Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 13 Φεβρουαρίου 2013
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

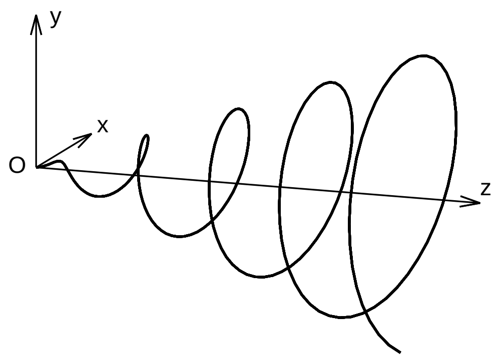
Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: __ __ __ __ __ __ __

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 3ης Δεκεμβρίου 2012: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐

Θέμα 1ο:

Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται χωρίς τριβές πάνω στην «κωνική» έλικα με εξίσωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\varpi = z$, $\phi = z$ (με $z \geq 0$), υπό την επίδραση πεδίου βαρύτητας $\vec{g} = -\hat{y}$.



(α) Βρείτε την κινητική και δυναμική ενέργεια του σώματος σαν συνάρτηση της $z(t)$ και γράψτε το ολοκλήρωμα ενέργειας που αποτελεί και την εξίσωση κίνησης.
(β) Έστω αρχικά το σώμα εκτοξεύεται από την θέση $z = 0$ με ταχύτητα v_0 και φτάνει σε μέγιστο $z_{\max} = 0.07$. Ποια η αρχική ταχύτητα v_0; Σε πόσο χρόνο θα γυρίσει στην αρχική θέση;
Υπόδειξη: Δείξτε ότι για μικρά $z \ll 1$ η εξίσωση κίνησης γίνεται $\dot{z}^2 + z^2 = E \Leftrightarrow \ddot{z} + z = 0$.

Θέμα 2ο:

Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται στην ημιευθεία Ox υπό την επίδραση πεδίου δυνάμεων $F(x)$. Αν το αφήνουμε από διάφορες θέσεις x_0 του ημιάξονα βλέπουμε ότι η θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου είναι

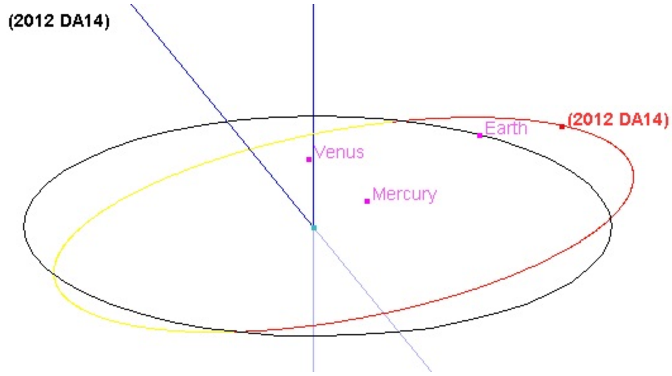
$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{1 - x_0^4}{x_0^2}\sin^2 t}.$$

(α) Δείξτε ότι η κινητική του ενέργεια σαν συνάρτηση της θέσης είναι $T = \dfrac{x_0^2}{2} + \dfrac{1}{2x_0^2} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2x^2}$.
(β) Βρείτε δυναμική ενέργεια $V(x)$ για το πεδίο δυνάμεων και τη δύναμη $F(x)$.
(γ) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $V(x)$ (για $x > 0$) καθώς και το διάγραμμα φάσης (τις τροχιές σε άξονες $x - \dot{x}$ για διάφορες ενέργειες).
★ (δ) Έστω αφήνουμε δύο ίδια, ελαστικά σωματίδια μοναδιαίας μάζας στο παραπάνω πεδίο δυνάμεων, το ένα στη θέση $c < 1$ και το άλλο στη θέση $1/c$. Πότε και που θα συγκρουστούν για πρώτη φορά; Περιγράψτε την κίνηση των σωματιδίων μετά την πρώτη κρούση. Πότε θα βρεθούν στις θέσεις που τα αφήσαμε και τι ταχύτητα θα έχουν εκεί; Σχεδιάστε τις καμπύλες φάσης για τα δύο σωματίδια.

Θέμα 3ο:

Μεθαύριο (15 Φεβρουαρίου 2013), ένας αστεροειδής (ο 2012 DA14) θα περάσει στην πολύ κοντινή απόσταση των 27800 km από τον πλανήτη μας. Ο αστεροειδής αυτός είναι ένας από τους χιλιάδες «μικρομεσαίους» αστεροειδείς που κυκλοφορούν στη διαστημική μας γειτονιά και πλησιάζουν τη Γη, άλλοτε σε μεγαλύτερη και άλλοτε σε μικρότερη απόσταση. Ο 2012 DA14 έχει διάμετρο 50 μέτρων και θα εισέλθει επικίνδυνα στην περιοχή που βρίσκονται σε τροχιά οι «γεωσύγχρονοι δορυφόροι» που είναι στην συντριπτική τους πλειονότητα τηλεπικοινωνιακοί. Ο 2012 DA14 θα περάσει τόσο κοντά από τη Γη που μπορεί να γίνει ορατός με μικρά τηλεσκόπια ή ακόμη και με κυάλια. Αν κάποια στιγμή στο μέλλον ο 2012 DA14 «λοξοδρομήσει» και προσκρούσει στον πλανήτη μας οι επιπτώσεις θα είναι ανυπολόγιστες αφού υπολογίζεται ότι η σύγκρουση θα προκαλέσει μια έκρηξη ισχύος 3.5 μεγατόνων TNT. Αυτό σημαίνει ότι ο αστεροειδής μπορεί να «εξαφανίσει» μια μητρόπολη όπως π.χ., η Αθήνα.

Ο αστεροειδής κινείται γύρω από τον Ήλιο σε ελλειπτική τροχιά με μεγάλο ημιάξονα $a = 0.91$ AU και εκκεντρότητα $e = 0.089$ της οποίας το επίπεδο σχηματίζει γωνία 11.6 μοιρών με το επίπεδο της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο ενώ κινείται με την ίδια φορά όπως και η Γη γύρω από τον Ήλιο, όπως στο ακόλουθο σχήμα.



(α) Να υπολογισθεί η ταχύτητα του αστεροειδούς στο περιήλιο και αφήλιο της τροχιάς του για το δεδομένο ημιάξονα a και εκκεντρότητα e.
(Δίδεται $\sqrt{GM_\odot/a_\oplus} \approx 30$ km/s, όπου $M_\odot$ η μάζα του Ήλιου και $a_\oplus$ η αστρονομική μονάδα.)
(β) Επειδή η εκκεντρότητα της τροχιάς του αστεροειδούς γύρω από τον Ήλιο είναι πολύ μικρή, θεωρούμε ότι κινείται σε τροχιά κυκλική ακτίνας $a = 0.91$ AU. Να υπολογισθεί η ταχύτητα και η περίοδος περιφοράς του 2012 DA14 περί τον Ήλιο.
(γ) Να υπολογισθεί η σχετική ταχύτητα v_∞ του 2012 DA14 ως προς τη Γη, όταν ευρίσκεται σε απόσταση 27800 km από την επιφάνεια της Γης θεωρώντας ότι η βαρυτική αλληλεπίδραση Γης - αστεροειδούς είναι αμελητέα. Η πλησιέστερη απόσταση r_0 του 2012 DA14 από τη Γη συμβαίνει όταν τα επίπεδα των τροχιών τους τέμνονται.
(δ) Στην πραγματικότητα όμως η ταχύτητα του 2012 DA14 αυξάνεται λόγω του βαρυτικού πεδίου της Γης στην εγγύτερη συνάντησή τους $r_0 = 6400 + 27800$ km ≈ 0.000228 AU ! Από την αύξηση της κινητικής ενέργειας του αστεροειδούς όταν εισέρχεται στο πεδίο της Γης δείξτε ότι η νέα σχετική ταχύτητα $v_{\sigma\chi\epsilon\tau}$ στη θέση της ελάχιστης απόστασης r_0 είναι $v_{\sigma\chi\epsilon\tau} = \sqrt{v_\infty^2 + 2GM_\oplus/r_0} = 8$ km/s, όπου $v_\infty = 6.4$ km/s η ταχύτητα αν αγνοούσαμε το πεδίο της Γης. (Δίδεται $M_\oplus = M_\odot/333000$.)
★ (ε) Αν ο αστεροειδής προσέκρουε στη Γη δείξτε όμοια ότι η ταχύτητά του κατά τη σύγκρουση θα ήταν $\sqrt{v_\infty^2 + 2GM_\oplus/R_\oplus}$. Υπολογίστε την ταχύτητα αυτή και την κινητική ενέργεια με δεδομένο ότι η μάζα του αστεροειδούς είναι $m = 180000$ τόνοι και ότι $\sqrt{2GM_\oplus/R_\oplus} = 11.2$ km/s. Ποια είναι η ενέργεια σε μεγατόνους TNT; (Ένας μεγατόνος TNT αντιστοιχεί σε ενέργεια 4.184×10^{15} J.)

Θέμα 4ο:

Δύο αστέρια με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = \lambda m$ αλληλεπιδρούν βαρυτικά.
(α) Αν αρχικά (τη χρονική στιγμή $t = 0$) το m_1 βρίσκεται στη θέση $\vec{R}_1|_{t=0} = -a\hat{X}$ και έχει ταχύτητα $\vec{V}_1|_{t=0} = -\beta\sqrt{\dfrac{Gm}{a}}\hat{Y}$, ποια η αρχική θέση και ταχύτητα του m_2 ώστε το κέντρο μάζας να βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων σε κάθε χρόνο;
(β) Έστω τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι θέσεις των αστεριών είναι $\vec{R}_1|_{t=0} = -a\hat{X}$, $\vec{R}_2|_{t=0} = \dfrac{a}{\lambda}\hat{X}$ και οι ταχύτητές τους είναι $\vec{V}_1|_{t=0} = -\beta\sqrt{\dfrac{Gm}{a}}\hat{Y}$, $\vec{V}_2|_{t=0} = \dfrac{\beta}{\lambda}\sqrt{\dfrac{Gm}{a}}\hat{Y}$.
(β_1) Για ποια σχέση μεταξύ β και λ οι τροχιές είναι κυκλικές;
★ (β_2) Για ποια σχέση μεταξύ β και λ τα αστέρια απομακρύνονται και φτάνουν σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους;

★ = bonus ερωτήματα

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α) $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z} = \dot{z}\left(\hat{\varpi} + z\hat{\phi} + \hat{z}\right)$.

Κινητική ενέργεια $T = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{2+z^2}{2}\dot{z}^2$.
Δυναμική ενέργεια $V = mgy = \varpi \sin\phi = z\sin z$.
Ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{2+z^2}{2}\dot{z}^2 + z\sin z = E$.

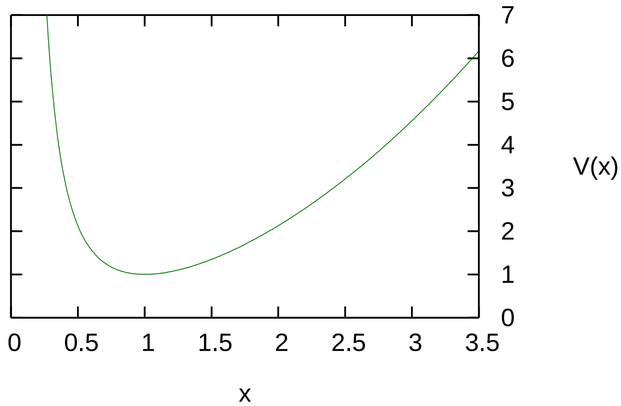
(β) $E = \dfrac{mv_0^2}{2} + V|_{z=0} = \dfrac{v_0^2}{2}$.
Αφού $z_{\max} \ll 1$ το z παραμένει μικρό σε όλη την κίνηση και το ολοκλήρωμα ενέργειας απλοποιείται (με $\sin z \approx z$ και κρατώντας όρους μέχρι 2ης τάξης) σε $\dot{z}^2 + z^2 \approx E$.
Στο μέγιστο z θα είναι $\dot{z} = 0$, οπότε
$z_{\max}^2 \approx E \Leftrightarrow 0.07^2 = \dfrac{v_0^2}{2} \Leftrightarrow v_0 = 0.07\sqrt{2} = 0.1$.
Το ολοκλήρωμα $\dot{z}^2 + z^2 \approx E$ περιγράφει αρμονικό ταλαντωτή. Πράγματι, παραγωγίζοντας το ολοκλήρωμα προκύπτει $\ddot{z} + z = 0$, δηλ. ταλαντωτής με $\omega = 1$. Το σώμα θα γυρίσει στην αρχική θέση σε μισή περίοδο, δηλ. σε χρόνο $\dfrac{\pi}{\omega} = \pi$.

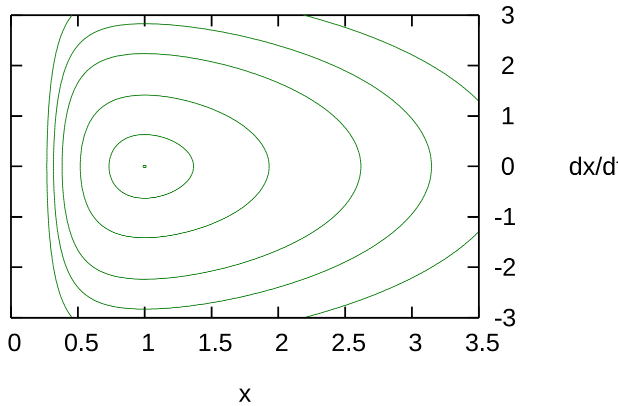
Θέμα 2^o:

(α) $\dot{x} = \dfrac{1-x_0^4}{x_0^2}\dfrac{\sin t\cos t}{x}$, $T = \dfrac{(1-x_0^4)^2\sin^2 t\cos^2 t}{2x_0^4 x^2}$.
Από τη σχέση $x = x(t)$ είναι $\sin^2 t = \dfrac{x_0^2x^2 - x_0^4}{1-x_0^4}$,
$\cos^2 t = \dfrac{1-x_0^2x^2}{1-x_0^4}$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε
$T = \dfrac{(x^2-x_0^2)(1-x_0^2x^2)}{2x_0^2x^2} = \dfrac{x_0^2}{2} + \dfrac{1}{2x_0^2} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2x^2}$.

(β) $V(x) = E - T = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2x^2} +$ σταθερά. Μπορούμε να αγνοήσουμε τη σταθερά για απλούστευση, οπότε $V(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2x^2}$ και $E = \dfrac{x_0^2}{2} + \dfrac{1}{2x_0^2}$.
Η δύναμη $F(x) = -\dfrac{dV}{dx} = -x + \dfrac{1}{x^3}$.
Η κίνηση σε κεντρική δύναμη «ελατηρίου» και μη-μηδενική στροφορμή περιγράφεται από ένα τέτοιο πεδίο (με $x \to r$). Πράγματι για ένα τέτοιο πεδίο το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{Kr^2}{2} + \dfrac{L^2}{2mr^2} = E$, το υποθετικό δυναμικό είναι $\dfrac{Kr^2}{2} + \dfrac{L^2}{2mr^2}$ και η $\hat{r}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m\ddot{r} = -Kr + \dfrac{L^2}{mr^3}$. Σε κατάλληλες μονάδες όπου οι αποστάσεις μετρώνται σε μονάδες $(L^2/mK)^{1/4}$ και οι χρόνοι σε $(K/m)^{1/2}$ το υποθετικό δυναμικό είναι $\dfrac{r^2}{2} + \dfrac{1}{2r^2}$ και η $\hat{r}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $\ddot{r} = -r + \dfrac{1}{r^3}$.
Το εκκρεμές του Φουκώ (με μη-μηδενική στροφορμή) είναι ένα τέτοιο σύστημα.

(γ) Μελέτη της $V(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2x^2}$ για $x > 0$:
$V'(x) = x - \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{x^4-1}{x^3}$.
Για $x < 1$ είναι $V'(x) < 0$ και η $V(x)$ φθείνουσα, ενώ για $x > 1$ είναι $V'(x) > 0$ και η $V(x)$ αύξουσα.
Στο $x = 1$ η $V(x)$ έχει ελάχιστο ίσο με $V(1) = 1$.
Στα $x \to 0^+$ και $x \to +\infty$ είναι $V(x) \to +\infty$.





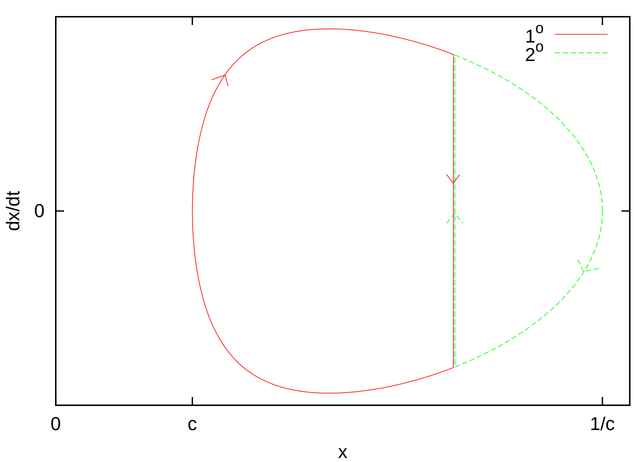
Κάθε x_0 αντιστοιχεί σε ενέργεια $E = \dfrac{x_0^2}{2} + \dfrac{1}{2x_0^2} = V(x_0) = V(1/x_0)$. Το σώμα κινείται μεταξύ των σημείων x_0 και $1/x_0$ που είναι οι (θετικές) λύσεις της $V(x) = E$.

(δ) Για $x_{01} = c$ και $x_{02} = 1/c$ έχουμε
$x_1 = \sqrt{c^2 + \dfrac{1-c^4}{c^2}\sin^2 t}\,, x_2 = \sqrt{\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1-c^4}{c^2}\sin^2 t}$.
Θα συγκρουστούν για $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \sin^2 t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$
$t = \dfrac{\pi}{4}$ στη θέση $x_1 = x_2 = \sqrt{\dfrac{c^2}{2} + \dfrac{1}{2c^2}}$.
Αφού η κρούση είναι ελαστική και οι μάζες ίσες θα

ανταλλάξουν ταχύτητες. (Η διατήρηση ορμής και ενέργειας δίνουν $v_1 + v_2 = v_1' + v_2' \Leftrightarrow v_2' - v_2 = v_1 - v_1'$ και $v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \Leftrightarrow v_2'^2 - v_2^2 = v_1^2 - v_1'^2$, ή, χρησιμοποιώντας την πρώτη, $v_2' + v_2 = v_1 + v_1'$. Η λύση του συστήματος $v_2' - v_2 = v_1 - v_1'$, $v_2' + v_2 = v_1 + v_1'$ προκύπτει εύκολα αθροίζοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και είναι $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$.) Έτσι το πρώτο θα συνεχίσει την κίνηση που θα έκανε το δεύτερο αν δεν υπήρχε η κρούση και το δεύτερο θα συνεχίσει την κίνηση που θα έκανε το πρώτο. Δηλ. μετά την πρώτη κρούση θα είναι $x_1 = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1-c^4}{c^2}\sin^2 t}$ και $x_2 = \sqrt{c^2 + \frac{1-c^4}{c^2}\sin^2 t}$. Το πρώτο σωματίδιο θα κινείται προς μικρότερα x και θα φτάσει στη θέση που το αφήσαμε ($x = c$) σε χρόνο $t = \pi/2$. Στο χρόνο αυτό το δεύτερο σωματίδιο θα φτάσει επίσης στη θέση που το αφήσαμε ($x = 1/c$). Τα σωματίδια φτάνουν στις αρχικές θέσεις με μηδενική ταχύτητα (αφού $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ για $t = \pi/2$) και οι κινήσεις επαναλαμβάνονται.

Θα ξανασυγκρουστούν στις επόμενες στιγμές που $\sin^2 t = \frac{1}{2}$, δηλ. για $t = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ με $n \in \mathbb{N}^\star$, στη θέση $x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{2c^2}}$ και κάθε φορά θα ανταλλάσσουν ταχύτητες, οπότε το πρώτο θα κινείται στο διάστημα $c \le x_1 \le \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{2c^2}}$ και το δεύτερο στο $\sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1}{2c^2}} \le x_2 \le \frac{1}{c}$.

Οι καμπύλες φάσης ακολουθούν. (Τα δύο σωματίδια έχουν ίδια ενέργεια αφού $E_1 = V(c) = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{2c^2}$ και $E_2 = V(1/c) = E_1$. Άρα λίγο πριν τη σύγκρουση έχουν ίδια κινητική ενέργεια και αντίθετες ταχύτητες, οπότε κατά την κρούση οι ταχύτητες και των δύο σωματιδίων αντιστρέφονται χωρίς να αλλάξει το μέτρο τους.)



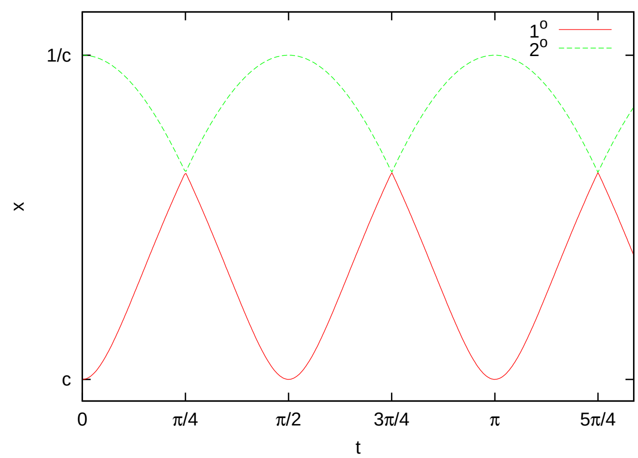
Οι θέσεις σε κάθε χρόνο είναι

$$x_1 = \begin{cases} \sqrt{c^2 + \frac{1-c^4}{c^2}\sin^2 t}\,, n\pi - \frac{\pi}{4} \le t \le n\pi + \frac{\pi}{4}\,, \\ \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1-c^4}{c^2}\sin^2 t}\,, n\pi + \frac{\pi}{4} \le t \le n\pi + \frac{3\pi}{4}\,, \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1-c^4}{c^2}\sin^2 t}\,, n\pi - \frac{\pi}{4} \le t \le n\pi + \frac{\pi}{4}\,, \\ \sqrt{c^2 + \frac{1-c^4}{c^2}\sin^2 t}\,, n\pi + \frac{\pi}{4} \le t \le n\pi + \frac{3\pi}{4}\,, \end{cases}$$

με $n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα, οι θέσεις μεταξύ της $n-$οστής και της $(n+1)-$οστής κρούσης, δηλ. για $\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ με $n \in \mathbb{N}$, είναι $x_1 = \sqrt{c^2 + \frac{1-c^4}{c^2}\sin^2\left(t - \frac{n\pi}{2}\right)}$ και $x_2 = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1-c^4}{c^2}\sin^2\left(t - \frac{n\pi}{2}\right)}$.



Θέμα 3°:

(α) Όπως σελ. 242 βιβλίου Κ. Τσίγκανου:

Στο περιήλιο $v_\pi = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{0.91 a_\oplus}}\sqrt{\frac{1+0.089}{1-0.089}} = 34.4$ km/s και στο αφήλιο $v_a = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{0.91 a_\oplus}}\sqrt{\frac{1-0.089}{1+0.089}} = 28.8$ km/s.

(β) $v_{\alpha\sigma\tau\varepsilon\rho} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{0.91 a_\oplus}} = \frac{v_{\Gamma\eta}}{\sqrt{0.91}} = 31.4$ km/s.

$T_{\alpha\sigma\tau\varepsilon\rho} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_\odot}} = \sqrt{0.91^3}\; T_{\Gamma\eta} = 0.87$ έτη.

(γ) $v_\infty = |\vec{v}_{\alpha\sigma\tau\varepsilon\rho} - \vec{v}_{\Gamma\eta}|$. Όταν τέμνονται τα επίπεδα η γωνία μεταξύ των ταχυτήτων $\vec{v}_{\alpha\sigma\tau\varepsilon\rho}$ και $\vec{v}_{\Gamma\eta}$ είναι $i = 11.6$ μοίρες, άρα

$v_\infty = \sqrt{v_{\alpha\sigma\tau\varepsilon\rho}^2 + v_{\Gamma\eta}^2 - 2 v_{\alpha\sigma\tau\varepsilon\rho} v_{\Gamma\eta} \cos i} = 6.4$ km/s.

(δ) $\frac{mv_\infty^2}{2} + 0 = \frac{mv_{\sigma\chi\varepsilon\tau}^2}{2} - \frac{GM_\oplus m}{r_0} \Leftrightarrow v_{\sigma\chi\varepsilon\tau} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM_\oplus}{r_0}} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM_\odot/333000}{0.000228\ a_\oplus}} = \sqrt{6.4^2 + \frac{2 \times 30^2}{333000 \times 0.000228}}$ km/s $= 8$ km/s.

(ε) $\frac{mv_\infty^2}{2} + 0 = \frac{mv_{\sigma\chi\varepsilon\tau}^2}{2} - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} \Leftrightarrow v_{\sigma\chi\varepsilon\tau} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}} = \sqrt{6.4^2 + 11.2^2}$ km/s $=$ 12.9 km/s.

Η ενέργειά του είναι $\frac{mv_{\sigma\chi\varepsilon\tau}^2}{2} = \frac{1.8 \times 10^8 \times 12900^2}{2}$ J $= 1.5 \times 10^{16}$ J, οπότε η σύγκρουση του αστεροειδούς θα ισοδυναμούσε με έκρηξη $\frac{1.5 \times 10^{16}}{4.184 \times 10^{15}} =$ 3.5 μεγατόνων TNT.

Θέμα 4$^\text{ο}$:

(α) $m_1 \vec{R}_1|_{t=0} + m_2 \vec{R}_2|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow \vec{R}_2|_{t=0} = \frac{a}{\lambda}\hat{X}$.

$m_1 \vec{V}_1|_{t=0} + m_2 \vec{V}_2|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow \vec{V}_2|_{t=0} = \frac{\beta}{\lambda}\sqrt{\frac{Gm}{a}}\hat{Y}$.

(β) Για αυτές τις θέσεις και ταχύτητες το κέντρο μάζας είναι ακίνητο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

(β$_1$) Το m_1 εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας a και το m_2 εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας a/λ γύρω από το ακίνητο κέντρο μάζας. Η απόσταση μεταξύ τους είναι $a + a/\lambda$. Άρα για το m_1:
$\frac{m_1 V_1^2}{a} = \frac{Gm_1 m_2}{(a + a/\lambda)^2} \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{\lambda^3}{(1+\lambda)^2}$. (Το ίδιο προκύπτει και από τη σχέση $\frac{m_2 V_2^2}{a/\lambda} = \frac{Gm_1 m_2}{(a + a/\lambda)^2}$ για το m_2.)

(β$_2$) Η συνολική ενέργεια πρέπει να είναι θετική, δηλ. $\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} - \frac{Gm_1 m_2}{r} \geq 0 \Leftrightarrow$
$\frac{m\beta^2 Gm}{2a} + \frac{\lambda m \beta^2 Gm}{2\lambda^2 a} - \frac{Gm\lambda m}{a + a/\lambda} \geq 0 \Leftrightarrow$
$\beta^2 \geq \frac{2\lambda^3}{(1+\lambda)^2}$.

Όταν $\beta^2 = \frac{2\lambda^3}{(1+\lambda)^2}$ η ολική ενέργεια είναι μηδέν και τα αστέρια φτάνουν στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα, ακολουθώντας παραβολικές τροχιές. Αν $\beta^2 > \frac{2\lambda^3}{(1+\lambda)^2}$ φτάνουν στο άπειρο ακολουθώντας υπερβολικές τροχιές (και έχουν πεπερασμένη ταχύτητα εκεί), ενώ αν $\beta^2 < \frac{2\lambda^3}{(1+\lambda)^2}$ εκτελούν ελλειπτικές τροχιές γύρω από το κέντρο μάζας (οι κυκλικές τροχιές είναι υποπερίπτωση).