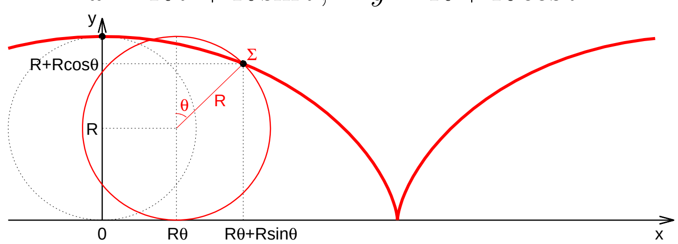
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 3 Δεκεμβρίου 2012
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

Ένα σημείο Σ στην περιφέρεια ενός τροχού που κυλάει χωρίς να γλιστράει διαγράφει την καμπύλη του σχήματος, που λέγεται κυκλοειδής και έχει εξίσωση

$$x = R\theta + R\sin\theta, \qquad y = R + R\cos\theta.$$



(α) Έστω ο τροχός περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και το Σ βρίσκεται αρχικά στο ανώτερο σημείο, δηλ. $\theta = \omega t$. Θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση του Σ μέχρι το κατώτερο σημείο $\theta = \pi$.
(α$_1$) Βρείτε την ταχύτητα και επιτάχυνση του σημείου Σ σε κάθε χρόνο, καθώς και τα μέτρα αυτών.
(α$_2$) Βρείτε την επιτρόχια και κεντρομόλο συνιστώσα της επιτάχυνσης σε κάθε χρόνο, καθώς και τα μοναδιαία $\hat{t}$, $\hat{n}$ πάνω και κάθετα στην τροχιά.
(α$_3$) Βρείτε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του Σ στην ανώτερη θέση.
(α$_4$) Πόσο μήκος διανύει το σημείο Σ από την ανώτερη μέχρι την κατώτερη θέση;
(β) Έστω ότι στο σημείο Σ υπάρχει μία σημειακή μάζα m και ο υπόλοιπος τροχός θεωρείται αβαρής. Αρχικά η μάζα βρίσκεται στη θέση $\theta_0 \in (-\pi, \pi)$ και ο τροχός έχει γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}|_{t=0} = \omega_0 > 0$. Ο τροχός κυλάει χωρίς να γλιστράει, οπότε το Σ διαγράφει πάλι την κυκλοειδή καμπύλη. Λόγω όμως του βαρυτικού πεδίου $\vec{g} = -g\hat{y}$ (κανείς άλλος δεν επεμβαίνει στο σύστημα) η γωνιακή ταχύτητα του τροχού δεν θα παραμείνει σταθερή.
(β$_1$) Από την διατήρηση της ολικής ενέργειας βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού σε κάθε θέση.
(β$_2$) Διερευνήστε πότε η κίνηση είναι περατωμένη.
(β$_3$) Αν αρχικά η γωνιακή ταχύτητα του τροχού είναι $\dot{\theta}|_{t=0} = \omega_0 > 0$ και το σώμα βρίσκεται στην ανώτερη θέση $\theta_0 = 0$, σε πόσο χρόνο θα φτάσει στην κατώτερη θέση $\theta = \pi$;

Δίνονται: $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$,

$\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = \cos^2\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2}$,

$\displaystyle\int \frac{\cos\xi\, d\xi}{\sqrt{1 + k^2\sin^2\xi}} = \frac{1}{k}\text{arcsinh}(k\sin\xi) +$ σταθερά.

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

Σωμάτιο μάζας m και φορτίου q μπορεί να κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο άλλων ίσων φορτίων που κρατούνται ακίνητα στα σημεία $x = \pm d$ άξονα $x'Ox$. Ποια η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων του m γύρω από τη θέση $x = 0$;
Αν το σωμάτιο m είναι ελεύθερο να κινηθεί και σε άλλες κατευθύνσεις εκτός του άξονα $x'Ox$, θα είναι ευσταθής η ισορροπία του στο $x = y = z = 0$; (Εξετάστε τη φορά της ολικής δύναμης σε μια μετατοπισμένη θέση.)
Η δύναμη Coulomb από φορτίο Α σε φορτίο Β είναι $\dfrac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}$, όπου r_{AB} η απόσταση των φορτίων και $\hat{r}_{AB}$ η διανυσματική μονάδα από το Α στο Β.

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

Οριζόντιος λείος δίσκος περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_i. Στο κέντρο του βρίσκεται άνθρωπος Α που κρατά μέσω αβαρούς, μη εκτατού νήματος μήκους r_i μάζα m, η οποία ακουμπά πάνω στο δίσκο και περιστρέφεται μαζί του, με γωνιακή ταχύτητα ω_i. Ο άνθρωπος τραβάει τη μάζα ώστε το μήκος του νήματος να γίνει $r_f (< r_i)$.
(α) Γράψτε το νόμο Νεύτωνα (τριβές δεν υπάρχουν). Δείξτε ότι η $\hat{\phi}$ συνιστώσα οδηγεί σε ολοκλήρωμα. Από την $\hat{r}$ συνιστώσα και χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα, βρείτε τη δύναμη που ασκεί ο άνθρωπος σαν συνάρτηση της $r(t)$.
(β) Ποια θα είναι η ενέργεια της μάζας όταν το μήκος του νήματος γίνει r_f, ως προς αδρανειακό παρατηρητή που βλέπει το δίσκο να περιστρέφεται;
(γ) Δείξτε ότι η αύξηση της ενέργειας E είναι ίση με το έργο της δύναμης του ανθρώπου.
(δ) Ποιες υποθετικές δυνάμεις «βλέπει» ο περιστρεφόμενος παρατηρητής Α να ασκούνται στη μάζα m; Χωρίς να κάνετε πράξεις, πείτε πως τροποποιούν τις μεταβολές ενέργειας και στροφορμής που βλέπει ο παρατηρητής αυτός σε σχέση με τον αδρανειακό.
Δίνονται οι γενικές σχέσεις $\vec{v}_\sigma = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_0 - \vec{\omega} \times \vec{r}$,
$\vec{a}_\sigma = \dfrac{\Sigma\vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ και η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες
$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d(r^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi}$.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α_1) Με $\theta = \omega t$ οι παραγωγίσεις δίνουν

$\dot x = \dot\theta R(1+\cos\theta) = 2\omega R\cos^2\frac{\omega t}{2}$,

$\dot y = -\dot\theta R\sin\theta = -2\omega R\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}$.

Άρα $\vec v = 2\omega R\cos\frac{\omega t}{2}\left(\cos\frac{\omega t}{2}\hat x - \sin\frac{\omega t}{2}\hat y\right)$ και

$|\vec v| = 2\omega R\left|\cos\frac{\omega t}{2}\right| = 2\omega R\cos\frac{\omega t}{2}$.

$\ddot x = -2\omega^2 R\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2} = -\omega^2 R\sin(\omega t)$,

$\ddot y = -2\omega^2 R\left(\cos^2\frac{\omega t}{2} - \sin^2\frac{\omega t}{2}\right) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$.

Άρα $\vec a = \omega^2 R\,[-\sin(\omega t)\hat x - \cos(\omega t)\hat y]$ και

$|\vec a| = \omega^2 R$.

(α_2) $\hat t = \frac{\vec v}{|\vec v|} = \cos\frac{\omega t}{2}\hat x - \sin\frac{\omega t}{2}\hat y$.

Η επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι $\vec a_\varepsilon = \left(\vec a\cdot\hat t\right)\hat t = -\omega^2 R\left[\sin(\omega t)\cos\frac{\omega t}{2} - \cos(\omega t)\sin\frac{\omega t}{2}\right]\hat t$ $= -\omega^2 R\sin\frac{\omega t}{2}\hat t$.

Αλλιώς από $\vec a_\varepsilon = \frac{d|\vec v|}{dt}\hat t$.

Η κεντρομόλος συνιστώσα είναι $\vec a_\kappa = \vec a - \vec a_\varepsilon = \omega^2 R\cos\frac{\omega t}{2}\left(-\sin\frac{\omega t}{2}\hat x - \cos\frac{\omega t}{2}\hat y\right)$.

Αλλιώς από $\vec a_\kappa = \left(\hat t\times\vec a\right)\times\hat t$.

$\hat n = \frac{\vec a_\kappa}{|\vec a_\kappa|} = -\sin\frac{\omega t}{2}\hat x - \cos\frac{\omega t}{2}\hat y$.

Αλλιώς από $\hat n = \hat t\times\hat z$.

(α_3) $|\vec a_\kappa| = \frac{v^2}{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \mathcal{R} = 4R\cos\frac{\omega t}{2}$. Στο ανώτερο σημείο ($\theta = 0$, $t = 0$) είναι $\mathcal{R} = 4R$.

(α_4) Στην ανώτερη θέση $\theta = 0$, $t = 0$ και στην κατώτερη $\theta = \pi$, $t = \pi/\omega$. Το μήκος είναι $\int_0^{\pi/\omega}|\vec v|dt = \int_0^{\pi/\omega}2\omega R\cos\frac{\omega t}{2}dt = 4R$.

(β_1) Τώρα είναι $\dot x = \dot\theta R(1+\cos\theta) = 2\omega R\cos^2\frac{\theta}{2}$ και $\dot y = -\dot\theta R\sin\theta = -2\omega R\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, με το ω συνάρτηση του χρόνου.

Η κινητική ενέργεια είναι $\frac{mv^2}{2} = \frac{m(\dot x^2+\dot y^2)}{2} = 2mR^2\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}$ και η δυναμική $V(\theta) = mgy = 2mgR\cos^2\frac{\theta}{2}$. Η ολική ενέργεια $2mR^2\left(\omega^2+\frac{g}{R}\right)\cos^2\frac{\theta}{2}$ είναι σταθερή και ίση με την αρχική τιμή της $E = 2mR^2\left(\omega_0^2+\frac{g}{R}\right)\cos^2\frac{\theta_0}{2}$.

Έτσι προκύπτει το ολοκλήρωμα ενέργειας

$$\left(\omega^2+\frac{g}{R}\right)\cos^2\frac{\theta}{2} = \left(\omega_0^2+\frac{g}{R}\right)\cos^2\frac{\theta_0}{2}$$

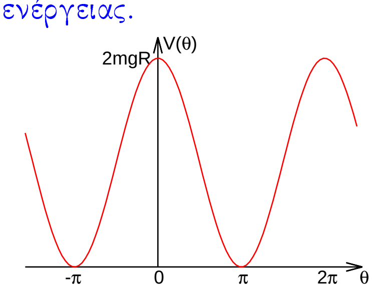
και η γωνιακή ταχύτητα σε κάθε θέση

$$\omega = \pm\sqrt{\left(\omega_0^2+\frac{g}{R}\right)\left(\cos^2\frac{\theta_0}{2}\ \Big/\ \cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \frac{g}{R}}.$$

($\omega > 0$ αν ο τροχός κινείται προς μεγαλύτερα x.)

(β_2) Τα όρια της τροχιάς βρίσκονται από $V(\theta) \le E \Leftrightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} \le \left(\frac{R\omega_0^2}{g}+1\right)\cos^2\frac{\theta_0}{2}$. Αν η ανισότητα δεν ισχύει στην ανώτερη θέση $\theta = 0$, δηλ. αν $\frac{R\omega_0^2}{g} < \tan^2\frac{\theta_0}{2}$, η κίνηση είναι περατωμένη. Αν $\frac{R\omega_0^2}{g} > \tan^2\frac{\theta_0}{2}$ το σώμα περνά από την ανώτερη θέση με πεπερασμένη ταχύτητα και η κίνηση δεν είναι περατωμένη. Στην οριακή περίπτωση $\frac{R\omega_0^2}{g} = \tan^2\frac{\theta_0}{2}$ το σώμα θα πλησιάζει την ανώτερη θέση και θα χρειαστεί θεωρητικά άπειρο χρόνο να φτάσει εκεί (η κίνηση είναι περατωμένη).

Τα ίδια προκύπτουν και από τη γραφική μελέτη της δυναμικής ενέργειας.



Για $E \le 2mgR \Leftrightarrow \frac{R\omega_0^2}{g} \le \tan^2\frac{\theta_0}{2}$ η κίνηση είναι περατωμένη, ενώ για $E > 2mgR \Leftrightarrow \frac{R\omega_0^2}{g} > \tan^2\frac{\theta_0}{2}$ δεν είναι.

(β_3) Με $\omega = \dot\theta$ και $\theta_0 = 0$ το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει (για $\dot\theta > 0$ και $0 \le \theta \le \pi \Leftrightarrow \cos\frac{\theta}{2} \ge 0$),

$$\dot\theta = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{g}{R}\sin^2\frac{\theta}{2}}\ \Big/\ \cos\frac{\theta}{2}.$$

Ο ζητούμενος χρόνος είναι $t = \int_0^t dt = \int_0^\pi\frac{d\theta}{\dot\theta} = \int_0^\pi\frac{\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{\omega_0^2+\frac{g}{R}\sin^2\frac{\theta}{2}}}$. Χρησιμοποιώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα με $\xi = \frac{\theta}{2}$ και $k = \sqrt{\frac{g}{R\omega_0^2}}$,

$$t = \frac{2}{\omega_0}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\xi\,d\xi}{\sqrt{1+k^2\sin^2\xi}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\,\mathrm{arcsinh}\sqrt{\frac{g}{R\omega_0^2}}.$$

Γενικότερα, ακόμα και αν η αρχική θέση δεν είναι η ανώτερη (δηλ. αν $\theta_0 \neq 0$), το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει

$$\dot\theta = \frac{\sqrt{\omega_0^2\cos^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{g}{R}\cos^2\frac{\theta_0}{2} - \frac{g}{R}\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

(η τροχιά είναι άρτια και περιοδική, οπότε αρκεί να μελετηθεί η περιοχή $-\pi < \theta < \pi$ για κίνηση με $\dot\theta > 0$). Η παραπάνω είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, η οποία δίνει

$$\int_0^t dt = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{\omega_0^2\cos^2\frac{\theta_0}{2} - \frac{g}{R}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{g}{R}\sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Για μη-περατωμένη κίνηση $\omega_0^2\cos^2\frac{\theta_0}{2} > \frac{g}{R}\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ το δεξί μέλος ανάγεται στο δοσμένο ολοκλήρωμα με $\xi = \frac{\theta}{2}$ και $k = \left(\frac{R\omega_0^2}{g}\cos^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)^{-1/2}$.
Συγκεκριμένα προκύπτει

$$t = 2k\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\theta_0/2}^{\theta/2}\frac{\cos\xi\,d\xi}{\sqrt{1+k^2\sin^2\xi}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{R}{g}}\left[\operatorname{arcsinh}\left(k\sin\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{arcsinh}\left(k\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\right].$$

Για περατωμένη κίνηση $\omega_0^2\cos^2\frac{\theta_0}{2} < \frac{g}{R}\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ η σχέση χρόνου–θέσης μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα

$$\int\frac{\cos\xi\,d\xi}{\sqrt{-1+k^2\sin^2\xi}} = \frac{\sin\xi}{|k\sin\xi|}\operatorname{arccosh}|k\sin\xi| + \text{σταθ.}$$

Με $k = \left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \frac{R\omega_0^2}{g}\cos^2\frac{\theta_0}{2}\right)^{-1/2}$ και $\xi = \frac{\theta}{2}$ προκύπτει $t = 2k\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\theta_0/2}^{\theta/2}\frac{\cos\xi\,d\xi}{\sqrt{-1+k^2\sin^2\xi}}$

$$= 2\sqrt{\frac{R}{g}}\left|\operatorname{arccosh}\left|k\sin\frac{\theta}{2}\right| - \operatorname{arccosh}\left|k\sin\frac{\theta_0}{2}\right|\right|.$$

Στην ακραία θέση της τροχιάς η γωνία είναι θ_m με $\left|\sin\frac{\theta_m}{2}\right| = \frac{1}{k}$. Η περίοδος της κίνησης είναι (χωρίς βλάβη γενικότητας θεωρώ $\theta_m \in (0,\pi)$)

$$4\times 2k\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\theta_m/2}^{\pi/2}\frac{\cos\xi\,d\xi}{\sqrt{-1+k^2\sin^2\xi}} = 8\sqrt{\frac{R}{g}}\operatorname{arccosh}k.$$

Στην οριακή περίπτωση $\omega_0^2\cos^2\frac{\theta_0}{2} = \frac{g}{R}\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ προκύπτει $t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\left|\ln\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}\right|$. (Το σώμα φτάνει στην ανώτερη θέση σε θεωρητικά άπειρο χρόνο.)

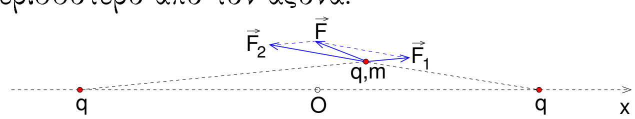
Θέμα 2^o:

Αν το σωμάτιο είναι στη θέση $x \in (-d,d)$ δέχεται δύναμη $\vec F_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(d+x)^2}\hat x$ από το φορτίο στη θέση $x = -d$ και $\vec F_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(d-x)^2}(-\hat x)$ από το φορτίο στη θέση $x = d$. Η συνολική δύναμη είναι $\vec F = F(x)\hat x$ με $F(x) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(d+x)^2} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(d-x)^2}$. Η δύναμη μηδενίζεται για $x = 0$, οπότε αυτό είναι σημείο ισορροπίας. Για μικρές ταλαντώσεις $|x| \ll d$ είναι $F(x) \approx F|_{x=0} + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=0} x = -\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 d^3}x$, οπότε η εξίσωση κίνησης γράφεται $\ddot x + \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 d^3 m}x = 0$.

Είναι $\omega^2 = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 d^3 m}$ και $T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{4\pi^3\varepsilon_0 d^3 m}{q^2}}$.

Η μελέτη μπορεί να γίνει και με βάση τη δυναμική ενέργεια $V(x) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(d+x)} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(d-x)} = \frac{q^2 d}{2\pi\varepsilon_0(d^2-x^2)}$. Είναι $\omega^2 = \frac{1}{m}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Αν το σωμάτιο m κινηθεί εκτός του άξονα x, η συνισταμένη των δυνάμεων τείνει να το απομακρύνει περισσότερο από τον άξονα.



Άρα η ισορροπία είναι ασταθής.

Η απάντηση μπορεί να δοθεί και μέσω της δυναμικής ενέργειας $V(x,y,z) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(d+x)^2+y^2+z^2}} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(d-x)^2+y^2+z^2}}$. Οι παράγωγοι $\left.\frac{\partial^2V}{\partial y^2}\right|_{x=y=z=0}$, $\left.\frac{\partial^2V}{\partial z^2}\right|_{x=y=z=0}$ προκύπτουν αρνητικές.

Θέμα 3^o:

(α) Στο αδρανειακό σύστημα $m\vec a = \vec F$ (το βάρος και η αντίδραση από το δίσκο εξουδετερνώνονται). Σε πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο του δίσκου, με αρχή το κέντρο του, η $\hat\phi$ συνιστώσα $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\phi\right) = 0$ δίνει το ολοκλήρωμα της στροφορμής $mr^2\dot\phi = L =$ σταθερό. Η τιμή της $L = mr_i^2\omega_i$ από αρχικές συνθήκες.

Η $\hat r$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m(\ddot r - r\dot\phi^2) = F(r)$ δίνει (χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα στροφορμής $\dot\phi = L/mr^2$), $F(r) = m\ddot r - \dfrac{L^2}{mr^3}$.

(β) Από διατήρηση στροφορμής η τελική γωνιακή ταχύτητα θα είναι $\dot\phi_f = L/mr_f^2$. Η τελική ταχύτητα είναι $\vec v_f = r_f\dot\phi_f\hat\phi = (L/mr_f)\hat\phi$ και η ενέργεια $E = \dfrac{mv_f^2}{2} = \dfrac{L^2}{2mr_f^2}$.

(γ) Η αρχική ενέργεια είναι $\dfrac{m\omega_i^2 r_i^2}{2} = \dfrac{L^2}{2mr_i^2}$. Άρα η αύξηση ενέργειας είναι $\Delta E = \dfrac{L^2}{2mr_f^2} - \dfrac{L^2}{2mr_i^2}$.

$W = \int_{r_i}^{r_f} F(r)dr = \int_{r_i}^{r_f} m\ddot r dr - \int_{r_i}^{r_f}\dfrac{L^2}{mr^3}dr$.

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται διότι $m\ddot r dr = m\dot r\ddot r dt = d\dfrac{m\dot r^2}{2}$ και η ακτινική ταχύτητα $\dot r$ είναι μηδέν στην αρχική και τελική κατάσταση.

Έτσι $W = \left[\dfrac{L^2}{2mr^2}\right]_{r_i}^{r_f} = \Delta E$.

(δ) Στο περιστρεφόμενο σύστημα του δίσκου (περιστρέφεται με $\vec\omega = \omega_i\hat z$) οι υποθετικές δυνάμεις είναι η φυγόκεντρος $-m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) = -m\omega_i^2 r\hat z\times(\hat z\times\hat r) = m\omega_i^2 r\hat r$ και η Coriolis $-2m\vec\omega\times\vec v_\sigma = -2m\omega_i\hat z\times(\dot r\hat r + r\dot\phi_\sigma\hat\phi) = 2m\omega_i r\dot\phi_\sigma\hat r - 2m\omega_i\dot r\hat\phi$, όπου (r, ϕ_σ) οι πολικές συντεταγμένες στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με αρχή τον A.

Η αύξηση της ενέργειας που βλέπει ο περιστρεφόμενος παρατηρητής οφείλεται στο έργο της δύναμης του ανθρώπου, αλλά και στο έργο της φυγόκεντρου (η Coriolis δεν παράγει έργο αφού είναι κάθετη στην ταχύτητα). Λόγω του έργου της φυγόκεντρου, που είναι αρνητικό, η αύξηση ενέργειας που θα βλέπει ο περιστρεφόμενος παρατηρητής θα είναι μικρότερη από αυτή που βλέπει ο αδρανειακός.

Για τον περιστρεφόμενο παρατηρητή η αρχική ενέργεια της μάζας είναι μηδέν. Η τελική της ταχύτητα είναι $\vec v_\sigma = \vec v_\alpha - \vec\omega\times\vec r = \dfrac{L}{mr_f}\hat\phi - \omega_i r_f\hat\phi$ (αλλιώς από $\phi_\sigma = \phi - \omega_i t \Rightarrow \dot\phi_\sigma = \dot\phi - \omega_i \Leftrightarrow v_\sigma = r_f\dot\phi - r_f\omega_i = L/mr_f - r_f\omega_i$).

Η τελική ενέργεια είναι $\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{L}{mr_f} - \omega_i r_f\right)^2 = \dfrac{L^2}{2mr_f^2}\left(1 - \dfrac{r_f^2}{r_i^2}\right)^2 = \Delta E - \dfrac{L^2}{2mr_i^2}\left(1 - \dfrac{r_f^2}{r_i^2}\right) < \Delta E$.

Η διαφορά είναι το έργο της φυγόκεντρου $\int_{r_i}^{r_f} m\omega_i^2 r dr = -\dfrac{L^2}{2mr_i^2}\left(1 - \dfrac{r_f^2}{r_i^2}\right)$.

Ο περιστρεφόμενος παρατηρητής βλέπει τη στροφορμή της μάζας να αυξάνεται (αρχικά ήταν μηδέν) λόγω της ροπής της Coriolis. (Οι άλλες δυνάμεις δεν έχουν ροπή ως προς το κέντρο του δίσκου.)

Είναι $\dfrac{d(mr^2\dot\phi_\sigma)}{dt} = \dfrac{d\left[mr^2(\dot\phi - \omega_i)\right]}{dt} = \dfrac{d(mr^2\dot\phi)}{dt} - \dfrac{d(mr^2\omega_i)}{dt} = -\dfrac{d(mr^2\omega_i)}{dt} = -2mr\dot r\omega_i$, ίσο με τη ροπή της Coriolis (η οποία έχει μόνο $\hat z$ συνιστώσα) $\left[\vec r\times\left(2m\omega_i r\dot\phi_\sigma\hat r - 2m\omega_i\dot r\hat\phi\right)\right]\cdot\hat z$.

Η μελέτη θα μπορούσε από την αρχή να γίνει στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς όπου ο νόμος Νεύτωνα γράφεται

$m\vec a_\sigma = F(r)\hat r + m\omega_i^2 r\hat r + 2m\omega_i r\dot\phi_\sigma\hat r - 2m\omega_i\dot r\hat\phi$.

(α) Η $\hat\phi$-συνιστώσα του νόμου του Νεύτωνα δίνει $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot\phi_\sigma\right) = -2\omega_i\dot r \Leftrightarrow (\omega_i + \dot\phi_\sigma)r^2 = \dfrac{L}{m} = \omega_i r_i^2$.

Η $\hat r$-συνιστώσα δίνει $m(\ddot r - r\dot\phi_\sigma^2) = F(r) + m\omega_i^2 r + 2m\omega_i r\dot\phi_\sigma$. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα της $\hat\phi$-συνιστώσας $(\omega_i + \dot\phi_\sigma)r^2 = \dfrac{L}{m}$ βρίσκουμε $m\ddot r = F(r) + \dfrac{L^2}{mr^3} \Leftrightarrow F(r) = m\ddot r - \dfrac{L^2}{mr^3}$.

(β) Από το ολοκλήρωμα, η τελική γωνιακή ταχύτητα ως προς το δίσκο είναι $\dot\phi_{\sigma,f} = \omega_i\left(\dfrac{r_i^2}{r_f^2} - 1\right)$.

Η τελική ταχύτητα στο περιστρεφόμενο σύστημα είναι $\vec v_\sigma = r_f\dot\phi_{\sigma,f}\hat\phi = r_f\omega_i\left(\dfrac{r_i^2}{r_f^2} - 1\right)\hat\phi$.

Στο αδρανειακό σύστημα $\vec v_\alpha = \vec v_\sigma + \vec\omega\times\vec r = (v_\sigma + \omega_i r_f)\hat\phi = \omega_i\dfrac{r_i^2}{r_f}\hat\phi$ και $E = \dfrac{mv_\alpha^2}{2} = \dfrac{L^2}{2mr_f^2}$.

Τα (γ), (δ) όμοια με πριν.