Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 27 Μαΐου 2013
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 3ης Δεκεμβρίου 2012: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες $1^η$☐ $2^η$☐ $3^η$☐ $4^η$☐ $5^η$☐ $6^η$☐ $7^η$☐ $8^η$☐ $9^η$☐ $10^η$☐ $11^η$☐ $12^η$☐

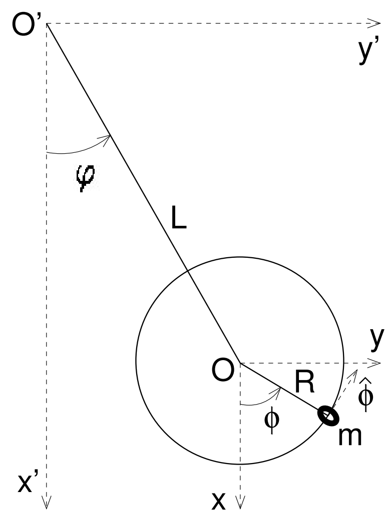
Θέμα 1^o:

Αν πετάξουμε προς τα πάνω σώμα αμελητέας επιφάνειας, οπότε και η αντίσταση αέρα είναι αμελητέα, αυτό φτάνει σε ύψος h_0 πάνω από το σημείο εκκίνησης. Αν πετάξουμε με την ίδια αρχική ταχύτητα υ_0 άλλο σώμα μάζας m στο οποίο ασκείται αντίσταση λv^2 (με λ σταθερά), αυτό φτάνει σε ύψος h. Δείξτε ότι στο όριο της μικρής αντίστασης ($\lambda v_0^2/mg = \epsilon \ll 1$) είναι $\dfrac{1}{h} \approx \dfrac{1}{h_0} + \dfrac{\lambda}{m}$.

Δίνεται το ανάπτυγμα $\dfrac{\epsilon}{\ln(1+\epsilon)} = 1 + \dfrac{\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Θέμα 2^o:

Μια κυκλική κατακόρυφη στεφάνη ακτίνας R κινείται σαν εκκρεμές σε κατακόρυφο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Το κέντρο της στεφάνης O απέχει σταθερή απόσταση L από το σταθερό σημείο O' και η γωνία φ είναι μια γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Δηλ. ο βραχίονας μήκους L συνδέει το κέντρο της στεφάνης με το σταθερό σημείο O' και περιστρέφεται γύρω από το O' με δεδομένο τρόπο. Δαχτυλίδι μάζας m είναι περασμένο στη στεφάνη και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές.



(α) Βρείτε την επιτάχυνση του σημείου O και δείξτε ότι στις πολικές συντεταγμένες του σχήματος στο σύστημα Oxy με αρχή το κέντρο της στεφάνης, ισχύει $\vec{a}_0 \cdot \hat{\phi} = L\ddot{\varphi}\cos(\phi - \varphi) + L\dot{\varphi}^2 \sin(\phi - \varphi)$.

Υπόδειξη: Είναι $\overrightarrow{O'O} = L\cos\varphi\,\hat{x} + L\sin\varphi\,\hat{y}$ και $\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$.

(β) Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης του δαχτυλιδιού είναι $R\ddot{\phi} = -g\sin\phi - L\ddot{\varphi}\cos(\phi - \varphi) - L\dot{\varphi}^2\sin(\phi - \varphi)$.

(γ) Έστω ότι τόσο η στεφάνη όσο και το δαχτυλίδι εκτελούν μικρές κινήσεις γύρω από την κατακόρυφο, δηλ. $|\varphi| \ll 1$ και $|\phi| \ll 1$. Απλοποιήστε την εξίσωση κίνησης του δαχτυλιδιού και δείξτε ότι αν η στεφάνη κινείται με $\varphi = \varphi_0 \sin(3\omega_0 t)$, όπου $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ (και $|\varphi_0| \ll 1$), γίνεται

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = \frac{9L}{R}\omega_0^2 \varphi_0 \sin(3\omega_0 t).$$

(δ) Επιλύστε την παραπάνω εξίσωση και βρείτε την $\phi(t)$ αν το δαχτυλίδι είναι αρχικά (για $t = 0$) ακίνητο ως προς τη στεφάνη ($\dot{\phi} = 0$) στην κατώτερη θέση ($\phi = 0$). Περιγράψτε την κίνηση. Ποια η περίοδός της και ποια η μέγιστη τιμή της γωνίας ϕ;

Δίνονται:

$\cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b$, $\sin(a-b) = \sin a\,\cos b - \sin b\,\cos a$, $\sin(3b) = 3\sin b - 4\sin^3 b$,
$m\vec{a}_\sigma = \Sigma\vec{F} - m\vec{a}_0$, $\vec{a}_\sigma = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}$.

Θέμα 3^o:

Ένα σωματίδιο $m = 1$ κινείται εντός του δυναμικού :

$$V(r) = \frac{4}{r^6} - \frac{5}{r^4}\,,$$

όπου r η απόσταση από το κέντρο του κεντρικού αυτού πεδίου δυνάμεων.

(α) Αν οι αρχικές του συνθήκες ($t = 0$) για τη θέση και ταχύτητά του είναι $\vec{r}_o = (1, 0, 0) = \hat{x}$, $\vec{v}_o = (0, \sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}\,\hat{y}$, να υπολογισθούν η ενέργεια E και η στροφορμή L του σωματιδίου.

(β) Να υπολογισθούν οι ακτίνες όλων των δυνατών κυκλικών τροχιών του σωματιδίου εντός αυτού του πεδίου κεντρικών δυνάμεων όταν η στροφορμή είναι αυτή που βρήκατε στο ερώτημα (α). Ποιές από αυτές είναι ευσταθείς και ποιές ασταθείς;

Στα επόμενα ερωτήματα ισχύουν οι αρχικές συνθήκες του ερωτήματος (α).

(γ) Να υπολογισθούν οι επιτρεπτές περιοχές της κίνησης του σωματιδίου, δηλ., οι δακτύλιοι της επιτρεπτής κίνησης (αψίδες της τροχιάς).

(δ) Κάνετε μια γραφική παράσταση του υποθετικού δυναμικού $V'(r)$, σημειώνοντας τα σημεία όπου αυτό μηδενίζεται, έχει ακρότατα, καθώς και τη συμπεριφορά του όταν $r \longrightarrow 0$ και $r \longrightarrow \infty$.

(ε) Ποιά εξίσωση μας δίδει την τροχιά $r(\theta)$ του σωματιδίου; Επιλύστε αυτή την εξίσωση και υπολογίστε την $r(\theta)$. Θα σας χρειαστεί ένα από τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + bx + c}} = \sin^{-1}\frac{2x - b}{\sqrt{b^2 + 4c}}\,, \quad \int \frac{du}{\sqrt{-u^2 + bu^4 + cu^6}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{b - 2/u^2}{\sqrt{b^2 + 4c}}\,.$$

★ (στ) Είναι η κίνηση περιοδική; Αν είναι, να υπολογισθεί η περίοδος.

Θέμα 4^o:

Ένας δορυφόρος της Γης κινείται κυκλικά σε απόσταση r από το κέντρο της. Σε κάποια στιγμή σπάει σε δύο μέρη μαζών m_1 και m_2. Το m_1 αμέσως μετά τη διάσπαση έχει μηδενική ταχύτητα και πέφτει κατακόρυφα στη Γη, ενώ το m_2 διαφεύγει από το πεδίο της Γης. Ποιος μπορεί να είναι ο λόγος m_1/m_2; Πόση είναι τουλάχιστον η ενέργεια που απελευθερώθηκε κατά τη διάσπαση;

★ = bonus ερωτήματα

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

Χωρίς αντίσταση $h_0 = \dfrac{v_0^2}{2g}$.
Με αντίσταση $m\dot{v} = -mg - \lambda v^2$
Με $\dot{v} = v\dfrac{dv}{dz}$ είναι $\displaystyle\int_0^h dz = -\int_{v_0}^0 \frac{mvdv}{mg+\lambda v^2} \Leftrightarrow$
$h = -\dfrac{m}{2\lambda}\ln(mg+\lambda v^2)\Big|_{v_0}^0 = \dfrac{m}{2\lambda}\ln\left(1+\dfrac{\lambda v_0^2}{mg}\right)$.
Με $\epsilon = \dfrac{\lambda v_0^2}{mg}$ είναι $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{h_0}\dfrac{\epsilon}{\ln(1+\epsilon)}$.
Στο όριο της μικρής αντίστασης
$\dfrac{1}{h} \approx \dfrac{1}{h_0}\left(1+\dfrac{\epsilon}{2}\right) = \dfrac{1}{h_0} + \dfrac{\lambda}{m}$.

Θέμα 2^o:

(α) $\vec{a}_0 = \dfrac{d^2}{dt^2}\,\overrightarrow{O'O} = \left(-L\ddot{\varphi}\sin\varphi - L\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\hat{x} + \left(L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\hat{y}$,
$\vec{a}_0\cdot\hat{\phi} = \vec{a}_0\cdot(-\sin\phi\,\hat{x}+\cos\phi\,\hat{y}) = L\ddot{\varphi}\cos(\phi-\varphi) + L\dot{\varphi}^2\sin(\phi-\varphi)$.
(β) Αφού $r=R$, $\vec{a}_\sigma = -R\dot{\phi}^2\hat{r} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$.
Ο νόμος Νεύτωνα είναι $m\vec{a}_\sigma = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_0$ όπου $\vec{N}\parallel\hat{r}$ η αντίδραση από τη στεφάνη. Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα $\vec{a}_\sigma\cdot\hat{\phi} = \vec{g}\cdot\hat{\phi} - \vec{a}_0\cdot\hat{\phi}$ δίνει την εξίσωση κίνησης
$R\ddot{\phi} = -g\sin\phi - L\ddot{\varphi}\cos(\phi-\varphi) - L\dot{\varphi}^2\sin(\phi-\varphi)$.
(γ) Για $|\varphi|\ll 1$ και $|\phi|\ll 1$, κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους, με $\sin\phi\approx\phi$, $\ddot{\varphi}\cos(\phi-\varphi)\approx\ddot{\varphi}$, $\dot{\varphi}^2\sin(\phi-\varphi)\approx 0$, η εξίσωση κίνησης γίνεται
$R\ddot{\phi} = -g\phi - L\ddot{\varphi}$.
Θέτοντας $\varphi = \varphi_0\sin(3\omega_0 t)$ έχουμε
$\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = \dfrac{9L}{R}\omega_0^2\varphi_0\sin(3\omega_0 t)$
(εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση).
(δ) Λύση της ομογενούς:
$\phi_{\text{ομ}} = C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t)$.
Μερική λύση της μορφής $\phi_{\text{μερ}} = A\sin(3\omega_0 t)$. Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση βρίσκουμε $A = -\dfrac{9L}{8R}\varphi_0$.
Άρα γενική λύση

$$\phi = C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t) - \frac{9L}{8R}\varphi_0\sin(3\omega_0 t)$$

$$\frac{\dot{\phi}}{\omega_0} = C_1\cos(\omega_0 t) - C_2\sin(\omega_0 t) - \frac{27L}{8R}\varphi_0\cos(3\omega_0 t)$$

Από τις αρχικές συνθήκες $\phi|_{t=0} = 0$, $\dot{\phi}\Big|_{t=0} = 0$ βρίσκουμε $C_2 = 0$ και $C_1 = \dfrac{27L}{8R}\varphi_0$, οπότε η λύση είναι
$\phi = \dfrac{27L}{8R}\varphi_0\left[3\sin(\omega_0 t) - \sin(3\omega_0 t)\right]$.
Η κίνηση είναι σύνθεση ταλαντώσεων.
Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin(3\omega_0 t) = 3\sin(\omega_0 t) - 4\sin^3(\omega_0 t)$ μπορούμε να γράψουμε $\phi = \dfrac{27L}{2R}\varphi_0\sin^3(\omega_0 t)$. Η περίοδος είναι $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.
Η μέγιστη τιμή της γωνίας είναι $\phi_{\max} = \dfrac{27L}{2R}\varphi_0$.
Η περίοδος μπορεί να βρεθεί και σαν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των δύο επιμέρους ταλαντώσεων. Το μέρος με το $\sin(\omega_0 t)$ έχει περίοδο $2\pi/\omega_0$ και το μέρος με το $\sin(3\omega_0 t)$ έχει περίοδο $2\pi/3\omega_0$. Άρα η περίοδος της σύνθεσης είναι $2\pi/\omega_0$. Το πλάτος της σύνθεσης είναι το άθροισμα των επιμέρους πλατών, δηλ. $3\dfrac{27L}{8R}\varphi_0 + \dfrac{27L}{8R}\varphi_0 = \dfrac{27L}{2R}\varphi_0$.

Θέμα 3^o:

(α) $E = \dfrac{\vec{v}_o^2}{2} + V(\vec{r}_o) = 1+4-5 = 0$, $L = r_o v_o = \sqrt{2}$.
(β) Για $L=\sqrt{2}$ το υποθετικό δυναμικό είναι :

$$V'(r) = \frac{4}{r^6} - \frac{5}{r^4} + \frac{1}{r^2}\,,$$

$$\left.\frac{dV'}{dr}\right|_{r_o} = -\frac{24}{r_o^7} + \frac{20}{r_o^5} - \frac{2}{r_o^3} = \frac{2}{r_o^7}(-12+10r_o^2-r_o^4)\,.$$

$$\left.\frac{dV'}{dr}\right|_{r_o} = 0 \Longleftrightarrow r_o^2 = \frac{10\pm\sqrt{52}}{2} = 5\pm\sqrt{13}$$

$$r_{o,1}^2 = 5-\sqrt{13} \approx 5-3.6 = 1.4 \Longrightarrow r_{o,1}\approx 1.2\,,$$

$$r_{o,2}^2 = 5+\sqrt{13} \approx 5+3.6 = 8.6 \Longrightarrow r_{o,2}\approx 2.9\,.$$

$$\left.\frac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r_o} = \frac{168}{r_o^8} - \frac{100}{r_o^6} + \frac{6}{r_o^4} = \frac{2}{r_o^8}(84-50r_o^2+3r_o^4)$$

Επειδή $r_o^4 = 10r_o^2 - 12 \Longrightarrow$

$$\left.\frac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r_o} = \frac{2}{r_o^8}(84-50r_o^2+30r_o^2-36) = -\frac{40}{r_o^8}(r_o^2-2.4)\,,$$

Στο $r_{o,1} = \sqrt{5-\sqrt{13}}$, $r_{o,1}^2 - 2.4 = 2.6-\sqrt{13} < 0$,
$\left.\dfrac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r_{o,1}} > 0 \longrightarrow$ ευσταθής κυκλική τροχιά στο $r_{o,1}$.

Στο $r_{o,2} = \sqrt{5+\sqrt{13}}$, $r_{o,2}^2 - 2.4 = 2.6+\sqrt{13} > 0$,
$\left.\dfrac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r_{o,2}} < 0 \longrightarrow$ ασταθής κυκλική τροχιά στο $r_{o,2}$.

(γ) Επειδή $\frac{\dot r^2}{2} = E - V' \ge 0$ και $E=0$, η κίνηση είναι επιτρεπτή εκεί όπου $V'(r) \le 0$,

$$V'(r) = \frac{4}{r^6} - \frac{5}{r^4} + \frac{1}{r^2} \le 0 \Longrightarrow r^4 - 5r^2 + 4 \le 0 \longrightarrow$$

$$r^2 \text{ μεταξύ των ριζών } r_{1,2}^2 = \frac{5 \pm 3}{2} \longrightarrow$$

$$1 \le r^2 \le 4 \longrightarrow 1 \le r \le 2\,.$$

Η κίνηση είναι επιτρεπτή στο δακτύλιο $1 \le r \le 2$.
(δ) Το $V'(r)$ τέμνει τον άξονα στα σημεία $r=1$ και $r=2$, έχει ελάχιστο στο σημείο $r_{o,1} \approx 1.2$ και μέγιστο στο σημείο $r_{o,2} \approx 2.9$. Στο άπειρο τείνει στο 0 από θετικές τιμές, ενώ στην αρχή απειρίζεται.
(ε) Από το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2}\dot r^2 + \left[\frac{L^2}{2r^2} + V(r)\right] = \frac{1}{2}\dot r^2 + V'(r)$$

παίρνουμε την διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{2\Big[E - V'(r)\Big]}\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας με το $dt/d\theta = mr^2/L$ παίρνουμε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης για το $r(\theta)$,

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm\frac{\sqrt{2}}{L}r^2\sqrt{E - V'(r)}\,.$$

Επειδή $L = \sqrt{2}$ και $E = 0$,

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm r^2\sqrt{-\frac{4}{r^6} + \frac{5}{r^4} - \frac{1}{r^2}}\,,$$

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{d\theta} = \pm\sqrt{-r^4 + 5r^2 - 4}\,,$$

$$\pm 2\int d\theta = \int^{r^2} \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 5x - 4}}\,,$$

$$\pm 2\theta \pm C' = \sin^{-1}\frac{2r^2 - 5}{3}\,,$$

$$\frac{2r^2 - 5}{3} = \pm\sin(2\theta + C') = \sin(2\theta + C)\,,$$

$$r = \sqrt{\frac{5 + 3\sin(2\theta + C)}{2}}\,.$$

Για τη συγκεκριμένη αρχική θέση του σωματιδίου $r|_{\theta=0} = 1$ βρίσκουμε $\sin C = -1$, οπότε και $\cos C = 0$, $\sin(2\theta + C) = -\cos(2\theta)$. Άρα

$$r = \sqrt{\frac{5 - 3\cos(2\theta)}{2}} \quad \text{ή} \quad r = \sqrt{1 + 3\sin^2\theta}\,.$$

Αλλιώς, από $\frac{dr}{d\theta} = \pm r^2\sqrt{-\frac{4}{r^6} + \frac{5}{r^4} - \frac{1}{r^2}}$ με $u = \frac{1}{r}$,

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{-4u^6 + 5u^4 - u^2}\,,$$

$$\pm\int d\theta = \int^{1/r} \frac{du}{\sqrt{-u^2 + 5u^4 - 4u^6}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{5 - 2/u^2}{3}\,,$$

$$\frac{5 - 2r^2}{3} = \pm\sin(2\theta + C') = \sin(2\theta - C)\,.$$

Από αρχικές συνθήκες $\sin C = -1$ (άρα $\cos C = 0$) οπότε $r = \sqrt{\frac{5 - 3\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{1 + 3\sin^2\theta}$.

Αλλιώς: Από $u'' + u = -\frac{mF}{L^2u^2} = \frac{1}{2u^2}\frac{dV}{dr} = -12u^5 + 10u^3$, με $u = 1/r$. Θέτοντας $u'' = u'\frac{du'}{du}$ έχουμε $du'^2 = (-24u^5 + 20u^3 - 2u)du$ και αφού από τις αρχικές συνθήκες $u' = 0$ για $u = 1$, προκύπτει $u'^2 = -4u^6 + 5u^4 - u^2$. Άρα, όπως πριν, προκύπτει η εξίσωση $\pm\int d\theta = \int^{1/r} \frac{du}{\sqrt{-u^2 + 5u^4 - 4u^6}}$.

(στ) $\vec r = x\hat x + y\hat y$ με $x = \sqrt{\frac{5 + 3\sin(2\theta + C)}{2}}\cos\theta$ και $y = \sqrt{\frac{5 + 3\sin(2\theta + C)}{2}}\sin\theta$. Μετά από μια πλήρη περιστροφή $\theta = 2\pi$ το σωματίδιο επανέρχεται στο αρχικό σημείο. Αυτό συμβαίνει μετά από χρόνο μιας περιόδου $T = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\dot\theta} = \int_0^{2\pi}\frac{mr^2\,d\theta}{L} = \int_0^{2\pi}\frac{5 + 3\sin(2\theta + C)}{2\sqrt{2}}d\theta = \frac{5\pi}{\sqrt{2}}$.

Θέμα 4^o:

Αρχική ταχύτητα $v_0 = \sqrt{GM/r}$. Μετά τη διάσπαση $0 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_0$ με $v_2 \ge \sqrt{2GM/r}$ (ώστε $E_2 \ge 0$). Άρα $v_2 = \frac{(m_1 + m_2)v_0}{m_2} \ge \sqrt{2GM/r} \Leftrightarrow \frac{m_1 + m_2}{m_2} \ge \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} \ge \sqrt{2} - 1$.

$$\Delta E = 0 + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v_0^2}{2} = \frac{(m_2v_2)^2}{2m_2} - \frac{(m_1 + m_2)v_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)^2v_0^2}{2m_2} - \frac{(m_1 + m_2)v_0^2}{2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{(m_1 + m_2)v_0^2}{2} \ge (\sqrt{2} - 1)\frac{GM(m_1 + m_2)}{2r}.$$