Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 6 Ιουλίου 2012
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, AM: _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 19 Δεκεμβρίου 2011: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐ 11η ☐ 12η ☐ 13η ☐

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

Φορτίο q κινείται κοντά σε ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους ο οποίος έχει φορτίο ανά μήκος λ και διαρρέεται από ρεύμα I. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες με τον αγωγό στον άξονα z το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο αγωγός είναι $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \varpi}\hat{\varpi}$ και $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\varpi}\hat{\phi}$.

(α) Δείξτε ότι οι $\hat{\phi}$ και $\hat{z}$ συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$ δίνουν τα ολοκληρώματα $m\varpi^2\dot{\phi} = L\,, \quad m\dot{z} - \dfrac{\mu_0 I q}{2\pi}\ln\varpi = p_z\,.$

(β) Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα αυτά γράψτε την $\hat{\varpi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα σαν $m\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ (η κίνηση ανάγεται σε «μονοδιάστατη»). Βρείτε το ολοκλήρωμα της ενέργειας για αυτή την κίνηση.

(γ) Δείξτε ότι λόγω του μαγνητικού πεδίου το φορτίο είναι υποχρεωμένο να κινείται κοντά στον αγωγό (δηλ. η απόσταση ϖ δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη κάποιας μέγιστης $\varpi_{\max}$), ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες, ακόμα και στην περίπτωση που το φορτίο είναι ομόσημο με το φορτίο του αγωγού ($\lambda q > 0$). Δείξτε επίσης ότι το φορτίο δεν μπορεί να συγκρουστεί με τον αγωγό, ακόμα και αν είναι ετερόσημο του φορτίου του ($\lambda q < 0$).

Δίνεται $\vec{a} = \left(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2\right)\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d}{dt}\left(\varpi^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}.$

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

Έστω το πεδίο δυνάμεων

$$\vec{F} = (ax + by^2)\hat{x} + (2bxy + az)\hat{y} + (ay + bz^2)\hat{z}\,.$$

(α) Είναι συντηρητικό;

(β) Υπολογίστε το έργο της $\vec{F}$ για μετακίνηση από το σημείο $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ στο $(x, y, z) = (c, 0, d)$.

(γ) Έστω ένα σώμα μάζας $m = 1$ βρίσκεται μέσα στο πεδίο της $\vec{F}$, για το οποίο ισχύει τώρα $a = 1$ και $b = 0$, δηλ. $\vec{F} = x\hat{x} + z\hat{y} + y\hat{z}$. Αν αρχικά (για $t = 0$) το σώμα είναι ακίνητο στο σημείο $(x, y, z) = (0, 0, 4)$, βρείτε τη θέση του σε κάθε χρόνο, βρείτε δηλ. τις $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.
Δίνεται ότι η γενική λύση της $\dfrac{d^4\xi}{dt^4} - \xi = 0$ είναι $\xi = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3\sin t + c_4\cos t$.

Θέμα 3^o:

Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα v_o από τη θέση r_o στο πεδίο της ελκτικής κεντρικής δύναμης

$$F(r) = -\,\frac{k}{r^3}\,, \quad k > 0\,,$$

με την αρχική ταχύτητα κάθετη στην ακτίνα, $\vec{v}_o \perp \vec{r}_o$.

(α) Δείξτε ότι η στροφορμή του L είναι σταθερή.

(β) Υπολογίστε το δυναμικό του πεδίου $V(r)$ και το υποθετικό δυναμικό $V'(r)$. Από την καμπύλη του $V'(r)$, υπολογίστε για ποιές τιμές της στροφορμής η κίνηση είναι περατωμένη και για ποιές τιμές της στροφορμής η κίνηση είναι απεριόριστη (εκτείνεται στο άπειρο).

(γ) Όταν η κίνηση είναι περατωμένη, υπολογίστε το χρόνο μέσα στον οποίο το σώμα θα φθάσει στο κέντρο $r = 0$.

Θεωρείστε δεδομένη την εξίσωση της τροχιάς του σώματος $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{mk}{L^2}u\,, \quad u = \dfrac{1}{r}\,.$

Δίδεται ότι $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x|_0^\infty = 1\,.$

Θέμα 4^o:

Σε ένα νεογέννητο πλανητικό σύστημα, ένας πλανήτης μάζας m κινείται γύρω από το κεντρικό άστρο του μάζας M και ακτίνας R. Όμως, λόγω του αρχικού νεφελώματος από το οποίο δημιουργήθηκε αυτό το πλανητικό σύστημα, στο χώρο γύρω από το κεντρικό άστρο ($r > R$) όπου κινείται ο πλανήτης υπάρχει σκόνη και άλλο πρωτόγονο υλικό με πυκνότητα $\rho(r) = \dfrac{A}{r^4}$, όπου A είναι μια σταθερά.

(α) Να δειχθεί ότι το αποτέλεσμα της σκόνης στην κίνηση του πλανήτη είναι ο πλανήτης να «βλέπει» επιπρόσθετα της ελκτικής δύναμης του κεντρικού άστρου και μια δεύτερη ελκτική κεντρική δύναμη,

$$F'(r) = -\frac{4\pi AGm}{r^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\,.$$

(β) Εάν ο πλανήτης διαγράφει κυκλική τροχιά στροφορμής L γύρω από το άστρο του, ποια η ακτίνα της τροχιάς r_o ;

(γ) Υποθέτουμε ότι η δύναμη της σκόνης F' είναι κατά πολύ ασθενέστερη της ελκτικής δύναμης του πεδίου βαρύτητας του κεντρικού άστρου, και ότι η τροχιά του πλανήτη διαφέρει πολύ λίγο από την κυκλική τροχιά του ερωτήματος (β). Εάν ω_r και ω_o είναι οι συχνότητες της ακτινικής και αζιμουθιακής κίνησης, να υπολογισθεί η διαφορά των δύο συχνοτήτων $\omega_\mu = \omega_r - \omega_o$ συναρτήσει των r_o, A, M και G. (Η συχνότητα ω_μ είναι η συχνότητα με την οποία μεταπίπτει η τροχιά του πλανήτη.)

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \Leftrightarrow m\left(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2\right)\hat{\varpi} + m\frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}\left(\varpi^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + m\ddot{z}\hat{z} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0\varpi}\hat{\varpi} + \frac{\mu_0 I q}{2\pi\varpi}\begin{vmatrix} \hat{\varpi} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \dot{\varpi} & \varpi\dot{\phi} & \dot{z} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m\left(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2\right) = \dfrac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0\varpi} - \dfrac{\mu_0 I q}{2\pi\varpi}\dot{z} \quad ① \\ \dfrac{d}{dt}\left(m\varpi^2\dot{\phi}\right) = 0 \quad ② \\ m\ddot{z} = \dfrac{\mu_0 I q}{2\pi\varpi}\dot{\varpi} \quad ③ \end{cases}$$

(α) Η ② δίνει το ολοκλήρωμα της στροφορμής $m\varpi^2\dot{\phi} = L$.

Η ③ ολοκληρώνεται επίσης, διότι $\dfrac{\dot{\varpi}}{\varpi} = \dfrac{d\ln\varpi}{dt}$. Έτσι προκύπτει $m\dot{z} - \dfrac{\mu_0 I q}{2\pi}\ln\varpi = p_z$.

Αυτή είναι η $\hat{z}$ συνιστώσα της «κανονικής» ορμής, $mv_z + qA_z$, με $\vec{A}$ το διανυσματικό δυναμικό του μαγνητικού πεδίου. Για τον αγωγό του προβλήματος $\vec{A} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\varpi\ \hat{z}$ (συν μια αυθαίρετη σταθερά).

(β) Αντικαθιστώντας στην ① τις σχέσεις $\dot{\phi} = \dfrac{L}{m\varpi^2}$ και $\dot{z} = \dfrac{p_z}{m} + \dfrac{\mu_0 I q}{2\pi m}\ln\varpi$ βρίσκουμε $m\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ με $f(\varpi) = \dfrac{L^2}{m\varpi^3} + \dfrac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0\varpi} - \dfrac{\mu_0 I q p_z}{2\pi m\varpi} - \dfrac{\mu_0^2 I^2 q^2}{4\pi^2 m\varpi}\ln\varpi$.

Το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $\dfrac{m\dot{\varpi}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\varpi) = E$, με $V_{\text{eff}}(\varpi) = -\displaystyle\int f(\varpi)d\varpi =$

$$\int\left[-\frac{L^2}{m\varpi^3} - \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0\varpi} + \frac{\mu_0 I q p_z}{2\pi m\varpi} + \frac{\mu_0^2 I^2 q^2}{4\pi^2 m\varpi}\ln\varpi\right]d\varpi = \frac{L^2}{2m\varpi^2} + \left(\frac{\mu_0 I q p_z}{2\pi m} - \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\right)\ln\varpi + \frac{\mu_0^2 I^2 q^2}{8\pi^2 m}(\ln\varpi)^2 + C,$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης.

Ισοδύναμα μπορούμε να βρούμε το ολοκλήρωμα πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση $m\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ με $\dot{\varpi}$.

Το ολοκλήρωμα εκφράζει την πραγματική ενέργεια του φορτίου, δηλ. το άθροισμα κινητικής ενέργειας και δυναμικής ενέργειας λόγω του ηλεκτρικού πεδίου (το μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο και γι' αυτό δεν υπάρχει αντίστοιχη δυναμική ενέργεια). Πράγματι, $T = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{\varpi}^2 + \varpi^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) = \dfrac{1}{2}m\dot{\varpi}^2 + \dfrac{L^2}{2m\varpi^2} + \dfrac{1}{2m}\left(p_z + \dfrac{\mu_0 I q}{2\pi}\ln\varpi\right)^2$ και η διαφορά $E - T = \dfrac{m\dot{\varpi}^2}{2} + V_{\text{eff}} - T = -\dfrac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\varpi + C - \dfrac{p_z^2}{2m}$ είναι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια (συν μια αυθαίρετη σταθερά).

(γ) Για $\varpi \to \infty$ η $V_{\text{eff}}(\varpi) \to +\infty$ (κυριαρχεί ο όρος με το $(\ln\varpi)^2$ ο οποίος έχει θετικό συντελεστή). Οπότε σκεπτόμενοι τα όρια κίνησης στο διάγραμμα της $V_{\text{eff}}(\varpi)$, όποιες και αν είναι οι αρχικές συνθήκες υπάρχει άνω όριο στην ακτίνα ϖ (με $\varpi_{\max}$ την μεγαλύτερη λύση της $V_{\text{eff}}(\varpi) = E$).

Αλλιώς: Η «δύναμη» $f(\varpi)$ σε μεγάλα ϖ είναι $f(\varpi) \approx -\dfrac{\mu_0^2 I^2 q^2}{4\pi^2 m\varpi}\ln\varpi$, δηλ. είναι αρνητική (ελκτική) και το έργο της $\displaystyle\int^{\varpi} f(\varpi)d\varpi$ γίνεται $-\infty$ για $\varpi \to \infty$. Αυτό σημαίνει ότι δεν θα αφήσει το σώμα να φτάσει σε άπειρη απόσταση ϖ, όσο μεγάλη και αν είναι η αρχική του κινητική ενέργεια.

Όμοια φαίνεται ότι για $\varpi \to 0^+$ η $V_{\text{eff}}(\varpi) \to +\infty$ (κυριαρχεί ο όρος της στροφορμής, ή αν $L = 0$ ο όρος με το $(\ln\varpi)^2$ ο οποίος έχει θετικό συντελεστή) οπότε υπάρχει και κάτω όριο της ακτίνας ϖ. Είναι δηλ. $\varpi_{\min} \le \varpi \le \varpi_{\max}$ και η κίνηση του φορτίου στην ακτινική κατεύθυνση είναι ταλάντωση (η τρισδιάστατη κίνηση βέβαια δεν είναι γενικά περιοδική).

Η συνάρτηση $\varpi f(\varpi)$ είναι γνησίως φθείνουσα. Ξεκινά από το $+\infty$ για $\varpi = 0^+$ και καταλήγει στο $-\infty$ για $\varpi = +\infty$, επομένως έχει ένα και μόνο ένα μηδενισμό σε κάποια ακτίνα ϖ_c. Για $\varpi < \varpi_c$ είναι $f(\varpi) > 0$ ενώ για $\varpi > \varpi_c$ είναι $f(\varpi) < 0$ («δύναμη» επαναφοράς). Το V_{eff} έχει ελάχιστο στο ϖ_c (αφού η παράγωγος $dV_{\text{eff}}/d\varpi = -f(\varpi)$ είναι αρνητική για $\varpi < \varpi_c$ και θετική για $\varpi > \varpi_c$). Η εξίσωση $V_{\text{eff}}(\varpi) = E$ έχει δύο λύσεις, τις $\varpi_{\min}$ και $\varpi_{\max}$. Οι λύσεις αυτές γίνονται μια διπλή αν η ενέργεια είναι η ελάχιστη τιμή του $V_{\text{eff}}(\varpi)$ (οπότε $\varpi_{\min} = \varpi_{\max} = \varpi_c$ και η τροχιά γίνεται πάνω στον κύλινδρο $\varpi = \varpi_c$).

Θέμα 2^o:

(α)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -F_x = -ax - by^2 & ① \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -F_y = -2bxy - az & ② \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -F_z = -ay - bz^2 & ③ \end{cases}$$

$① \rightarrow V = -a\dfrac{x^2}{2} - by^2x + f(y,z)$ οπότε $② \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = -az \Leftrightarrow f = -azy + g(z)$.

Άρα $V = -a\dfrac{x^2}{2} - by^2x - azy + g(z)$ οπότε $③ \rightarrow \dfrac{dg}{dz} = -bz^2 \Leftrightarrow g = -b\dfrac{z^3}{3} + C$.

Αφού υπάρχει λύση για τη συνάρτηση V η δύναμη είναι συντηρητική. Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $V(x,y,z) = -a\dfrac{x^2}{2} - by^2x - azy - b\dfrac{z^3}{3} + C$, όπου C αυθαίρετη προσθετική σταθερά.

Αλλιώς: Είναι $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ax + by^2 & 2bxy + az & ay + bz^2 \end{vmatrix} = \vec{0}$, οπότε η δύναμη είναι συντηρητική.

(β) $W = V(0,0,0) - V(c,0,d) = a\dfrac{c^2}{2} + b\dfrac{d^3}{3}$.

Αλλιώς: Αφού η δύναμη είναι συντηρητική το έργο μπορεί να βρεθεί πάνω σε μια οποιαδήποτε διαδρομή, π.χ. σε αυτή που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0,0,0)$ στο $(c,0,0)$ και το ευθύγραμμο τμήμα από το $(c,0,0)$ στο $(c,0,d)$. Για το πρώτο μέρος $\vec{F} \cdot d\vec{r} = axdx$ και $W_1 = \displaystyle\int_0^c axdx = a\frac{c^2}{2}$. Για το δεύτερο μέρος $\vec{F} \cdot d\vec{r} = bz^2dz$ και $W_2 = \displaystyle\int_0^d bz^2dz = b\frac{d^3}{3}$.

(γ)

$$\begin{cases} \ddot{x} = x & ④ \\ \ddot{y} = z & ⑤ \\ \ddot{z} = y & ⑥ \end{cases}$$

Η ④ έχει την τετριμμένη λύση $x = 0$. Αυτή είναι και η μόνη λύση διότι αρχικά δεν υπάρχει ούτε ταχύτητα ούτε επιτάχυνση στην x διεύθυνση.

Το ίδιο προκύπτει από την γενική λύση της ④ $x = c_1e^t + c_2e^{-t}$, χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $x = 0$, $\dot{x} = 0$, οι οποίες δίνουν $c_1 = c_2 = 0$.

Αντικαθιστώντας το y από την ⑥ στην ⑤ έχουμε $\dfrac{d^4z}{dt^4} - z = 0$. Αυτή είναι γραμμική και ομογενής εξίσωση και δέχεται λύσεις $e^{\lambda t}$ με $\lambda^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, -1, i, -i$. Άρα η γενική λύση είναι $z = d_1e^t + d_2e^{-t} + d_3e^{it} + d_4e^{-it}$ ή $z = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\sin t + c_4\cos t$.

Είναι $\dot{z} = c_1e^t - c_2e^{-t} + c_3\cos t - c_4\sin t$, $y = \ddot{z} = c_1e^t + c_2e^{-t} - c_3\sin t - c_4\cos t$, $\dot{y} = c_1e^t - c_2e^{-t} - c_3\cos t + c_4\sin t$.

Οι αρχικές συνθήκες δίνουν $\left\{\begin{array}{c} z = 4 \\ \dot{z} = 0 \\ y = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c_1 + c_2 + c_4 = 4 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_4 = 0 \\ c_1 - c_2 - c_3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 2 \end{array}\right.$

Άρα η θέση σε κάθε στιγμή είναι $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^t + e^{-t} - 2\cos t \\ z = e^t + e^{-t} + 2\cos t \end{cases}$

Ισοδύναμα το άθροισμα και η διαφορά των ⑤,⑥ δίνουν $\dfrac{d^2}{dt^2}(z+y) - (z+y) = 0$ και $\dfrac{d^2}{dt^2}(z-y) + (z-y) = 0$, οι οποίες δίνουν (χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες) $z + y = 2(e^t + e^{-t})$, $z - y = 4\cos t$.

Θέμα 3^o:

(α) $\dot{\vec{L}} = m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$.

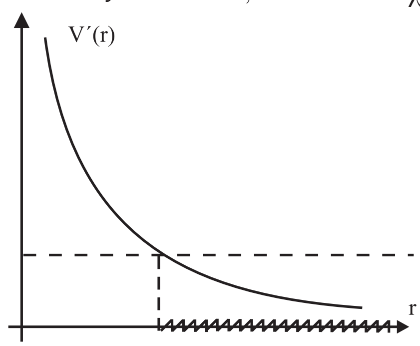
(β)

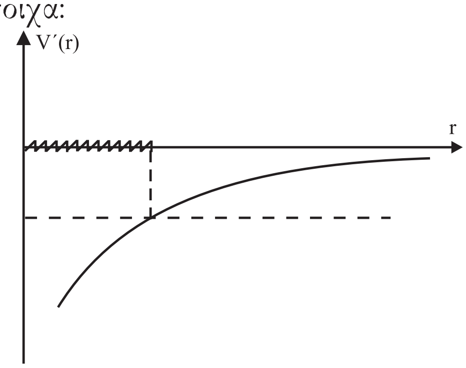
$$V = -\int F(r)dr = -\frac{k}{2r^2}\,,$$

$$V'(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{L^2 - mk}{2mr^2}$$

Αφού αρχικά $r = r_o$ και $\dot{r} = 0$ είναι $E = V'(r_o)$.

Στις δύο περιπτώσεις $mk < L^2$, $mk > L^2$ έχουμε αντίστοιχα:





Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα του υποθετικού δυναμικού, η κίνηση είναι απεριόριστη για $mk < L^2$ και περατωμένη για $mk > L^2$.

(γ) Το σώμα θα φθάσει στην αρχή στην περίπτωση της χαμηλής στροφορμής ($mk > L^2$).

Η πολική εξίσωση της τροχιάς του σώματος είναι,

$$u^{''} - \left(\frac{mk}{L^2} - 1\right)u = 0\ .$$

Όταν $L^2 < mk$ η λύση είναι $u = c_1 e^{\sqrt{\frac{mk}{L^2}-1}\ \theta} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{mk}{L^2}-1}\ \theta}$. Αρχικά $\theta = 0$, $r|_{t=0} = r_o \Leftrightarrow u|_{\theta=0} = 1/r_o$ και $\dot{r}|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow u'|_{\theta=0} = 0$, οπότε προκύπτει $c_1 = c_2 = 1/2r_o$ και η εξίσωση της τροχιάς του σώματος

$$r(\theta) = \frac{r_o}{\cosh\left(\sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}\ \theta\right)}\ .$$

Η κίνηση είναι περιορισμένη στο διάστημα $[0, r_o]$, όπως φαίνεται και από το διάγραμμα του υποθετικού δυναμικού για $E = V'(r_o) < 0$.

Το σώμα φτάνει στο κέντρο της κεντρικής δύναμης $r = 0$ για $\theta \to \infty$. Ο χρόνος που απαιτείται είναι:

$$T = \int\limits_{\theta=0}^{\infty} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \int\limits_{\theta=0}^{\infty} \frac{mr^2}{L}d\theta = \frac{mr_o^2}{L}\int\limits_0^{\infty} \frac{d\theta}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}\ \theta\right)} = \frac{mr_o^2}{L}\frac{1}{\sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}}\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\cosh^2 x} = \frac{mr_o^2}{\sqrt{mk - L^2}}\,.$$

Αλλιώς: $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + V'(r) = V'(r_o) \Rightarrow \dot{r} = -\sqrt{\dfrac{2}{m}\left[V'(r_o) - V'(r)\right]} = -\dfrac{\sqrt{mk - L^2}}{m}\sqrt{\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r_o^2}}$, οπότε

$$T = \int\limits_{r_o}^{0}\frac{dr}{\dot{r}} = \frac{-m}{\sqrt{mk - L^2}}\int\limits_{r_o}^{0}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_o^2}}} = \frac{mr_o^2}{\sqrt{mk - L^2}}\int\limits_{r_o}^{0}\frac{\frac{-2r}{r_o^2}dr}{2\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_o^2}}} = \frac{mr_o^2}{\sqrt{mk - L^2}}\int\limits_0^1\frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}} = \frac{mr_o^2}{\sqrt{mk - L^2}}\,.$$

Θέμα 4^o:

(α) Η μάζα της σκόνης εντός σφαίρας ακτίνας r γύρω από το άστρο είναι:

$$M_{\sigma\chi} = \int_R^r 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi A\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right).$$

Εάν r είναι η απόσταση του πλανήτη από το άστρο, η ελκτική δύναμη βαρύτητος που οφείλεται στην σκόνη είναι:

$$F'(r) = -M_{\sigma\chi}\frac{Gm}{r^2} = -\frac{4\pi AGm}{r^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right).$$

(β) Σε πολικές συντεταγμένες, η επιτάχυνση του πλανήτη είναι: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$. Έτσι, η ακτινική και αζιμουθιακή εξίσωση κίνησης γράφονται,

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} - \frac{4\pi AGm}{r^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right) + mr\dot{\theta}^2 \text{ και}$$

$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad\Rightarrow\quad L = mr^2\dot{\theta} = \text{σταθερό}.$$

Αντικαθιστώντας στην ακτινική εξίσωση της κίνησης $\dot{\theta} = L/mr^2$, παίρνουμε την εξίσωση,

$$m\ddot{r} = f(r), \quad f(r) = -\frac{GMm}{r^2}\left(1+\frac{4\pi A}{MR}\right) + \left(4\pi AGm + \frac{L^2}{m}\right)\frac{1}{r^3}.$$

Για κυκλική τροχιά ακτίνος r_o, $\ddot{r} = 0$ και η εξίσωση για το r_o είναι:

$$f(r_o) = 0 \Leftrightarrow -\frac{GMm}{r_o^2}\left(1+\frac{4\pi A}{MR}\right) + \left(4\pi AGm + \frac{L^2}{m}\right)\frac{1}{r_o^3} = 0 \Leftrightarrow r_o = \frac{L^2 + 4\pi AGm^2}{GMm^2\left(1+\frac{4\pi A}{MR}\right)}.$$

(γ) Έστω ότι $r = r_o + x$, $|x| \ll r_o$. Τότε,

$$m\ddot{x} = m\ddot{r} = f(r_o + x) \approx f(r_o) + f'(r_o)x = -\frac{L^2 + 4\pi AGm^2}{mr_o^4}x,$$

δηλαδή προκύπτει εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης συχνότητας

$$\omega_r = \sqrt{\frac{L^2 + 4\pi AGm^2}{m^2 r_o^4}},$$

μεγαλύτερη της συχνότητας της αζιμουθιακής κίνησης

$$\omega_o = \frac{L}{mr_o^2}.$$

Το ίδιο προκύπτει από $u'' + u = -\frac{m}{L^2u^2}\left[-GMmu^2 - 4\pi AGmu^2\left(\frac{1}{R}-u\right)\right] \Leftrightarrow$
$u'' + \left(1+\frac{4\pi AGm^2}{L^2}\right)u = \frac{GMm^2}{L^2}\left(1+\frac{4\pi A}{MR}\right)$ με λύση $r = \dfrac{r_o}{1 + e\cos\left(\sqrt{1+\frac{4\pi AGm^2}{L^2}}\,\theta\right)}$.

Για $e \ll 1$ και $\theta \approx \omega_o t$ είναι $r \approx r_o - r_o e\cos\left(\sqrt{1+\frac{4\pi AGm^2}{L^2}}\,\omega_o t\right)$ και $\omega_r = \sqrt{1+\frac{4\pi AGm^2}{L^2}}\,\omega_o$.

Η συχνότητα της μετάπτωσης, για μικρό A (για $4\pi A/MR \ll 1$), είναι

$$\omega_\mu = \omega_r - \omega_o = \sqrt{\frac{L^2 + 4\pi AGm^2}{m^2 r_o^4}} - \frac{L}{mr_o^2} = \frac{L}{mr_o^2}\left(\sqrt{1+\frac{4\pi AGm^2}{L^2}} - 1\right) \approx \frac{L}{mr_o^2}\frac{2\pi AGm^2}{L^2} \approx \frac{2\pi AG^{1/2}}{r_o^{5/2}M^{1/2}},$$

διότι $r_o \approx \dfrac{L^2}{GMm^2} \Leftrightarrow L \approx \sqrt{GMm^2 r_o}$.