Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 24 Σεπτεμβρίου 2012
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 19 Δεκεμβρίου 2011: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐ 13η ☐

Θέμα 1ο:

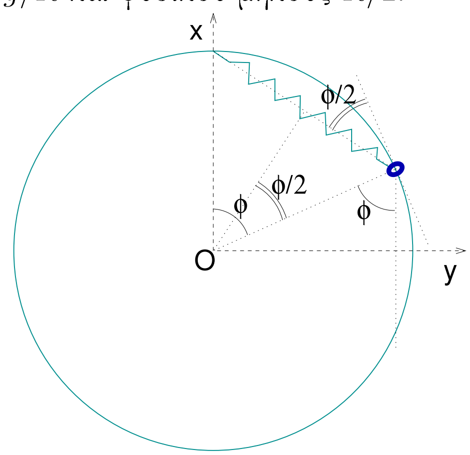
(α) Σώμα μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση δύναμης αντίστασης ανάλογης του τετραγώνου της ταχύτητας, $F = -bv^2$. Αν αρχικά ($t = 0$) έχει ταχύτητα v_0 βρείτε την ταχύτητα και τη θέση του σώματος σε κάθε χρόνο.

(β) Βρείτε την ταχύτητα σε κάθε χρόνο αν η αντίσταση έχει ένα μέρος ανάλογο της ταχύτητας και ένα μέρος ανάλογο του τετραγώνου της, δηλ. είναι $F = -av - bv^2$ (η αρχική ταχύτητα είναι v_0).
(Δίνεται $\dfrac{1}{av+bv^2} = \dfrac{1/a}{v} - \dfrac{b/a}{a+bv}$.)
Καταλήγει το αποτέλεσμα στην απάντηση του ερωτήματος (α) αν $a = 0$;
Μηδενίζεται η ταχύτητα σε κάποιο χρόνο; Αν ναι, πόσο διάστημα διανύει το σώμα πριν σταματήσει;

(γ) Σχεδιάστε τα γραφήματα $v = v(t)$ και για τις δύο περιπτώσεις, στο ίδιο διάγραμμα. Όμοια τα γραφήματα $x = x(t)$.

Θέμα 2ο:

Σώμα μάζας m κινείται σε περιφέρεια σταθερής, λείας, κατακόρυφης στεφάνης ακτίνας R μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της γης $\vec{g}$. Το σώμα είναι συνδεδεμένο με το ανώτερο σημείο της στεφάνης μέσω ελατηρίου σταθεράς $k = 2mg/R$ και φυσικού μήκους $R/2$.



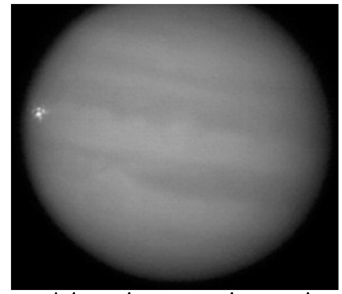
(α) Δείξτε με έναν από τους ακόλουθους δύο τρόπους ότι η εξίσωση κίνησης στις πολικές συντεταγμένες του σχήματος, με $0 < \phi < 2\pi$, είναι $\ddot{\phi} = f(\phi)$ με «δύναμη» $f(\phi) = \dfrac{2g}{R}\left(\dfrac{1}{2} - \sin\dfrac{\phi}{2}\right)\cos\dfrac{\phi}{2}$.

($α_1$) Από τη $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα. (Δίνονται $\vec{a} = R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{\varpi}$, $\sin\phi = 2\sin\dfrac{\phi}{2}\cos\dfrac{\phi}{2}$.)

($α_2$) Παραγωγίζοντας το ολοκλήρωμα ενέργειας.

(β) Δείξτε ότι η $\phi_0 = \pi/3$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας και βρείτε την περίοδο μικρών ταλαντώσεων γύρω από αυτό.

Θέμα 3ο:



Σύμφωνα με τα νέα, κατά τις πρώτες πρωινές ώρες της 10ης Σεπτεμβρίου 2012 (11:35 UT) παρατηρήθηκαν από ερασιτέχνες αστρονόμους παράξενες συνεχείς αναλαμπές στο γιγαντιαίο πλανήτη Δία. Επειδή προγενέστερα γεγονότα δείχνουν ότι ο Δίας είναι συχνά «στόχος» αστεροειδών και κομητών (διαθέτοντας ισχυρή βαρυτική έλξη και μεγάλο όγκο), η πρώτη εξήγηση που δόθηκε ήταν ότι κάποιος αστεροειδής ή μικρός παγωμένος κομήτης χτύπησε το Δία.

Σε αυτή την άσκηση θέλουμε να διερευνήσουμε αν οι παλιρροιακές δυνάμεις του Δία πάνω σε ένα σώμα που τον πλησιάζει, μπορούν να το θρυμματίσουν, έτσι ώστε ο Δίας να το καταβροχθίσει σιγά-σιγά σε μικρότερα κομμάτια (ο Δίας είχε κληρονομήσει αυτό το «συνήθειο» από τον πατέρα του τον Κρόνο).

(α) Υπολογίστε το όριο του Roche, δηλ. την απόσταση D_0 στην οποία οι παλιρροιακές δυνάμεις του Δία θα υπερνικήσουν την ιδιοβαρύτητα του σώματος Σ που τον πλησιάζει. Το σώμα Σ θεωρείται σφαιρικό και ομογενές, με γνωστή μάζα (M_Σ) και ακτίνα (R_Σ). Επίσης γνωστή θεωρείται η μάζα (M_J) και η ακτίνα (R_J) του Δία.
Υπόδειξη: Υπολογίστε τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα μικρό μέρος του σώματος Σ, μάζας m, που βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα του Δία και του σώματος Σ.

Δείξτε ότι ο λόγος D_0/R_J εξαρτάται μόνο από το λόγο των πυκνοτήτων του Δία και του σώματος Σ.

(β) Έστω παρατηρούμε το σώμα να πέφτει στο Δία έχοντας πρώτα θρυμματιστεί. Τι νομίζετε ότι είναι, αστεροειδής ή κομήτης;
Δίνονται οι τυπικές τιμές της πυκνότητας για κομήτη $0.5\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$ και για αστεροειδή $2\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$. Η μάζα του Δία είναι $M_J = 10^{27}$ kg και η ακτίνα του $R_J = 70.000$ km, οπότε η πυκνότητά του είναι $\rho_J = 0.7\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$.

Θέμα 4ο:

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται εντός πεδίου ελκτικών κεντρικών δυνάμεων $F = -br^3$, $b > 0$. Η ενέργειά του είναι E και η στροφορμή του είναι L.

(α) Για ποιές τιμές των E και L, εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρω από την αρχή; Ποια η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω;

(β) Κάντε ένα ποιοτικό διάγραμμα του υποθετικού του δυναμικού V' σαν συνάρτηση του r και σημειώστε σε αυτό το διάγραμμα την ολική ενέργεια μιας κυκλικής τροχιάς.

(γ) Εάν το σωματίδιο διαταραχθεί ελαφρά από την κυκλική τροχιά του, ποιά είναι η περίοδος των μικρών ακτινικών ταλαντώσεων γύρω από αυτή;

(δ) Η απόσταση του σωματιδίου από το ελκτικό κέντρο μεταβάλλεται μεταξύ a και $2a$. Βρείτε το a για δεδομένη στροφορμή L.

<u>ΛΥΣΕΙΣ:</u>

<u>Θέμα 1ο:</u>

(α) Προφανώς η κίνηση είναι ευθύγραμμη, έστω στον άξονα x με αρχική θέση $x=0$.
$m\dfrac{dv}{dt}=-bv^2 \Leftrightarrow \displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=-\frac{b}{m}\int_0^t dt \Leftrightarrow$
$-\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{v_0}=-\dfrac{b}{m}t \Leftrightarrow v=\dfrac{v_0}{1+(bv_0/m)t}$.
$\displaystyle\int_0^x dx=\int_0^t vdt \Leftrightarrow x=\frac{m}{b}\ln\left(1+\frac{bv_0}{m}t\right)$.

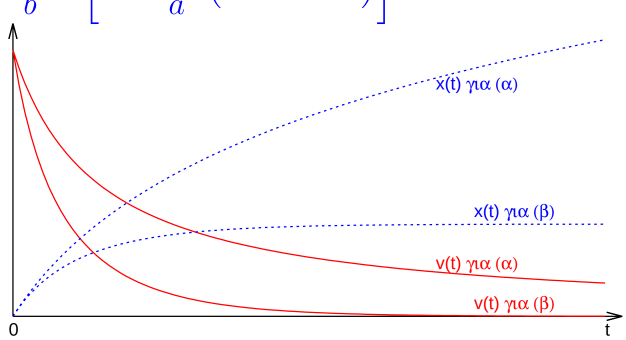
Το ίδιο από $m\dot{v}=-bv^2$ με $\dot{v}=v\dfrac{dv}{dx}$, οπότε $\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=-\frac{b}{m}\int_0^x dx \Leftrightarrow x=\frac{m}{b}\ln\frac{v_0}{v}$.

(β) $m\dfrac{dv}{dt}=-av-bv^2 \Leftrightarrow \displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{av+bv^2}=-\frac{1}{m}\int_0^t dt \Leftrightarrow \int_{v_0}^{v}\left(\frac{1/a}{v}-\frac{b/a}{a+bv}\right)dv=-\frac{t}{m} \Leftrightarrow$
$\ln\dfrac{v}{v_0}-\ln\dfrac{a+bv}{a+bv_0}=-\dfrac{at}{m} \Leftrightarrow \dfrac{v}{v_0}\dfrac{a+bv_0}{a+bv}=e^{-at/m} \Leftrightarrow v=\dfrac{a}{(b+a/v_0)e^{at/m}-b}$.

Για $a=0$ η έκφραση δίνει $0/0$. Με κανόνα l'Hôspital (παραγωγίζοντας ως προς a αριθμητή και παρονομαστή και μετά θέτοντας $a=0$) βρίσκουμε την απάντηση του (α) ερωτήματος.
Η ταχύτητα πρακτικά μηδενίζεται όταν $e^{at/m}\gg 1 \Leftrightarrow at/m\sim 5 \Leftrightarrow t\sim 5m/a$.
Η σχέση ταχύτητας–θέσης μπορεί να βρεθεί από $m\dot{v}=-av-bv^2$ με $\dot{v}=v\dfrac{dv}{dx}$. Έτσι προκύπτει $\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{a+bv}=-\frac{1}{m}\int_0^x dx \Leftrightarrow x=\frac{m}{b}\ln\frac{a+bv_0}{a+bv}$.
Για $v=0$ είναι $x=\dfrac{m}{b}\ln\left(1+\dfrac{bv_0}{a}\right)$.

Το ίδιο από $\displaystyle\int_0^x dx=\int_0^t vdt \Leftrightarrow$
$x=\dfrac{m}{b}\ln\left[1+\dfrac{bv_0}{a}\left(1-e^{-at/m}\right)\right]$, για $t\to\infty$.

(γ)



<u>Θέμα 2ο:</u>

(α₁) Το μήκος του ελατηρίου ℓ βρίσκεται από $\sin\dfrac{\phi}{2}=\dfrac{\ell/2}{R}\Leftrightarrow \ell=2R\sin\dfrac{\phi}{2}$. Άρα η προβολή της $\vec{F}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}$ στη διεύθυνση $\hat{\phi}$ είναι $-k\left(\ell-\dfrac{R}{2}\right)\cos\dfrac{\phi}{2}=-2mg\left(2\sin\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\cos\dfrac{\phi}{2}$. Η προβολή του βάρους στη διεύθυνση $\hat{\phi}$ είναι $mg\sin\phi=2mg\sin\dfrac{\phi}{2}\cos\dfrac{\phi}{2}$.
Άρα $mR\ddot{\phi}=-2mg\left(2\sin\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\cos\dfrac{\phi}{2}+2mg\sin\dfrac{\phi}{2}\cos\dfrac{\phi}{2}\Leftrightarrow \ddot{\phi}=\dfrac{2g}{R}\left(\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{\phi}{2}\right)\cos\dfrac{\phi}{2}$.

(α₂) $V_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}=\dfrac{1}{2}k\left(\ell-\dfrac{R}{2}\right)^2=mgR\left(2\sin\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2$.
Θεωρώντας μηδενική βαρυτική δυναμική ενέργεια στο ύψος $x=0$ είναι $V_{\beta\alpha\rho}=mgR\cos\phi$ και άρα η συνολική δυναμική ενέργεια είναι $V=V_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}+V_{\beta\alpha\rho}=mgR\left(2\sin\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2+mgR\cos\phi$.
Η ταχύτητα $\vec{v}=R\dot{\phi}\hat{\phi}$, οπότε η κινητική ενέργεια $T=\dfrac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2$.
Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2+mgR\left(2\sin\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2+mgR\cos\phi=E$ και η παράγωγός του δίνει $\dot{\phi}\ddot{\phi}+\dfrac{2g}{R}\left(2\sin\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\cos\dfrac{\phi}{2}\ \dot{\phi}-\dfrac{g}{R}\sin\phi\ \dot{\phi}=0 \overset{\dot{\phi}\neq 0}{\Longleftrightarrow} \ddot{\phi}=\dfrac{2g}{R}\left(\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{\phi}{2}\right)\cos\dfrac{\phi}{2}$, χρησιμοποιώντας την $\sin\phi=2\sin\dfrac{\phi}{2}\cos\dfrac{\phi}{2}$.

(β) Η $\phi=\pi/3$ είναι σταθερή λύση της εξίσωσης κίνησης, άρα σημείο ισορροπίας.
Με $\phi=\dfrac{\pi}{3}+q$ και $|q|\ll 1$ η εξίσωση κίνησης γίνεται $\ddot{q}=f\left(\dfrac{\pi}{3}+q\right)\approx f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)q$. Είναι $f'(\phi)=\dfrac{2g}{R}\left(-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\phi}{2}\right)\cos\dfrac{\phi}{2}-\dfrac{g}{R}\left(\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{\phi}{2}\right)\sin\dfrac{\phi}{2}$. Επομένως $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$, $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{3g}{4R}$ και η εξίσωση κίνησης γίνεται $\ddot{q}+\dfrac{3g}{4R}q=0$. Αυτή είναι εξίσωση ταλαντωτή, οπότε η ισορροπία είναι ευσταθής, με $\omega^2=\dfrac{3g}{4R}$ και περίοδο $\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{4R}{3g}}$.

Θέμα 3^o:

(α) Έστω η μάζα m σε απόσταση r από το κέντρο του Σ, πάνω στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα Δία και σώματος Σ.

Η δύναμη που της ασκεί το σώμα Σ είναι $\dfrac{GM_{in}m}{r^2} = \dfrac{GM_\Sigma mr}{R_\Sigma^3}$, αφού η πυκνότητα είναι σταθερή και άρα $\dfrac{M_{in}}{M_\Sigma} = \dfrac{4\pi r^3/3}{4\pi R_\Sigma^3/3}$.

Η παλλιροιακή δύναμη είναι το γινόμενο της μάζας m με την διαφορά επιτάχυνσης βαρύτητας από το Δία μεταξύ της θέσης της m και του κέντρου του Σ, $m\left|\dfrac{GM_J}{(D_0 \pm r)^2} - \dfrac{GM_J}{D_0^2}\right| \approx \dfrac{2GM_Jmr}{D_0^3}$ αφού $r \ll D_0$.

Η μάζα θα κινηθεί όταν $\dfrac{2GM_Jmr}{D_0^3} = \dfrac{GmM_\Sigma r}{R_\Sigma^3} \Leftrightarrow$

$D_0 = \left(\dfrac{2M_J}{M_\Sigma}\right)^{1/3} R_\Sigma$.

Θέτοντας $M_J = \rho_J \dfrac{4\pi R_J^3}{3}$ και $M_\Sigma = \rho_\Sigma \dfrac{4\pi R_\Sigma^3}{3}$ έχουμε $\dfrac{D_0}{R_J} = \left(\dfrac{2\rho_J}{\rho_\Sigma}\right)^{1/3}$.

(β) Αφού το σώμα θρυμματίζεται πρέπει $D_0 > R_J$. Για κομήτη $D_0/R_J = (2.8)^{1/3} > 1$ ενώ για αστεροειδή $D_0/R_J = (0.7)^{1/3} < 1$. Άρα μπορεί να είναι κομήτης, αλλά όχι αστεροειδής.

Θέμα 4^o:

(α) $br_0^3 = \dfrac{mv_0^2}{r_0} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{br_0^4}{m}}$.

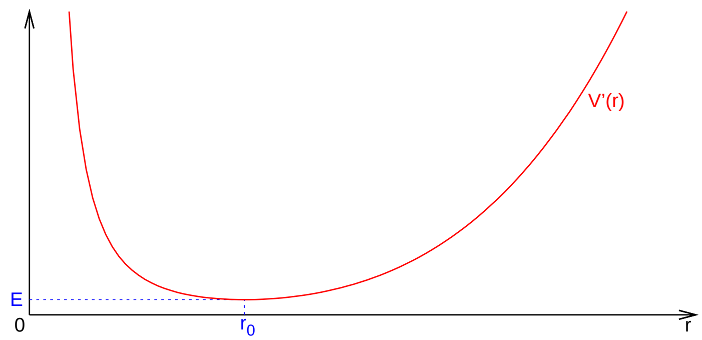
$L = mr_0v_0 = \sqrt{mbr_0^6}$.

$V(r) = -\int F dr = \dfrac{br^4}{4}$.

$E = \dfrac{mv_0^2}{2} + V(r_0) = \dfrac{3}{4}br_0^4$.

$\omega = \dfrac{v_0}{r_0} = \sqrt{\dfrac{br_0^2}{m}} \quad \left(\text{ή } \omega = \dfrac{L}{mr_0^2} = \sqrt{\dfrac{br_0^2}{m}}\right)$.

(β) $V' = V + \dfrac{L^2}{2mr^2} = \dfrac{br^4}{4} + \dfrac{br_0^6}{2r^2}$.



Η συνάρτηση $V'(r)$ έχει ελάχιστο στο $r = r_0$, ίσο με $V'(r_0) = E$.

(γ) $m\ddot{r} = -\dfrac{dV'}{dr} \approx -\left.\dfrac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r=r_0}(r - r_0)$.

Με $r = r_0 + x$, προκύπτει $\ddot{x} + \dfrac{6br_0^2}{m}x = 0$, εξίσωση ταλαντωτή με $\Omega = \sqrt{\dfrac{6br_0^2}{m}} = \sqrt{6}\,\omega$ και περίοδο $\dfrac{2\pi}{\Omega}$.

(δ) $V'(a) = V'(2a) \Leftrightarrow a = \dfrac{r_0}{10^{1/6}}$.