Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 21 Φεβρουαρίου 2012
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _

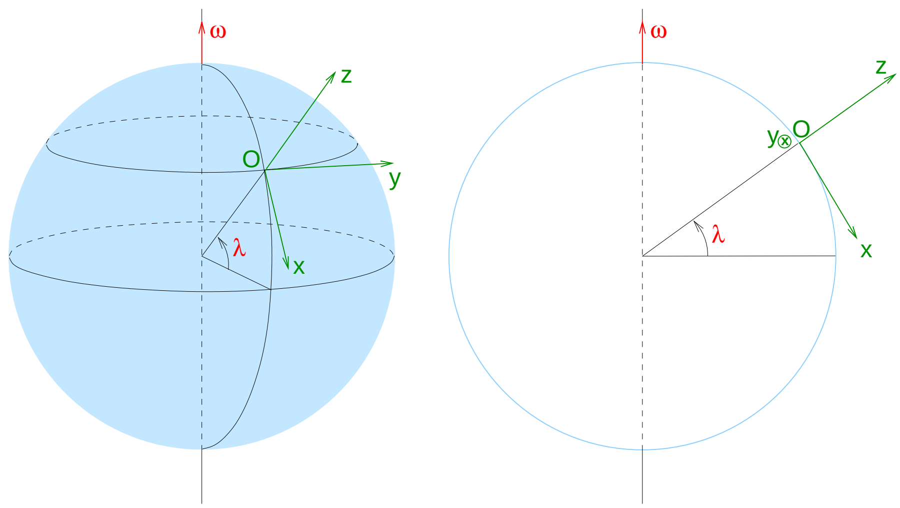
Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 19 Δεκεμβρίου 2011: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐

Αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2

Έχω παραδώσει εργασίες 1^{η} ☐ 2^{η} ☐ 3^{η} ☐ 4^{η} ☐ 5^{η} ☐ 6^{η} ☐ 7^{η} ☐ 8^{η} ☐ 9^{η} ☐ 10^{η} ☐ 11^{η} ☐ 12^{η} ☐ 13^{η} ☐

Θέμα 1^{o}:

Αφήνουμε σώμα μάζας m να πέσει από ύψος h πάνω από την επιφάνεια της περιστρεφόμενης γης, σε τόπο γεωγραφικού πλάτους λ. Το σώμα κινείται κάτω από την επίδραση του σταθερού βάρους του $m\vec{g}$, της δύναμης Coriolis $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}$ και αντίστασης αέρα ανάλογης του τετραγώνου της ταχύτητας $-mC|\vec{v}|\vec{v}$ (όπου C σταθερά). Για τη μελέτη της κίνησης ορίζουμε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς με αρχή τον τόπο Ο πάνω στην επιφάνεια της γης, άξονα x προς το νότο, y προς την ανατολή και z προς τα πάνω.



(α) Αμελώντας την περιστροφή της γης, βρείτε την κατακόρυφη ταχύτητα του σώματος $\dot{z}$ σαν συνάρτηση της θέσης του z.
(β) Δείξτε ότι αν λάβουμε υπόψη την περιστροφή της γης κρατώντας όρους ανάλογους του ω μόνο και αμελώντας όρους ανάλογους του ω^2, η εξίσωση που καθορίζει την μετατόπιση προς την ανατολή είναι $\ddot{y} = -2\omega\cos\lambda\ \dot{z} + C\dot{z}\dot{y}$.
Υπόδειξη: Είναι $\vec{\omega}\times\vec{v} \approx \vec{\omega}\times\dot{z}\hat{z}$ και $|\vec{v}| \approx |\dot{z}| = -\dot{z}$.
(γ) Λύστε την προηγούμενη εξίσωση για να βρείτε την ταχύτητα $\dot{y}$ σαν συνάρτηση του z.
Υπόδειξη: $\ddot{y} = \dot{z}\ d\dot{y}/dz$.
(δ) Συνδυάζοντας τις απαντήσεις στα (α) και (γ) βρείτε το ορισμένο ολοκλήρωμα που δίνει την απόκλιση προς την ανατολή (y) όταν το σώμα φτάσει στη γη ($z = 0$).
Υπόδειξη: Η $dy/dz = \dot{y}/\dot{z}$ θα προκύψει χωριζομένων μεταβλητών και ανάγεται σε ολοκλήρωμα.
(ε) Υπάρχει μετατόπιση στη διεύθυνση βορά-νότου;

Θέμα 2^{o}:

Κατακόρυφο ελατήριο με σταθερό το πάνω του άκρο έχει όριο θραύσης 80 N (δηλ. σπάει όταν η επιμήκυνσή του αντιστοιχεί σε δύναμη ελατηρίου 80 N). Στο ελεύθερο άκρο του δένουμε σώμα μάζας $m = 2$ kg οπότε το ελατήριο επιμηκύνεται κατά 1 cm. Θέλουμε για $t \geq 0$ να ασκήσουμε δύναμη $0.9\cos(\omega t)m\vec{g}$ στο σώμα (το οποίο για $t < 0$ ισορροπεί). Για ποιες ω το ελατήριο δεν θα σπάσει;
Δίνεται $g = 10\ \mathrm{m\ s^{-2}}$.

Θέμα 3ο:

(α) Δείξτε ότι σε ένα τυχόν πεδίο ελκτικών κεντρικών δυνάμεων $\vec{F} = F(r)\hat{r}$, με $F(r) < 0$, υπάρχει πάντοτε η δυνατότητα κυκλικών τροχιών ακτίνας R. Υπολογίστε την εξίσωση που δίνει την ακτίνα R για τροχιά δεδομένης στροφορμής L.

(β) Για να μελετηθεί αν κυκλικές τροχιές ακτίνας R σε ένα τυχόν πεδίο ελκτικών κεντρικών δυνάμεων $F(r)$ είναι ευσταθείς ή ασταθείς, μπορεί να μελετηθεί η χρονική εξέλιξη μιας διαταραχής γύρω από την κυκλική τροχιά γράφοντας $r(t) = R + x(t)$ με $|x| << R$. Υπολογίστε την εξίσωση που ικανοποιεί η $x(t)$ για τυχόν πεδίο ελκτικών κεντρικών δυνάμεων. Θεωρείστε ότι η στροφορμή είναι ίδια με την αρχική.

(γ) Δείξτε ότι σε ένα τυχόν πεδίο ελκτικών κεντρικών δυνάμεων $F(r)$ η συνθήκη ύπαρξης ευσταθών κυκλικών τροχιών ακτίνας R είναι : $\dfrac{3}{R} + \dfrac{F'(R)}{F(R)} > 0$. Υπολογίστε τη συχνότητα ω με την οποία ταλαντώνεται η ακτίνα της τροχιάς $r(t)$ γύρω από την ευσταθή θέση ισορροπίας $r = R$, αν η κυκλική τροχιά διαταραχθεί χωρίς να αλλάξει η στροφορμή. Δώστε επίσης μια ποιοτική εξήγηση της ύπαρξης κυκλικών τροχιών χρησιμοποιώντας το υποθετικό δυναμικό.

(δ) Θεωρείστε το πεδίο ελκτικών κεντρικών δυνάμεων $F(r) = -\dfrac{k}{r^n} e^{-r/a}$ με $k, a > 0$. Για δεδομένο n, υπολογίστε ποιές κυκλικές τροχιές ακτίνας R είναι ευσταθείς, καθώς επίσης και τη συχνότητα ω με την οποία ταλαντώνεται η ακτίνα της τροχιάς $r(t)$ γύρω από την ευσταθή θέση ισορροπίας $r = R$, όταν η κυκλική αυτή τροχιά διαταραχθεί χωρίς να αλλάξει η στροφορμή.

Θέμα 4ο:

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 κινούνται υπό την επίδραση της αμοιβαίας τους βαρυτικής δύναμης σε κυκλικές τροχιές με περίοδο T. Κάποια στιγμή η κίνησή τους σταματά απότομα. Στη συνέχεια, από την αρχική τους απόσταση αυτά αμοιβαία ελκόμενα αφήνονται να συγκρουσθούν. Δείξτε ότι ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που σταματά απότομα η κυκλική τους κίνηση μέχρι την τελική σύγκρουσή τους είναι ίσος με $T/4\sqrt{2}$.

Σημείωση: Αν χρειασθεί, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}}$ μπορείτε να αντικαταστήσετε $x = \cos^2 \xi$.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) Αν αμελήσουμε την περιστροφή της γης η κίνηση είναι κατακόρυφη με $\ddot{z} = -g + C\dot{z}^2$.
Με $\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dz}\dot{z}$ έχουμε $\int_0^{\dot{z}} \frac{\dot{z}\,d\dot{z}}{-g + C\dot{z}^2} = \int_h^z dz \Leftrightarrow \frac{1}{2C}\ln\left|1 - \frac{C\dot{z}^2}{g}\right| = z - h$. Η παράσταση $1 - \frac{C\dot{z}^2}{g}$ είναι αρχικά θετική και δεν μπορεί να αλλάζει πρόσημο (εκεί που θα μηδενιζόταν θα ήταν $z - h = -\infty$). Έτσι προκύπτει $\dot{z} = -\sqrt{\frac{g}{C}\left[1 - e^{-2C(h-z)}\right]}$.
(β) Με $\vec{\omega} = (\vec{\omega}\cdot\hat{z})\hat{z} + (\vec{\omega}\cdot\hat{x})\hat{x} = \omega\sin\lambda\,\hat{z} - \omega\cos\lambda\,\hat{x}$, $\vec{\omega}\times\vec{v} \approx \vec{\omega}\times\dot{z}\hat{z} = \omega\cos\lambda\,\dot{z}\hat{y}$ και $|\vec{v}| \approx -\dot{z}$ η $\hat{y}$ συνιστώσα της εξίσωσης Νεύτωνα $\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\vec{v} - C|\vec{v}|\vec{v}$ δίνει $\ddot{y} = -2\omega\cos\lambda\,\dot{z} + C\dot{z}\dot{y}$.
(γ) Με $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dz}\dot{z}$ η προηγούμενη εξίσωση γίνεται $\frac{d\dot{y}}{dz} - C\dot{y} = -2\omega\cos\lambda$, γραμμική, μη-ομογενής. Η λύση της ομογενούς είναι ανάλογη του e^{Cz} ενώ μια μερική λύση είναι η σταθερά $\frac{2\omega\cos\lambda}{C}$. Άρα $\dot{y} = De^{Cz} + \frac{2\omega\cos\lambda}{C}$. Απαιτώντας να είναι $\dot{y} = 0$ για $z = h$ βρίσκουμε τη σταθερά D και τελικά $\dot{y} = \frac{2\omega\cos\lambda}{C}\left[1 - e^{-C(h-z)}\right]$.
(δ) $\frac{dy}{dz} = \frac{\dot{y}}{\dot{z}}$. Αντικαθιστώντας τις απαντήσεις των (α) και (γ) (για το $\dot{z}$ αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τη λύση χωρίς περιστροφή, αφού η $\dot{y}$ είναι ανάλογη του ω οπότε η προσθήκη διόρθωσης στο $\dot{z}$ θα έδινε όρο ανάλογο του ω^2) βρίσκουμε
$$\frac{dy}{dz} = -\frac{2\omega\cos\lambda}{\sqrt{gC}}\frac{1 - e^{-C(h-z)}}{\sqrt{1 - e^{-2C(h-z)}}} \Leftrightarrow$$
$$y = -\frac{2\omega\cos\lambda}{\sqrt{gC}}\int_h^0 \frac{1 - e^{-C(h-z)}}{\sqrt{1 - e^{-2C(h-z)}}}dz.$$
Αλλάζοντας μεταβλητή $z = h - h\xi$ στο ολοκλήρωμα μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα σαν $y = \frac{2h\omega\cos\lambda}{\sqrt{gC}}\int_0^1 \sqrt{\tanh\frac{Ch\xi}{2}}\,d\xi$. Η ολοκλήρωση (δεν ζητείται) δίνει
$$y = \frac{2\omega\cos\lambda}{\sqrt{gC^3}}\left[\ln\left(e^{Ch} + \sqrt{e^{2Ch} - 1}\right) - \arccos e^{-Ch}\right].$$
Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor $\sqrt{\tanh u} \approx \sqrt{u - u^3/3} \approx u^{1/2}(1 - u^2/6)$ μπορούμε να βρούμε την προσεγγιστική έκφραση για μικρά Ch: $y = \frac{2h\omega\cos\lambda}{\sqrt{gC}}\int_0^1 \sqrt{\tanh\frac{Ch\xi}{2}}\,d\xi \approx \frac{2^{3/2}h^{3/2}\omega\cos\lambda}{3\sqrt{g}}\int_0^1 \left(\frac{3}{2}\xi^{1/2} - \frac{C^2h^2}{16}\xi^{5/2}\right)d\xi$ $= y_0\left(1 - \frac{C^2h^2}{56}\right)$ όπου $y_0 = \frac{g\omega\cos\lambda}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$ η απόκλιση αν δεν υπάρχει αντίσταση αέρα.
(ε) Αμελώντας όρους ανάλογους του ω^2, η $\hat{x}$ συνιστώσα της εξίσωσης Νεύτωνα $\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\vec{v} - C|\vec{v}|\vec{v}$ δίνει $\ddot{x} = C\dot{z}\dot{x}$. Με $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dz}\dot{z}$ έχουμε $\frac{d\dot{x}}{dz} - C\dot{x} = 0$. Η μόνη λύση της γραμμικής και ομογενούς αυτής εξίσωσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\dot{x} = 0$ για $z = 0$, είναι η μηδενική. Συνεπώς δεν υπάρχει μετατόπιση στη διεύθυνση βορά-νότου (τάξης ανάλογης του ω).

Θέμα 2ο:

Όλες οι αντικαταστάσεις στο σύστημα mksA.
$mg = k\Delta\ell \Leftrightarrow k = \frac{mg}{\Delta\ell} = \frac{2\times 10}{10^{-2}} = 2000\ \mathrm{N\ m^{-1}}$.
Αν x η συντεταγμένη σε κατακόρυφο άξονα με αρχή το σημείο ισορροπίας και φορά προς τα κάτω, η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $10^{-2} + x$ και η εξίσωση κίνησης είναι $2\ddot{x} = 20 - 2000(10^{-2} + x) + 18\cos(\omega t) \Leftrightarrow \ddot{x} + 1000x = 9\cos(\omega t)$.
Η λύση της ομογενούς είναι $x_{ομ} = C_1\sin(\sqrt{1000}\ t) + C_2\cos(\sqrt{1000}\ t)$. Μια μερική λύση είναι $x_{μερ} = A\cos(\omega t)$. Η αντικατάσταση δίνει $-\omega^2 A + 1000A = 9 \Leftrightarrow A = \frac{9}{1000 - \omega^2}$. Άρα η γενική λύση είναι $x = C_1\sin(\sqrt{1000}\ t) + C_2\cos(\sqrt{1000}\ t) + \frac{9}{1000 - \omega^2}\cos(\omega t)$ με $\dot{x} = C_1\sqrt{1000}\cos(\sqrt{1000}\,t) - C_2\sqrt{1000}\sin(\sqrt{1000}\,t) - \frac{9\omega}{1000 - \omega^2}\sin(\omega t)$. Οι αρχικές συνθήκες $\dot{x}|_{t=0} = 0$ και $x|_{t=0} = 0$ δίνουν $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{9}{1000 - \omega^2}$, οπότε η λύση είναι $x = \frac{9}{1000 - \omega^2}\left[\cos(\omega t) - \cos(\sqrt{1000}\ t)\right]$.
Η μέγιστη επιμήκυνση είναι $10^{-2} + \frac{18}{|1000 - \omega^2|}$ και αντιστοιχεί σε δύναμη $2000\times\left(10^{-2} + \frac{18}{|1000 - \omega^2|}\right)$. Αυτή είναι μικρότερη του ορίου θραύσης αν $2000\times\left(10^{-2} + \frac{18}{|1000 - \omega^2|}\right) < 80 \Leftrightarrow |1000 - \omega^2| > 600$.
Άρα πρέπει να ισχύει είτε $1000 - \omega^2 > 600 \Leftrightarrow \omega^2 < 400 \Leftrightarrow \omega < 20\ \mathrm{rad\ s^{-1}}$, είτε $1000 - \omega^2 < -600 \Leftrightarrow \omega^2 > 1600 \Leftrightarrow \omega > 40\ \mathrm{rad\ s^{-1}}$.

Θέμα 3^o:

(α) $F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$, $L = mr^2\dot{\theta}$.

Άρα $F(r) = m\ddot{r} - \dfrac{L^2}{mr^3}$ με σταθερές λύσεις

$F(R) = -\dfrac{L^2}{mR^3}$.

Το ίδιο από $F(R)\hat{r} = \dfrac{mv^2}{R}\hat{n}$ (κεντρομόλος δύναμη) με $v = \dfrac{L}{mR}$ και $\hat{n} = -\hat{r}$.

(β) Για μικρές διαταραχές στην κυκλική τροχιά, $r(t) = R + x(t)$ με $|x| << R$ και χωρίς να αλλάζει η στροφορμή σε σχέση με την αδιατάρακτη τροχιά,

$$\frac{F(r)}{m} = \ddot{x} - \frac{L^2}{m^2(R+x)^3} \approx \ddot{x} - \frac{L^2}{m^2R^3}\left(1 - 3\frac{x}{R}\right).$$

Επειδή,

$$\frac{F(R)}{m} = -\frac{L^2}{m^2R^3}, \quad F(r) \approx F(R) + xF'(R),$$

$$\ddot{x} - x\left[\frac{F'(R)}{m} + \frac{3F(R)}{mR}\right] = 0.$$

(γ) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ με $\omega^2 = -\left[\dfrac{F'(R)}{m} + \dfrac{3F(R)}{mR}\right]$.

Για ευσταθείς τροχιές,

$$\omega^2 > 0, \quad F'(R) + \frac{3F(R)}{R} < 0, \quad \frac{F'(R)}{F(R)} + \frac{3}{R} > 0$$

(διότι $F(R) < 0$).

Η ακτίνα της ευσταθούς κυκλικής τροχιάς συμπίπτει με το ελάχιστο του υποθετικού δυναμικού,

$$V'(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

(δ)

$$F'(r) = \left(\frac{nk}{r^{n+1}} + \frac{k}{ar^n}\right)e^{-r/a}, \quad \frac{F'}{F} = -\frac{n}{r} - \frac{1}{a},$$

$$\frac{3}{R} - \frac{n}{R} - \frac{1}{a} > 0, \quad R < (3-n)a$$

(μόνο για $n < 3$ υπάρχουν ευσταθείς τροχιές).

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{mR^{n+1}}e^{-R/a}\left(3 - n - \frac{R}{a}\right)}.$$

Θέμα 4^o:

Έστω $\vec{r}$ το διάνυσμα από το m_1 στο m_2. Από το πρόβλημα των δύο σωμάτων γνωρίζουμε ότι $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}$ όπου $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ και $\vec{F}_{12}$ η βαρυτική δύναμη που ασκεί το m_1 στο m_2. Επειδή η κίνηση είναι μονοδιάστατη, έχουμε, $\mu\ddot{r} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$. Μπορούμε να ολοκληρώσουμε την εξίσωση αυτή πολλαπλασιάζοντας με $\dot{r}$ παίρνοντας το ολοκλήρωμα της ενέργειας :

$$\frac{\mu\dot{r}^2}{2} - \frac{Gm_1m_2}{r} = E = -\frac{Gm_1m_2}{r_0},$$

όπου r_0 είναι η αρχική απόσταση των σωμάτων. Έτσι έχουμε, $\dfrac{dr}{dt} = -\sqrt{2G(m_1+m_2)\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)}$. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών και δίνει

$$\int_0^t dt = -\int_{r_0}^0 \frac{dr}{\sqrt{2G(m_1+m_2)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}},$$

$$t = \sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}}.$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $x = \cos^2\xi$, $dx = -2\sin\xi\cos\xi\, d\xi$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2\xi\, d\xi = \int_0^{\pi/2}[1 + \cos(2\xi)]\, d\xi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Άρα } t = \sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}\frac{\pi}{2} = \frac{T}{4\sqrt{2}},$$

$$\text{όπου } T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{G(m_1+m_2)}}$$

η περίοδος της αρχικής περιστροφής.

Το αποτέλεσμα είναι η μισή περίοδος της ελλειπτικής τροχιάς με μεγάλο ημιάξονα $r_0/2$,

$$t = \frac{1}{2}\,2\pi\sqrt{\frac{(r_0/2)^3}{G(m_1+m_2)}}.$$

Τέτοια μπορεί να θεωρηθεί η ευθύγραμμη τροχιά που εκτελεί το m_2 ως προς το m_1, με τον μικρό ημιάξονα μηδενικό και το m_1 (εστία της έλλειψης) στο άκρο (περίκεντρο) της τροχιάς.