Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 29 Ιανουαρίου 2014
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 3ης Δεκεμβρίου 2012: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐

Θέμα 1ο:

Έστω δύναμη σε πολικές συντεταγμένες

$$\vec{F} = -k\varpi^n \cos^2\phi\, \hat{\varpi} + k\varpi^n \sin\phi \cos\phi\, \hat{\phi},$$

όπου k, n σταθερές με $k > 0$ και $n > -1$.

(α) Βρείτε το έργο της δύναμης αυτής για τις ακόλουθες διαδρομές στο επίπεδο Oxy:

(α$_1$) Από το σημείο $O(x = 0\,, y = 0)$ στο σημείο $A(x = 1\,, y = 0)$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει $\phi = 0$.

(α$_2$) Από το σημείο $O(x = 0\,, y = 0)$ στο σημείο $B(x = 0\,, y = 1)$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει $\phi = \pi/2$ και στη συνέχεια από το σημείο $B(x = 0\,, y = 1)$ στο σημείο $A(x = 1\,, y = 0)$ πάνω στο τεταρτοκύκλιο $\varpi = 1$.

(β) Από τα αποτελέσματά σας στα προηγούμενα ερωτήματα βρείτε για ποια τιμή της σταθεράς n <u>ίσως</u> η $\vec{F}$ είναι συντηρητική. Δείξτε ότι είναι πράγματι συντηρητική για αυτή την τιμή της n και βρείτε τη δυναμική ενέργεια $V(\varpi\,, \phi)$. Υπολογίστε τα έργα στις διαδρομές του ερωτήματος (α) χρησιμοποιώντας την V.

Δίνεται η κλίση σε πολικές συντεταγμένες

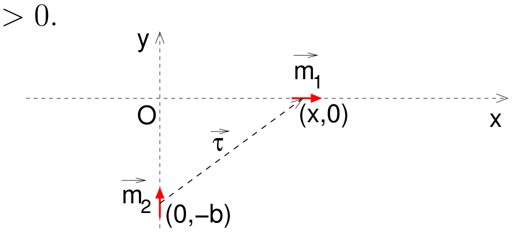
$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial \varpi}\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}.$$

(γ) Ποιο φυσικό σύστημα έχει αυτής της μορφής δυναμική ενέργεια; Υπόδειξη: $\varpi \cos\phi = x$.

Σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δοσμένης δύναμης, με την τιμή του n για την οποία είναι συντηρητική. Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0\hat{x}$ και έχει ταχύτητα $v_0\hat{y}$, περιγράψτε την κίνηση χωρίς να λύσετε εξισώσεις.

Θέμα 2ο:

Ένα μαγνητικό δίπολο μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο σύρμα, με την μαγνητική του ροπή πάντα παράλληλη στο σύρμα. Έστω το σύρμα είναι ο άξονας $x'Ox$, το δίπολο βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_1 = x\hat{x}$ και η ροπή του είναι $\vec{m}_1 = m_1\hat{x}$. Το δίπολο βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένα άλλο μαγνητικό δίπολο ροπής $\vec{m}_2 = m_2\hat{y}$ το οποίο κρατείται σταθερό στο σημείο $\vec{r}_2 = -b\hat{y}$, όπου $y'Oy$ ο κατακόρυφος άξονας και $b > 0$.



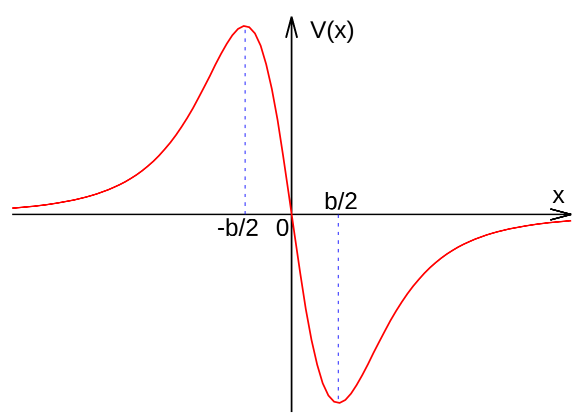
(α) Η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης δύο μαγνητικών διπόλων είναι

$$V = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|\vec{\tau}|^2\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1\cdot\vec{\tau})(\vec{m}_2\cdot\vec{\tau})}{|\vec{\tau}|^5}\,, \vec{\tau} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,.$$

Δείξτε ότι για τα συγκεκριμένα δίπολα του προβλήματος η ολική ενέργεια είναι $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E$, όπου η δυναμική ενέργεια είναι

$$V(x) = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2 b}{4\pi}\frac{x}{(x^2+b^2)^{5/2}}$$

και το γράφημά της το ακόλουθο:



(β) Ποια είναι τα σημεία ισορροπίας του διπόλου $\vec{m}_1$; Υπάρχει ευσταθές σημείο ισορροπίας; Αν ναι ποια είναι η περίοδος μικρών ταλαντώσεων γύρω από το σημείο αυτό;

(γ) Έστω αρχικά το δίπολο $\vec{m}_1$ βρίσκεται στο $x = 0$ και έχει ταχύτητα $\dot{x}_0 < 0$. Διερευνήστε που θα καταλήξει σε μεγάλους χρόνους ανάλογα με την τιμή της $\dot{x}_0$.

Για να απλοποιηθούν οι πράξεις μπορείτε να θέσετε $m = 1$, $b = 2$, $\mu_0 m_1 m_2 = 32\pi/3$ (σε όλα τα ερωτήματα).

Θέμα 3^o:

Σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $\vec{F} = -mr\Omega(r)^2\,\hat{r}$, όπου $\Omega(r)$ είναι μια συνάρτηση της ακτίνας. Αρχικά βρίσκεται σε ακτίνα r_0 και κινείται κυκλικά με γωνιακή ταχύτητα $\Omega(r_0)$. Δείξτε ότι η συνθήκη για να είναι ευσταθής η κυκλική αυτή τροχιά σε διαταραχές που διατηρούν την στροφορμή, είναι $\left.\dfrac{d(r^4\Omega^2)}{dr}\right|_{r=r_0} > 0$.

Υπόδειξη: Ένας τρόπος βασίζεται στην ενεργό δυναμική ενέργεια $V_{\text{eff}}(r)$. Βρείτε τη στροφορμή και την έκφραση της $V_{\text{eff}}(r)$. Ποιο το κριτήριο ευστάθειας συναρτήσει της $V_{\text{eff}}(r)$;

Θέμα 4^o:

(α) Ένας δορυφόρος ευρίσκεται σε χαμηλή ελλειπτική τροχιά περί το κέντρο της Γης, ενώ ένας άλλος δορυφόρος ευρίσκεται σε χαμηλή ελλειπτική τροχιά περί το κέντρο της Σελήνης. Με δεδομένο ότι η πυκνότητες της Γης και της Σελήνης είναι περίπου ίσες, να υπολογισθεί ο λόγος των περιόδων των δύο αυτών δορυφόρων γύρω από τη Γη και τη Σελήνη, αντίστοιχα.

(β) Έστω ένας άλλος δορυφόρος που ευρίσκεται σε περίπου κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, μεγάλης ακτίνας. Εκτός από την ακτινική δύναμη βαρύτητας ασκείται πάνω του και μία δύναμη τριβής ανάλογη του κύβου του μέτρου της ταχύτητάς του, $F_\tau = kv^3$, σε διεύθυνση εφαπτόμενη της περίπου κυκλικής τροχιάς του. Αποτέλεσμα αυτής της τριβής είναι να μετατρέπεται ένα μέρος της ενέργειάς του σε θερμότητα και να ελαττώνεται με πολύ αργό ρυθμό η ακτινική του απόσταση r. Εξηγείστε τι αποτέλεσμα έχει η τριβή αυτή στην περίοδο και ταχύτητα περιφοράς του δορυφόρου.

(γ) Για το δορυφόρο της προηγούμενης περίπτωσης, υπολογίστε την αργή ελάττωση της ακτινικής απόστασής του $r(t)$ από το κέντρο της Γης.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α) $dW=\vec F\cdot d\vec r$ με $d\vec r=d\varpi\,\hat\varpi+\varpi d\phi\,\hat\phi$.
(α_1) $\phi=0$, $\varpi=0\to 1$, $\vec F=-k\varpi^n\,\hat\varpi$, $d\vec r=d\varpi\,\hat\varpi$, άρα $W_{\rm OA}=\int_0^1(-k\varpi^n)d\varpi=-\dfrac{k}{n+1}$.
(α_2) Για τη διαδρομή ΟΒ: $\phi=\pi/2$, $\varpi=0\to 1$, $\vec F=0$, άρα $W_{\rm OB}=0$.
Για τη διαδρομή ΒΑ: $\varpi=1$, $\phi=\pi/2\to 0$, $\vec F=-k\cos^2\phi\,\hat\varpi+k\sin\phi\cos\phi\,\hat\phi$, $d\vec r=d\phi\,\hat\phi$, άρα $W_{\rm BA}=\int_{\pi/2}^0 k\sin\phi\cos\phi d\phi=\left[k\dfrac{\sin^2\phi}{2}\right]_{\pi/2}^0=-\dfrac{k}{2}$.
Συνολικά $W_{\rm OBA}=-\dfrac{k}{2}$.
(β) Για συντηρητική $\vec F$, $W_{\rm OA}=W_{\rm OBA}\Leftrightarrow n=1$.
Για $n=1$, $\vec F=-k\varpi\cos^2\phi\,\hat\varpi+k\varpi\sin\phi\cos\phi\,\hat\phi$. Για να είναι πράγματι συντηρητική πρέπει να υπάρχει δυναμική ενέργεια ώστε να ισχύει $\vec F=-\vec\nabla V$, δηλ. πρέπει να είναι $\dfrac{\partial V}{\partial\varpi}=k\varpi\cos^2\phi$ και $\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial V}{\partial\phi}=-k\varpi\sin\phi\cos\phi$. Η λύση της πρώτης είναι $V=\dfrac{k\varpi^2\cos^2\phi}{2}+C(\phi)$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη έχουμε $dC/d\phi=0$, δηλ. η C είναι σταθερά. Άρα η δύναμη είναι συντηρητική και η δυναμική ενέργεια είναι $V=\dfrac{k\varpi^2\cos^2\phi}{2}+C$ με C αυθαίρετη σταθερά.
Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι η $\vec F$ είναι συντηρητική μέσω της $\vec\nabla\times\vec F=0$ και στη συνέχεια να βρούμε τη δυναμική ενέργεια, είτε μέσω της $\vec F=-\vec\nabla V$, είτε μέσω του έργου της $\vec F$ από κάποιο σταθερό σημείο μέχρι κάποιο τυχαίο $(\varpi\,,\phi)$ ακολουθώντας μια οποιαδήποτε διαδρομή της επιλογής μας.
Το έργο για οποιαδήποτε τροχιά που αρχίζει από το Ο και τελειώνει στο Α είναι $V_{\rm O}-V_{\rm A}=V|_{\varpi=0}-V|_{\varpi=1\,,\phi=0}=C-\left(\dfrac{k}{2}+C\right)=-\dfrac{k}{2}$.
(γ) Είναι $V=\dfrac{kx^2}{2}+C$, δηλ. δυναμική ενέργεια ελατηρίου. Η αντίστοιχη δύναμη είναι $\vec F=-kx\hat x$.
Αυτό προκύπτει και από τη μορφή της $\vec F$ για $n=1$: $\vec F=-k\varpi\cos^2\phi\,\hat\varpi+k\varpi\sin\phi\cos\phi\,\hat\phi=-k\varpi\cos\phi\left(\cos\phi\,\hat\varpi-\sin\phi\,\hat\phi\right)=-kx\hat x$.
Το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους x_0 στον x άξονα και ομαλή κίνηση με ταχύτητα v_0 στον y άξονα.
Αυτό προκύπτει και από τη λύση των $m\ddot x=-kx\,,m\ddot y=0$ με αρχικές συνθήκες $x|_{t=0}=x_0$, $\dot x|_{t=0}=0$, $y|_{t=0}=0$, $\dot y|_{t=0}=v_0$.

Θέμα 2^o:

(α) $\vec r=x\hat x+2\hat y$, $|\vec r|=(x^2+4)^{1/2}$, $\vec m_1\cdot\vec m_2=0$, $\vec m_1\cdot\vec r=m_1x$, $\vec m_2\cdot\vec r=2m_2$, άρα $V(x)=-\dfrac{16x}{(x^2+4)^{5/2}}$.
$V'=64\dfrac{x^2-1}{(x^2+4)^{7/2}}$.
Είναι $V'<0$ για $|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$, ενώ $V'>0$ για $|x|>1\Leftrightarrow x>1$ και $x<-1$. Άρα η $V(x)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1)$ όπου μεταβάλλεται από $V(-\infty)=0$ σε $V(-1)=\dfrac{16}{5^{5/2}}$, στη συνέχεια φθείνουσα στο διάστημα $(-1,1)$, με $V(1)=-\dfrac{16}{5^{5/2}}$ και στη συνέχεια αύξουσα στο διάστημα $(1,\infty)$, με $V(\infty)=0$.
Ακρότατα έχει στα σημεία ±1 όπου $V'=0$.
Το $x=-1$ είναι μέγιστο (αφού η $V(x)$ γίνεται από αύξουσα φθείνουσα), ενώ το $x=1$ είναι ελάχιστο (αφού η $V(x)$ γίνεται από φθείνουσα αύξουσα).
Στα ίδια καταλήγουμε από το πρόσημο της V''.
(β) Σημεία ισορροπίας τα $x=\pm1$ όπου $V'=0$. Το $x=-1$ είναι ασταθές (η V έχει μέγιστο), ενώ το $x=1$ είναι ευσταθές (η V έχει ελάχιστο).
Γύρω από το $x=1$, με $q=x-1$ είναι
$V\approx V(1)+V'(1)q+\dfrac12 V''(1)q^2=-\dfrac{16}{5^{5/2}}+\dfrac{64}{5^{7/2}}q^2$
και η δύναμη $F=-V'=-(4/5)^{7/2}q$.
Ο νόμος Νέυτωνα $m\ddot x=F$ (με $\ddot x=\ddot q$) δίνει $\ddot q+(4/5)^{7/2}q=0$, δηλ. εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή $\ddot q+\omega^2q=0$ με $\omega=(4/5)^{7/4}$.
Η περίοδος είναι $2\pi/\omega=2\pi(5/4)^{7/4}$.
Αλλιώς: Η εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή προκύπτει και παραγωγίζοντας το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{m\dot q^2}{2}+V=E\Leftrightarrow\dfrac{\dot q^2}{2}+\dfrac{64}{5^{7/2}}q^2=$ σταθερά.
(γ) $E=\dfrac{m\dot x_0^2}{2}+V(0)=\dfrac{\dot x_0^2}{2}$.
Αν $E<V(-1)$, δηλ. $\dfrac{\dot x_0^2}{2}<\dfrac{16}{5^{5/2}}\Leftrightarrow|\dot x_0|<(4/5)^{5/4}\Leftrightarrow\dot x_0>-(4/5)^{5/4}$, το σώμα θα αλλάξει φορά κίνησης στο σημείο όπου $V(x)=E$ και θα καταλήξει στο $x=+\infty$.
Αν $E>V(-1)$, δηλ. $\dfrac{\dot x_0^2}{2}>\dfrac{16}{5^{5/2}}\Leftrightarrow|\dot x_0|>(4/5)^{5/4}\Leftrightarrow\dot x_0<-(4/5)^{5/4}$, το σώμα θα περάσει το λόφο δυναμικού και θα φτάσει στο $x=-\infty$.
Στην οριακή περίπτωση όπου $E=V(-1)$, δηλ. $\dfrac{\dot x_0^2}{2}=\dfrac{16}{5^{5/2}}\Leftrightarrow|\dot x_0|=(4/5)^{5/4}\Leftrightarrow\dot x_0=-(4/5)^{5/4}$, το σώμα θα φτάσει στο σημείο $x=-1$ σε άπειρο χρόνο.

Θέμα 3ο:

Η δυναμική ενέργεια είναι

$$V = -\int F(r)dr = \int mr\Omega(r)^2 dr$$

και η ενεργός δυναμική ενέργεια

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + \int mr\Omega(r)^2 dr\,,$$

όπου $L = mr_0^2\Omega(r_0)$ η στροφορμή.

Άρα

$$V_{\text{eff}} = \frac{mr_0^4\Omega(r_0)^2}{2r^2} + \int mr\Omega(r)^2 dr\,.$$

Είναι

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{mr_0^4\Omega(r_0)^2}{r^3} + mr\Omega(r)^2$$

με $\left.\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0$, δηλ. πράγματι η ακτίνα $r = r_0$ είναι λύση ισορροπίας για την ακτινική κίνηση.

Η συνθήκη για ευστάθεια είναι $\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r=r_0} > 0$.

Αφού

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} = 3\frac{mr_0^4\Omega(r_0)^2}{r^4} + m\Omega(r)^2 + mr\frac{d\Omega(r)^2}{dr}\,,$$

είναι $\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r=r_0} = 4m\Omega(r_0)^2 + mr_0\left.\frac{d\Omega(r)^2}{dr}\right|_{r=r_0}$.

Η έκφραση αυτή γράφεται και $\frac{m}{r_0^3}\left.\frac{d(r^4\Omega^2)}{dr}\right|_{r=r_0}$ και άρα η συνθήκη για ευστάθεια $\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r=r_0} > 0$ ισοδυναμεί με $\left.\frac{d(r^4\Omega^2)}{dr}\right|_{r=r_0} > 0$.

Αλλιώς: Μπορούμε να θέσουμε $r = r_0 + x$ και να αναπτύξουμε ως προς x την ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -mr\Omega(r)^2$, όπως στο 3ο θέμα της εξέτασης της 21/2/2012.

Θέμα 4ο:

(α) Από τον 3ο νόμο του Kepler

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{GM_1}{4\pi^2}\,, \quad \frac{r_2^3}{T_2^2} = \frac{GM_2}{4\pi^2}\,,$$

όπου r_1, T_1 είναι ο μεγάλος ημιάξονας και η περίοδος της τροχιάς της κίνησης του δορυφόρου γύρω από τη Γη μάζας M_1, ενώ με δείκτη 2 οι αντίστοιχες ποσότητες για το δορυφόρο γύρω από τη Σελήνη. Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο αυτές σχέσεις και επειδή οι πυκνότητες είναι περίπου ίσες προκύπτει ότι και οι περίοδοι είναι ίσες. (Αφού οι τροχιές είναι χαμηλές, οι μεγάλοι ημιάξονες r_1 και r_2 είναι πρακτικά οι ακτίνες Γης και Σελήνης, αντίστοιχα.)

(β) Επειδή η ενέργεια είναι αρνητική και ελαττώνεται λόγω μετατροπής μέρους της σε θερμότητα, το μέτρο της αυξάνει. Όμως το μέτρο της ενέργειας είναι αντιστρόφως ανάλογο του ημιάξονα της τροχιάς. Αυτό συνεπάγεται ότι ο ημιάξονας της τροχιάς μειώνεται. Από τον 3ο νόμο του Kepler αυτό συνεπάγεται μείωση της περιόδου και αύξηση της ταχύτητας.

(γ) Ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας είναι

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}_\tau \cdot \vec{v} = -kv^4\,.$$

Αλλά,

$$E = -\frac{GMm}{2r}\,, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{GMm}{2r^2}\frac{dr}{dt}\,,$$

$$\frac{GMm}{2r^2}\frac{dr}{dt} = -k\frac{G^2M^2}{r^2}\,.$$

Συνεπώς,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2kGM}{m}\,, \quad r = r_o - \frac{2kGM}{m}t\,.$$

Αλλιώς: Ο νόμος Νεύτωνα $m\vec{a} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} - kv^3\frac{\vec{v}}{v}$ με $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta} \approx -r\dot{\theta}^2\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta}$ και $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \approx r\dot{\theta}\hat{\theta}$ δίνει στην $\hat{r}$ διεύθυνση

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \tag{1}$$

και στην $\hat{\theta}$ διεύθυνση

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -kr^3\dot{\theta}^3\,. \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας στην εξ. (2) το $\dot{\theta}$ από την εξ. (1) προκύπτει

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{r}) = -\frac{kGM}{m\sqrt{r}} \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{2kGM}{m} \Leftrightarrow r = r_o - \frac{2kGM}{m}t\,.$$