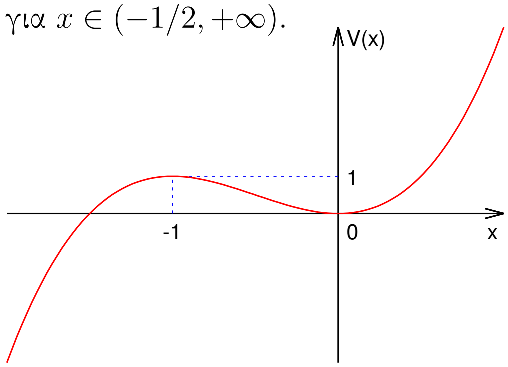
(α) Γράψτε την κεντρομόλο επιτάχυνση του SOHO συναρτήσει της μάζας του Ήλιου $M_\odot$, της απόστασης Γης-Ηλίου $r_\oplus$ και της ακτίνας της τροχιάς του SOHO $r_\oplus - d$.
(β) Γράψτε την εξίσωση που καθορίζει την απόσταση d συναρτήσει του λόγου μαζών Γης και Ήλιου $M_\oplus/M_\odot$ και της απόστασης Γης-Ηλίου $r_\oplus$.
(γ) Δείξτε ότι προσεγγιστικά (για $d \ll r_\oplus$) προκύπτει $d \approx r_\oplus \left(M_\oplus/3M_\odot\right)^{1/3}$.
Υπόδειξη: Γράψτε την εξίσωση του ερωτήματος (β) συναρτήσει της $x = d/r_\oplus$ και χρησιμοποιήστε κατάλληλα το ανάπτυγμα Taylor $(1-x)^\nu \approx 1-\nu x$ (για μικρά x).

★ = bonus ερωτήματα

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α) $V(x) = -\int F(x)dx = 6\int (x^2+x)dx = 2x^3+3x^2+$ σταθερά. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μηδενίζουμε τη σταθερά, οπότε $V(x)=2x^3+3x^2$. Η πρώτη παράγωγος $V'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$ είναι θετική για $x>0$ και $x<-1$ (αρνητική για $-1<x<0$). Άρα η δυναμική ενέργεια τείνει στο $-\infty$ για $x\to-\infty$, είναι αύξουσα στο διάστημα $x\in(-\infty,-1)$, μετά φθίνουσα στο διάστημα $x\in(-1,0)$ και στη συνέχεια ξανά αύξουσα στο διάστημα $x\in(0,+\infty)$, ενώ τείνει στο $+\infty$ για $x\to+\infty$. Έχει ακρότατα τα $x=-1$ (τοπικό μέγιστο με $V(-1)=1$) και $x=0$ (τοπικό ελάχιστο με $V(0)=0$). Είναι $V''(x)=12x+6=12(x+1/2)$, οπότε έχει τα κοίλα κάτω για $x\in(-\infty,-1/2)$ και πάνω για $x\in(-1/2,+\infty)$.



(β) $E=v_0^2$. Από το γράφημα έχουμε περιπτώσεις:

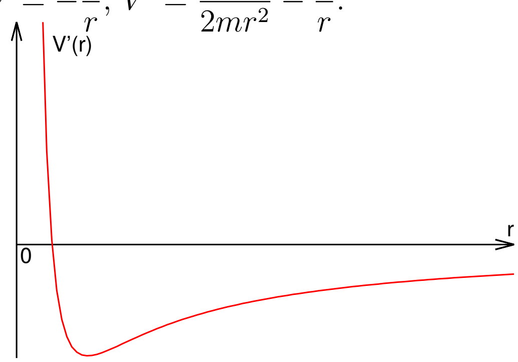
- $E>1\Leftrightarrow v_0>1$: Το σώμα φτάνει σε σημείο $x_{\max}>0$ όπου $V(x_{\max})=E$, ανακλάται, περνά το «λόφο δυναμικού» στο $x=-1$ και καταλήγει στο $x=-\infty$.
- $E=1\Leftrightarrow v_0=1$: Το σώμα φτάνει σε σημείο $x_{\max}>0$ όπου $V(x_{\max})=1$ (δηλ. στο $x_{\max}=1/2$), ανακλάται και πλησιάζει στο σημείο $x=-1$ όπου η δυναμική ενέργεια έχει τοπικό μέγιστο $V_{\max}=E$ (φτάνει σε αυτό σε θεωρητικά άπειρο χρόνο).
- $0<E<1\Leftrightarrow 0<v_0<1$: Το σώμα φτάνει σε σημείο $x_{\max}>0$ όπου $V(x_{\max})=E$, ανακλάται, φτάνει σε σημείο $x_{\min}\in(-1,0)$ όπου $V(x_{\min})=E$, ανακλάται ξανά, κ.ο.κ., δηλ. εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των δύο μεγαλύτερων λύσεων της $V(x)=E$. Η περίοδος είναι $T=2\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\frac{dx}{\dot{x}}=\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\frac{2\,dx}{\sqrt{v_0^2-2x^3-3x^2}}$, αφού $E=\dot{x}^2+V(x)$ με $E=v_0^2$.
  Αν το πλάτος είναι μικρό $F\approx-6x$ και άρα $m\ddot{x}\approx-6x\Leftrightarrow\ddot{x}+3x\approx0$, άρα $T=2\pi/\sqrt{3}$.
- $E=0\Leftrightarrow v_0=0$: Το σώμα μένει ακίνητο στο (ευσταθές) σημείο ισορροπίας $x=0$.

Θέμα 2^o:

(α) Στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς $m\vec{a}_\sigma=\vec{F}+q\vec{v}\times\vec{B}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma$ με $\vec{v}=\vec{v}_\sigma+\vec{\omega}\times\vec{r}$, οπότε $m\vec{a}_\sigma=\vec{F}+q\vec{v}_\sigma\times\vec{B}+q(\vec{\omega}\times\vec{r})\times\vec{B}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma$.
Θέτοντας $\vec{\omega}=-\frac{q}{2m}\vec{B}$ η εξίσωση κίνησης γίνεται $m\vec{a}_\sigma=\vec{F}-\frac{q^2}{2m}(\vec{B}\times\vec{r})\times\vec{B}-\frac{q^2}{4m}\vec{B}\times(\vec{B}\times\vec{r})=\vec{F}-\frac{q^2}{4m}(\vec{B}\times\vec{r})\times\vec{B}$. Αμελώντας τον τελευταίο όρο, ο οποίος είναι ανάλογος του B^2, προκύπτει η ζητούμενη $m\vec{a}_\sigma=\vec{F}$.
(β) Στο περιστρεφόμενο σύστημα η τροχιά είναι ελλειπτική. Άρα στο αδρανειακό σύστημα η ελλειπτική τροχιά περιστρέφεται (δηλ. οι άξονες της έλλειψης περιστρέφονται) με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}=-\frac{q}{2m}\vec{B}$ (η οποία είναι κάθετη στην τροχιά, οπότε το επίπεδο της τροχιάς δεν αλλάζει).
(γ) Στο περιστρεφόμενο σύστημα η τροχιά είναι επίπεδη και κυκλική. Άρα στο αδρανειακό σύστημα το επίπεδο της τροχιάς μεταπίπτει με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}=-\frac{q}{2m}\vec{B}$.
Το διάνυσμα της στροφορμής, το οποίο ειναι κάθετο στο στιγμιαίο επίπεδο κίνησης, περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}=-\frac{q}{2m}\vec{B}$ γύρω από το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Αυτή είναι η κλασική περιγραφή της μετάπτωσης Larmor.

Θέμα 3^o:

(α) $E=mv_0^2/2$, $L=m|\vec{r}\times\vec{v}_0|=mbv_0$.
(β) $V=-\frac{k}{r}$, $V'=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{k}{r}$.



Για θετική ενέργεια η τροχιά είναι υπερβολική.
(γ) Η εξίσωση τροχιάς είναι $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$ με $p=L^2/mk=mb^2v_0^2/k$ και $\varepsilon=\sqrt{1+2L^2E/k^2m}=\sqrt{1+m^2b^2v_0^4/k^2}$.

Σε υπερβολικές τροχιές οι ασύμπτωτες ($r \to \infty$) είναι $\theta = \pm\theta_0$ με $\cos\theta_0 = -1/\varepsilon$.
Στην περίπτωσή μας θέλουμε $2\theta_0 = 3\pi/2$ οπότε $\varepsilon = -1/\cos(3\pi/4) = \sqrt{2}$. Από τη σχέση $\varepsilon = \sqrt{1 + m^2 b^2 v_0^4/k^2}$ βρίσκουμε $k = mbv_0^2$.
(δ) Για $k = mbv_0^2$ βρίσκουμε $p = L^2/mk = b$, οπότε $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\theta} = \dfrac{b}{1+\sqrt{2}\cos\theta}$.
Από διατήρηση ενέργειας $\dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{k}{r} = \dfrac{mv_0^2}{2}$, η οποία για $k = mbv_0^2$ δίνει $\left(\dfrac{v}{v_0}\right)^2 = 1 + \dfrac{2b}{r}$.
(ε) Η ελάχιστη απόσταση είναι
$r_{\min} = \dfrac{p}{1+\varepsilon} = \dfrac{b}{1+\sqrt{2}}$.
Το ηλεκτρόνιο έχει μέγιστη ταχύτητα στην ελάχιστη απόσταση, όπου $\vec{r}\perp\vec{v}$. Άρα $L = mr_{\min}v_{\max} \Leftrightarrow v_{\max} = v_0(1+\sqrt{2})$.
Το ίδιο προκύπτει και από τη διατήρηση ενέργειας η οποία δίνει $\left(\dfrac{v_{\max}}{v_0}\right)^2 = 1 + \dfrac{2b}{r_{\min}}$.
(στ) Στη γενική περίπτωση η γωνία εκτροπής είναι $\vartheta = \pi - (2\pi - 2\theta_0) = 2\theta_0 - \pi \Leftrightarrow \theta_0 = \dfrac{\vartheta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ και $\cos\theta_0 = \cos\left(\dfrac{\vartheta}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\dfrac{\vartheta}{2}$.
Ισχύει $\cos\theta_0 = -\dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon = \dfrac{1}{\sin(\vartheta/2)}$.
Η σχέση $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2L^2E}{k^2m}}$ δίνει $k = mbv_0^2\tan\dfrac{\vartheta}{2}$.
Είναι $p = \dfrac{L^2}{mk} = \dfrac{mb^2v_0^2}{k} = \dfrac{b}{\tan(\vartheta/2)}$, οπότε η ελάχιστη απόσταση είναι $r_{\min} = \dfrac{p}{1+\varepsilon} = b\dfrac{\cos(\vartheta/2)}{1+\sin(\vartheta/2)} = b\ \cot\dfrac{\pi+\vartheta}{4}$.
Η μέγιστη ταχύτητα $v_{\max} = \dfrac{L}{mr_{\min}} = v_0\tan\dfrac{\pi+\vartheta}{4}$.

Θέμα 4ο:

(α) Η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο με γωνιακή ταχύτητα $\Omega_\oplus = \sqrt{\dfrac{GM_\odot}{r_\oplus^3}}$ (νόμος Kepler).
Το SOHO κινείται με αυτή την γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον Ήλιο, σε τροχιά ακτίνας $r_\oplus - d$, άρα η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $a = \Omega_\oplus^2(r_\oplus - d) = \dfrac{GM_\odot(r_\oplus - d)}{r_\oplus^3}$.
(β) Η συνισταμένη των βαρυτικών δυνάμεων πρέπει να δίνει κεντρομόλο δύναμη ma (όπου m η μάζα του SOHO), δηλ. $\dfrac{GM_\odot m}{(r_\oplus - d)^2} - \dfrac{GM_\oplus m}{d^2} = \dfrac{GM_\odot m(r_\oplus - d)}{r_\oplus^3} \Leftrightarrow (1-x)^{-2} - \dfrac{M_\oplus/M_\odot}{x^2} = 1 - x$,
όπου $x = \dfrac{d}{r_\oplus}$ είναι η απόσταση d μετρημένη σε αστρονομικές μονάδες ($r_\oplus = 1$ AU).
(γ) Αφού $x \ll 1$ είναι $(1-x)^{-2} \approx 1 + 2x$ (ανάπτυγμα Taylor), οπότε $1 + 2x - \dfrac{M_\oplus/M_\odot}{x^2} \approx 1 - x \Leftrightarrow x \approx \left(\dfrac{M_\oplus}{3M_\odot}\right)^{1/3}$.
Είναι $M_\odot/M_\oplus = 333000$ οπότε $x = 0.01$, δηλ. $d = 0.01$ AU $= 1.5 \times 10^6$ km.
Το SOHO έχει επιλεγεί να περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο και όχι γύρω από τη Γη, ώστε ποτέ η Γη να μην του κρύβει το πεδίο, με αποτέλεσμα να μην σταματά ποτέ να παρατηρεί τον Ήλιο.