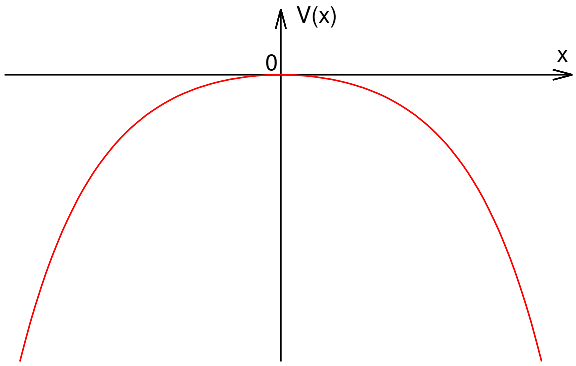
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 6 Μαρτίου 2014
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

Σώμα μάζας $m = 2$ κινείται μονοδιάστατα σε πεδίο δύναμης $F = \sinh(2x)$. Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι $V = -\sinh^2 x$.



(α) Σχεδιάστε τις πιθανές τροχιές σε άξονες $x - \dot{x}$ (φασικό διάγραμμα), για μία θετική ενέργεια $E > 0$, για μια αρνητική ενέργεια $E < 0$ και για τη μηδενική ενέργεια $E = 0$.
Πόσες είναι οι πιθανές τροχιές σε κάθε περίπτωση; Ποια η μαθηματική σχέση μεταξύ x και $\dot{x}$;
(β) Έστω το σώμα βρίσκεται αρχικά ($t = 0$) στη θέση x_0 και έχει ταχύτητα $v_0 = -\sinh x_0$.
(β_1) Περιγράψτε την κίνησή του. Που καταλήγει σε μεγάλους χρόνους;
(β_2) Βρείτε τη σχέση μεταξύ θέσης και χρόνου, δηλ. τη συνάρτηση $t = t(x)$ ή την $x = x(t)$.
★ (γ) Αν στο σώμα εκτός της F ασκείται και δύναμη αντίστασης μέτρου $\lambda \dot{x}^2$ ποια η ταχύτητα συναρτήσει της θέσης;

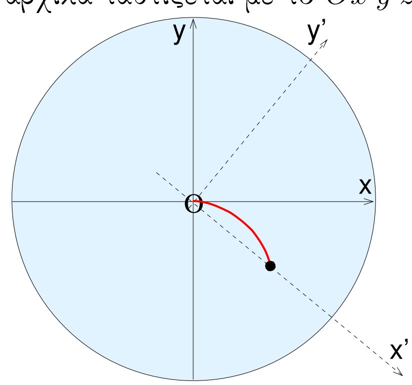
Δίνονται $\sinh\xi = \dfrac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}$, $\cosh\xi = \dfrac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2}$, $\cosh\xi = 1 + 2\sinh^2\dfrac{\xi}{2}$, $\displaystyle\int \frac{d\xi}{\sinh\xi} = \ln\left|\tanh\frac{\xi}{2}\right|$, $\operatorname{arctanh}\xi = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\xi}{1-\xi}$ και ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{dy(x)}{dx} + by(x) = \sinh(2x)$ είναι $y(x) = Ce^{-bx} + \dfrac{e^{2x} - e^{-bx}}{2(2+b)} + \dfrac{e^{-2x} - e^{-bx}}{2(2-b)}$.

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

Σώμα μάζας m και φορτίου q βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο, τα οποία σε κατάλληλες μονάδες είναι $\vec{B} = \dfrac{m}{q}\,\hat{z}$ και $\vec{E} = \dfrac{m\omega}{q}\cos(\omega t)\,\hat{y}$, αντίστοιχα. Το χρόνο $t = 0$ το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο στην αρχή του συστήματος αναφοράς.
(α) Γράψτε τις $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}$.
(β) Επιλύστε τις εξισώσεις αυτές και βρείτε τη θέση του σώματος σε κάθε χρόνο αν $\omega \neq 1$.
★ (γ) Ποια η θέση του σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου αν $\omega = 1$;

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

Οριζόντιος δίσκος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1$. Στο κέντρο του βρίσκεται παρατηρητής **Ο** που περιστρέφεται μαζί με το δίσκο. Ο **Ο** το χρόνο $t = 0$ πετά με ταχύτητα $v_0 = 1$ σώμα μάζας $m = 1$, το οποίο κινείται χωρίς τριβές πάνω στο δίσκο.
Έστω αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Ox'y'z'$ ώστε $\vec{\omega} = \hat{z}'$ και $\vec{v}_0 = \hat{x}'$. Έστω επίσης μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Oxyz$ που περιστρέφεται μαζί με το δίσκο και αρχικά ταυτίζεται με το $Ox'y'z'$.



(α) Δικαιολογήστε γιατί η τροχιά του σώματος όπως τη βλέπει ο **Ο** (η τροχιά του σώματος στο σύστημα $Oxyz$) είναι $\varpi = t$, $\phi = -t$.
Υπόδειξη: Σκεφτείτε τι κίνηση εκτελεί το σώμα στο αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z'$ και ότι ο **Ο** βλέπει τους άξονες του $Ox'y'z'$ να περιστρέφονται δεξιόστροφα με μοναδιαία γωνιακή ταχύτητα.
(β) Μέσω ποιων υποθετικών δυνάμεων μπορεί ο **Ο** να εξηγήσει την τροχιά που βλέπει;
(γ) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος και πως την εξηγεί ο **Ο**;
(δ) Για την κίνηση όπως την βλέπει ο **Ο**, ποια η επιτρόχια και ποια η κεντρομόλος επιτάχυνση το χρόνο $t = 0$ και ποια η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς για $t = 0$;

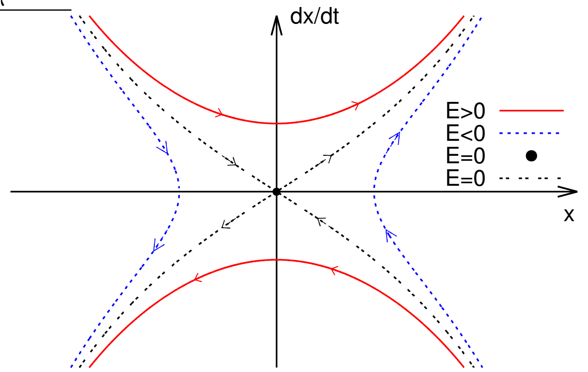
Δίνεται $\vec{a}_\sigma = \dfrac{\Sigma\vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$.

★ = bonus ερωτήματα

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α)



Για $E>0$ το σώμα κινείται συνεχώς είτε προς μεγαλύτερα x, είτε προς μικρότερα x (δύο περιπτώσεις).
Για $E<0$ το σώμα κινείται είτε στο χώρο $x \geq x_1$, είτε στο χώρο $x \leq -x_1$, όπου x_1 η θετική λύση της $V(x)=E$ (δύο περιπτώσεις).
Για $E=0$ το σώμα είτε είναι ακίνητο στο $x=0$, είτε πλησιάζει στο $x=0$ κινούμενο με θετική ή αρνητική ταχύτητα, είτε απομακρύνεται από το $x=0$ κινούμενο με θετική ή αρνητική ταχύτητα (πέντε περιπτώσεις).
Η μαθηματική σχέση μεταξύ $x-\dot{x}$ είναι το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{m\dot{x}^2}{2}+V=E \Leftrightarrow \dot{x}^2-\sinh^2 x=E$.
(β$_1$) Οι συνθήκες δίνουν $E=0=V_{max}$, οπότε το σώμα καταλήγει στη θέση $x=0$ σε άπειρο χρόνο.
(β$_2$) Οι συναρτήσεις $x(t)$ και $\dot{x}(t)$ είναι ετερόσημες, οπότε το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dot{x}^2=\sinh^2 x$ δίνει $\dot{x}=-\sinh x \Leftrightarrow t=\displaystyle\int_0^t dt=-\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sinh x}=\ln\frac{\tanh\frac{x_0}{2}}{\tanh\frac{x}{2}}$.
Η συνάρτηση μπορεί να αντιστραφεί: $e^t=\dfrac{\tanh(x_0/2)}{\tanh(x/2)} \Leftrightarrow x=2\,\text{arctanh}\left(e^{-t}\tanh\dfrac{x_0}{2}\right) \Leftrightarrow$
$x=\ln\dfrac{1+e^{-t}\tanh\frac{x_0}{2}}{1-e^{-t}\tanh\frac{x_0}{2}}$.
(γ) $2\ddot{x}=-b\dot{x}^2+\sinh(2x)$, όπου $b=\lambda v/|v|$.
Με $\dot{x}=v(x)$, $2\ddot{x}=2\dot{v}=2\dfrac{dv}{dx}v=\dfrac{dv^2}{dx}$ έχουμε $\dfrac{dv^2}{dx}+bv^2=\sinh(2x)$.
Η λύση της ομογενούς είναι C_0e^{-bx}. Η μερική λύση είναι $C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$ με την αντικατάσταση να δίνει $C_1=\dfrac{1}{2(2+b)}$, $C_2=\dfrac{1}{2(2-b)}$. Άρα η γενική λύση
$v^2=Ce^{-\lambda\frac{v}{|v|}x}+\dfrac{1}{2(2+\lambda)}e^{2\frac{v}{|v|}x}+\dfrac{e^{-2\frac{v}{|v|}x}-e^{-\lambda\frac{v}{|v|}x}}{2(2-\lambda)}$.
(Η γραφή αυτή δίνει τη λύση ακόμα και για $\lambda=2$, οπότε ο τελευταίος όρος γίνεται $-\dfrac{1}{2}\dfrac{v}{|v|}xe^{-2\frac{v}{|v|}x}$.)

Θέμα 2^o:

(α) $m\ddot{\vec{r}}=q\dot{\vec{r}}\times\vec{B}+q\vec{E} \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}\times\hat{z}+\omega\cos(\omega t)\ \hat{y}$
με συνιστώσες $\begin{cases}\ddot{x}=\dot{y} & ① \\ \ddot{y}=-\dot{x}+\omega\cos(\omega t) & ② \\ \ddot{z}=0 & ③\end{cases}$
(β) ①$\rightsquigarrow$ $\dot{x}=y+C \Leftrightarrow y=\dot{x}$ ④
αφού αρχικά (για $t=0$) $y=0$, $\dot{x}=0$.
②$\rightsquigarrow$ $\dot{y}=-x+\sin(\omega t)+D \Leftrightarrow \dot{y}=-x+\sin(\omega t)$
αφού αρχικά (για $t=0$) $x=0$, $\dot{y}=0$.
Χρησιμοποιώντας την ④ προκύπτει $\ddot{x}+x=\sin(\omega t)$ (εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση).
Η λύση της ομογενούς είναι $x_{\text{ομ}}=C_1\sin t+C_2\cos t$.
Η μερική λύση είναι της μορφής $x_{\text{μερ}}=A\sin(\omega t)$, με την αντικατάσταση να δίνει $A=\dfrac{1}{1-\omega^2}$.
Άρα η γενική λύση είναι
$x=C_1\sin t+C_2\cos t+\dfrac{1}{1-\omega^2}\sin(\omega t)$
και η παράγωγός της
$\dot{x}=C_1\cos t-C_2\sin t+\dfrac{\omega}{1-\omega^2}\cos(\omega t)$.
Οι αρχικές συνθήκες $x=0$, $\dot{x}=0$ για $t=0$ δίνουν $C_2=0$ και $C_1=-\dfrac{\omega}{1-\omega^2}$.
Άρα $x=\dfrac{1}{1-\omega^2}\left[\sin(\omega t)-\omega\sin t\right]$.
④$\rightsquigarrow$ $y=\dfrac{\omega}{1-\omega^2}\left[\cos(\omega t)-\cos t\right]$.
③$\rightsquigarrow$ $z=D_1t+D_2 \Leftrightarrow z=0$, χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $z=0$, $\dot{z}=0$ για $t=0$.
(γ) Αρκεί να πάρουμε το όριο $\omega\to 1$ της απάντησης του (β) ερωτήματος.
Η έκφραση του x είναι $0/0$. Με κανόνα l'Hospital, δηλ. παραγωγίζοντας αριθμητή και παρονομαστή ως προς ω και κατόπιν θέτοντας $\omega=1$, έχουμε
$x=\lim\limits_{\omega\to 1}\dfrac{\sin(\omega t)-\omega\sin t}{1-\omega^2}=\lim\limits_{\omega\to 1}\dfrac{t\cos(\omega t)-\sin t}{-2\omega}=\dfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$. Όμοια $y=\dfrac{1}{2}t\sin t$.
Β′ τρόπος: Η $x(t)$ γράφεται
$x=\dfrac{1}{1+\omega}\left[\sin t+\dfrac{\sin(\omega t)-\sin t}{1-\omega}\right]=$
$\dfrac{1}{1+\omega}\left[\sin t-\dfrac{2}{1-\omega}\sin\dfrac{(1-\omega)t}{2}\cos\dfrac{(1+\omega)t}{2}\right]$,
χρησιμοποιώντας την ταυτότητα
$\sin a-\sin b=2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$.
Για $\omega\approx 1$ έχουμε διακρότημα, ενώ για $\omega=1$ ο όρος $\dfrac{2}{1-\omega}\sin\dfrac{(1-\omega)t}{2}$ ισούται με t (από κανόνα l'Hospital) και άρα $x=\dfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

Όμοια, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cos a - \cos b = 2\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{b+a}{2}$, έχουμε $y = \frac{2\omega}{1-\omega^2}\sin\frac{(1-\omega)t}{2}\sin\frac{(1+\omega)t}{2} = \frac{\omega}{1+\omega}\frac{2}{1-\omega}\sin\frac{(1-\omega)t}{2}\sin\frac{(1+\omega)t}{2}$.
Για $\omega \approx 1$ έχουμε διακρότημα, ενώ για $\omega = 1$ ο όρος $\frac{2}{1-\omega}\sin\frac{(1-\omega)t}{2}$ ισούται με t και άρα $y = \frac{1}{2}t\sin t$.
Γ′ τρόπος: Μπορούμε να λύσουμε ξανά τις εξισώσεις κίνησης για $\omega = 1$. Ακολουθώντας ίδια πορεία όπως στο ερώτημα (β) καταλήγουμε στην $\ddot{x} + x = \sin t$ της οποίας η μερική λύση είναι $x_{\mu\varepsilon\rho} = C_0 t\cos t$. Η αντικατάσταση δίνει $C_0 = -1/2$ και άρα η γενική λύση είναι $x = C_1\sin t + C_2\cos t - \frac{1}{2}t\cos t$. Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει $C_1 = 1/2$, $C_2 = 0$ και άρα $x = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$.
④$\rightsquigarrow y = \frac{1}{2}t\sin t$.

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:
(α) Το σώμα κινείται πάνω στον Ox' ημιάξονα ευθύγραμμα και ομαλά με μοναδιαία ταχύτητα. Άρα η απόσταση από το O είναι $\varpi = t$.
Η γωνία μεταξύ των ημιαξόνων Ox και Ox' είναι σε απόλυτη τιμή $\omega t = t$. Λόγω της φοράς περιστροφής, τα σημεία του Ox' άξονα (άρα και η θέση του σώματος σε κάθε χρόνο) έχουν $\phi = -t$.
Αλλιώς: Είναι $\vec{r} = v_0 t\hat{x}' = t\hat{x}'$ με $\hat{x}' = (\hat{x}'\cdot\hat{x})\,\hat{x} + (\hat{x}'\cdot\hat{y})\,\hat{y} = \cos(\omega t)\,\hat{x} - \sin(\omega t)\,\hat{y} = \cos t\hat{x} - \sin t\hat{y}$. Άρα $\vec{r} = t\cos t\hat{x} - t\sin t\hat{y}$, δηλ. $x = t\cos t$ και $y = -t\sin t$, από τις οποίες προκύπτει
$\varpi = \sqrt{x^2+y^2} = t$, $\left\{\begin{array}{l}\cos\phi = \cos t\\ \sin\phi = -\sin t\end{array}\right\} \Leftrightarrow \phi = -t$.
(β) Οι υποθετικές δυνάμεις είναι $-m\vec{a}_0 = 0$, $-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} = 0$, Coriolis $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma = -2\hat{z}\times(\hat{\varpi} - t\hat{\phi}) = -2\hat{\phi} - 2t\hat{\varpi}$ αφού $\vec{v}_\sigma = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} = \hat{\varpi} - t\hat{\phi}$, και φυγόκεντρος $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\omega^2\vec{r} = t\hat{\varpi}$, αφού $\vec{r} = \varpi\hat{\varpi} = t\hat{\varpi}$.
Ο νόμος του Νεύτωνα $m\vec{a}_\sigma = -2\hat{\phi} - t\hat{\varpi}$ με $\vec{a}_\sigma = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi}$ πράγματι ικανοποιείται αν αντικαταστήσουμε $\varpi = t$, $\phi = -t$.
Θα μπορούσαμε βέβαια να βρούμε τις εξισώσεις αυτές από το νόμο του Νεύτωνα στο σύστημα $Oxyz$: $m\vec{a}_\sigma = -m\vec{a}_0 - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \Leftrightarrow (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi} = -2\dot{\varpi}\hat{\phi} + 2\varpi\dot{\phi}\hat{\varpi} + \varpi\hat{\varpi}$ αντικαθιστώντας $\vec{r} = \varpi\hat{\varpi}$, $\vec{v}_\sigma = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi}$.
Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα δίνει $\frac{1}{\varpi}\frac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt} = -2\dot{\varpi} \Leftrightarrow \frac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt} = -\frac{d\varpi^2}{dt} \Leftrightarrow \varpi^2(\dot{\phi}+1) =$ σταθερά, η οποία από την αρχική συνθήκη $\varpi|_{t=0} = 0$ δίνει $\dot{\phi} = -1 \Leftrightarrow \phi = -t+$ σταθερά. Από την αρχική συνθήκη $\phi|_{t=0} = 0$ (η αρχική ταχύτητα $\vec{v}|_{t=0} \parallel \hat{\varpi}|_{t=0}$ αφού $\varpi|_{t=0} = 0$ και άρα πρέπει $\hat{\varpi}|_{t=0} = \hat{x}$ ώστε $\vec{v}|_{t=0} \parallel \hat{x}$) βρίσκουμε $\phi = -t$.
Αντικαθιστώντας στην $\hat{\varpi}$ συνιστώσα του νόμου του Νεύτωνα έχουμε $\ddot{\varpi} = 0 \Leftrightarrow \dot{\varpi} =$ σταθερά, η οποία από την αρχική συνθήκη $\vec{v}|_{t=0} = \hat{x} = (\dot{\varpi}\hat{\varpi})_{t=0}$ δίνει $\dot{\varpi} = 1 \Leftrightarrow \varpi = t+$ σταθερά. Αφού $\varpi|_{t=0} = 0$ καταλήγουμε στην $\varpi = t$.
(γ) $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv_\sigma^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1+t^2}{2}\right) = t$.
Από τις δυνάμεις που «βλέπει» ο **O**, η Coriolis έχει μηδενική ισχύ (αφού είναι κάθετη στην ταχύτητα), ενώ η ισχύς της φυγόκεντρου είναι $\vec{F}_\phi\cdot\vec{v}_\sigma = t\hat{\varpi}\cdot(\hat{\varpi} - t\hat{\phi}) = t$, όσος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας dE/dt.
(δ) Για $t = 0$ είναι $\vec{v}_\sigma = \vec{v}_0 = \hat{x}$, $\hat{\varepsilon} = \vec{v}_\sigma/|\vec{v}_\sigma| = \hat{x}$ και $\vec{a}_\sigma = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma = -2\hat{z}\times\hat{x} = -2\hat{y}$ (η φυγόκεντρος είναι μηδέν γιατί $\vec{r}|_{t=0} = 0$). Άρα $\vec{a}_\varepsilon = 0$ και $\vec{a}_\kappa = -2\hat{y}$ (το χρόνο $t = 0$ είναι $\vec{a}_\sigma \perp \vec{v}_\sigma$).
$a_\kappa = v_\sigma^2/R \Leftrightarrow R = 1/2$.
Σε κάθε χρόνο $\vec{v}_\sigma = \hat{\varpi} - t\hat{\phi}$, $\vec{a}_\sigma = -t\hat{\varpi} - 2\hat{\phi}$ (όπως προκύπτει από τη συνολική δύναμη ή παραγωγίζοντας την ταχύτητα), $\hat{\varepsilon} = \frac{\vec{v}_\sigma}{|\vec{v}_\sigma|} = \frac{\hat{\varpi} - t\hat{\phi}}{\sqrt{1+t^2}}$.
Η επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{a}_\varepsilon = (\vec{a}_\sigma\cdot\hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\hat{\varepsilon}$ (το ίδιο από $\vec{a}_\varepsilon = \frac{d|\vec{v}_\sigma|}{dt}\hat{\varepsilon}$ με $|\vec{v}_\sigma| = \sqrt{1+t^2}$).
Από τη σχέση $\frac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \frac{\hat{n}}{R}$ με $ds = |\vec{v}_\sigma|dt$, δηλ. από τη σχέση $\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} = \frac{|v_\sigma|}{R}\hat{n}$ με $\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} = -\frac{2+t^2}{(1+t^2)^{3/2}}(t\hat{\varpi} + \hat{\phi})$ (διότι $\dot{\hat{\varpi}} = \dot{\phi}\hat{\phi} = -\hat{\phi}$, $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{\varpi} = \hat{\varpi}$), βρίσκουμε $\hat{n} = \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}/\left|\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}\right| = \frac{-t\hat{\varpi} - \hat{\phi}}{\sqrt{1+t^2}}$ (το οποίο θα μπορούσε να βρεθεί και από $\hat{n} = \hat{\varepsilon}\times\hat{z}$) και $\left|\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}\right| = \frac{|v_\sigma|}{R} \Leftrightarrow R = |v_\sigma|/\left|\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}\right| = \frac{(1+t^2)^{3/2}}{2+t^2}$ (η οποία θα μπορούσε να βρεθεί και από $a_\kappa = v_\sigma^2/R$, αφού πρώτα βρούμε την a_κ).
Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $\vec{a}_\kappa = (\vec{a}_\sigma\cdot\hat{n})\hat{n} = \frac{2+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\hat{n}$ (το ίδιο από $\vec{a}_\kappa = \vec{a}_\sigma - \vec{a}_\varepsilon$ ή $\vec{a}_\kappa = \frac{v_\sigma^2}{R}\hat{n}$).