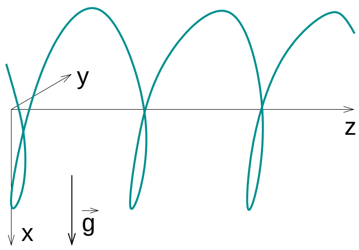
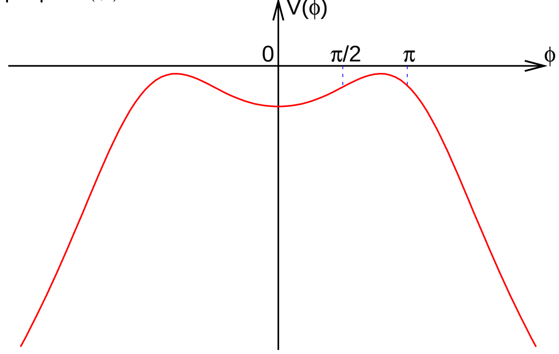
Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 19 Δεκεμβρίου 2011
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

Θέμα 1: Σώμα (δαχτυλίδι) μάζας m κινείται χωρίς τριβές περασμένο σε σύρμα σχήματος οριζόντιας έλικας ακτίνας R και σταθερού βήματος $2\pi R$, μέσα σε πεδίο βαρύτητας $\vec{g} = g\ \hat{x}$. Η εξίσωση της έλικας σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $\{\varpi = R\,,\ z = R\phi\}$.



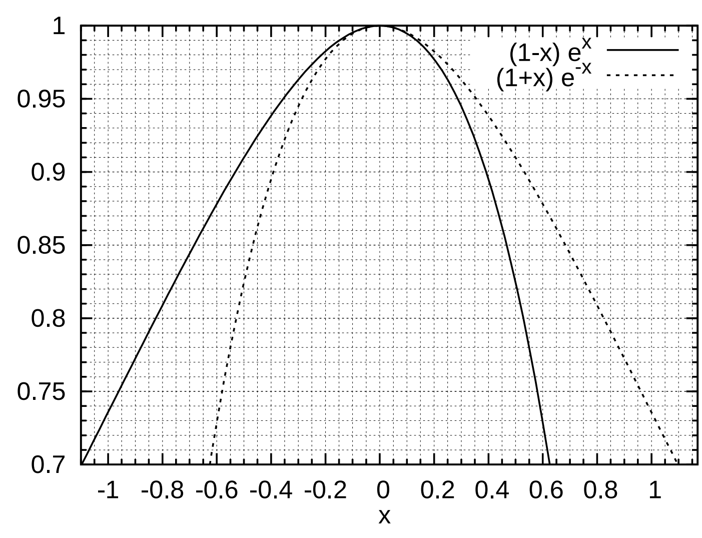
(α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης (τη διαφορική για την $\phi(t)$).
(β) Έστω το σώμα βρίσκεται αρχικά στη θέση $\phi_0 = 0$ και έχει αρχική ταχύτητα $v_0 > 0$. Με τη βοήθεια του ολοκληρώματος ενέργειας βρείτε για ποιες v_0 το σώμα δεν ξαναπερνά από την αρχική θέση.
(γ) Αν $v_0 = \sqrt{6gR}$ να βρεθούν σε κάθε θέση (συναρτήσει της ϕ) η επιτρόχια και κεντρομόλος επιτάχυνση, η ακτίνα καμπυλότητας $\mathcal{R}$ της έλικας, καθώς και η δύναμη που ασκείται στο δαχτυλίδι από το σύρμα.
Δίνονται $x = R\cos\phi$, $\hat{x} = \cos\phi\ \hat{\varpi} - \sin\phi\ \hat{\phi}$ και $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{\varpi}$.
Για ευκολία θέσατε $R = 1$, $m = 1$, $g = 1$.

Θέμα 2: Έστω περιστρέφουμε την έλικα του προηγούμενου θέματος γύρω από τον άξονα x με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{x}$.
(α) Δείξτε ότι σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι $\ddot{\phi} = -\dfrac{g}{2R}\sin\phi + \dfrac{\omega^2}{2}\left(\phi + \sin\phi\cos\phi\right)$.
(β) Βρείτε για ποιες τιμές του ω η κίνηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $\phi = 0$ είναι ταλάντωση (η ισορροπία είναι ευσταθής) και υπολογίστε την περίοδο των μικρών αυτών ταλαντώσεων.
(γ) Η εξίσωση κίνησης ισοδυναμεί με το ολοκλήρωμα «ενέργειας» $\dot{\phi}^2 + V(\phi) = E$ με «δυναμικό» $V(\phi) = -\dfrac{g}{R}\cos\phi - \dfrac{\omega^2}{2}\left(\phi^2 + \sin^2\phi\right)$. Δίνεται για $\omega^2 R/g = 0.3$ η γραφική παράσταση της $V(\phi)$.



Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης, δηλαδή τις διάφορες καμπύλες φάσης στο επίπεδο $\phi - \dot{\phi}$.
(δ) Πως θα προκύψουν οι εξισώσεις κίνησης αν η έλικα μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον άξονα x; (Αναφέρατε μόνο τις συνθήκες που οδηγούν στις εξισώσεις.)
Δίνεται ο τροποποιημένος νόμος Νεύτωνα στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς $\vec{a} = \dfrac{\Sigma\vec{F}}{m} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v} - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$.
Για ευκολία θέσατε ξανά $R = 1$, $m = 1$, $g = 1$.

Θέμα 3: Έστω μονοδιάστατη κίνηση (σε άξονα x) ενός ταλαντωτή μάζας m στον οποίο εκτός από τη δύναμη επαναφοράς $-m\omega^2 x\ \hat{x}$ ασκείται και δύναμη αντίστασης με μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας cv^2 (και φορά αντίρροπη της $\vec{v}$). Χωρίς βλάβη της γενικότητας (αν μετράμε τα μήκη σε μονάδες $m/2c$ και τους χρόνους σε μονάδες $1/\omega$) μπορούμε να θέσουμε $m = 1$, $\omega = 1$ και $c = 1/2$.
(α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης για $v = \dot{x} \geq 0$ και ≤ 0.
(β) Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται ακίνητο στη θέση $x = x_{\min(1)} < 0$ βρείτε την ταχύτητα συναρτήσει της θέσης μέχρι να φτάσει στο σημείο $x = x_{\max(1)}$ όπου η ταχύτητα μηδενίζεται ξανά.
Δίνεται ότι η διαφορική $v\dfrac{dv}{dx} - Av^2 - Bx = 0$ έχει γενική λύση $v^2 = De^{2Ax} - \dfrac{B}{2A^2} - \dfrac{B}{A}x$ με D σταθερά ολοκλήρωσης.
Δείξτε ότι η ακραία θέση $x_{\max(1)}$ είναι λύση της
$(1 - x_{\min(1)})e^{x_{\min(1)}} = (1 - x_{\max(1)})e^{x_{\max(1)}}$.
Με τη βοήθεια του παρακάτω γραφήματος προσδιορίστε την τιμή του $x_{\max(1)}$ αν $x_{\min(1)} = -1$.



(γ) Βρείτε την ταχύτητα συναρτήσει της θέσης για την κίνηση με αρνητική αλγεβρική τιμή της ταχύτητας, από το $x = x_{\max(1)}$ στο $x = x_{\min(2)}$ όπου η ταχύτητα μηδενίζεται ξανά.
Δείξτε ότι η ακραία θέση $x_{\min(2)}$ είναι λύση της
$(1 + x_{\max(1)})e^{-x_{\max(1)}} = (1 + x_{\min(2)})e^{-x_{\min(2)}}$.
Με τη βοήθεια του παραπάνω γραφήματος προσδιορίστε την τιμή του $x_{\min(2)}$ που αντιστοιχεί στο $x_{\max(1)}$ που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα.
(δ) Υποδείξτε μια γραφική εύρεση των διαδοχικών ορίων της κίνησης με τη βοήθεια του παραπάνω γραφήματος.

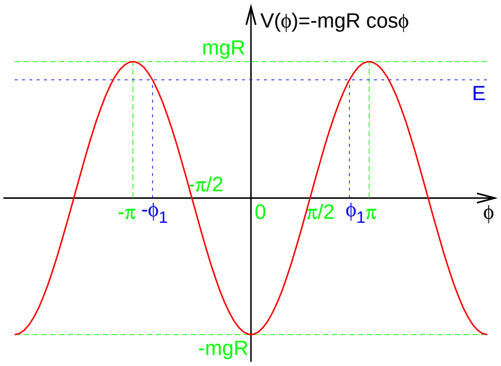
ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{\text{Θέμα 1}}$:

(α) $m\vec g + \vec N = m\vec a$ με $\vec N \perp \vec v$. Άρα $\vec g\cdot\vec v = \vec a\cdot\vec v$. Αντικαθιστώντας $\vec g = g\,(\cos\phi\;\hat\varpi - \sin\phi\;\hat\phi)$, $\vec v = R\dot\phi\hat\phi + \dot z\hat z = R\dot\phi\hat\phi + R\dot\phi\hat z$, $\vec a = \dot{\vec v} = R\ddot\phi\hat\phi + R\dot\phi\dot{\hat\phi} + R\ddot\phi\hat z = R\ddot\phi\hat\phi - R\dot\phi^2\hat\varpi + R\ddot\phi\hat z$, βρίσκουμε $\ddot\phi + \frac{g}{2R}\sin\phi = 0$ (εξίσωση εκκρεμούς).

(β) Το βάρος είναι συντηρητική δύναμη με $V = -mgx = -mgR\cos\phi$. Η δύναμη $\vec N$ δεν παράγει έργο. Άρα ισχύει η διατήρηση ενέργειας $\frac{mv^2}{2} - mgR\cos\phi = E$, ή, αντικαθιστώντας την ταχύτητα, $mR^2\dot\phi^2 - mgR\cos\phi = E$. Από τις αρχικές συνθήκες $E = \frac{mv_0^2}{2} - mgR$.

(Το ολοκλήρωμα $mR^2\dot\phi^2 - mgR\cos\phi = E$ ή η σχέση που προκύπτει από την παραγώγισή του ως προς το χρόνο $2R\ddot\phi + g\sin\phi = 0$ αποτελεί απάντηση και στο ερώτημα (α).)



Όρια τροχιάς $V(\phi)\le E$. Για $E < mgR \Leftrightarrow v_0 < 2\sqrt{gR}$ είναι $-\phi_1 \le \phi \le \phi_1$ όπου $\phi_1 = \arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gR}\right)$ η μικρότερη θετική λύση της $V(\phi) = E$. (Για $E<0$ είναι $\phi_1 < \pi/2$ ενώ για $0 < E < mgR$ είναι $\pi/2 < \phi_1 < \pi$.)

Για $E \ge mgR \Leftrightarrow v_0 \ge 2\sqrt{gR}$ το σώμα δεν ξαναγυρνάει στην αρχική θέση (για $v_0 = 2\sqrt{gR}$ θα χρειαστεί άπειρο χρόνο για να φτάσει στη θέση $\phi=\pi$, ενώ για $v_0 > 2\sqrt{gR}$ το σώμα διατρέχει όλη την έλικα $\phi>0$).

Το αποτέλεσμα αυτού του ερωτήματος είναι ίδιο για όλα τα σύρματα με σχήμα $\{\varpi = R\,, z = z(\phi)\}$, συμπεριλαμβανομένου και του ιδανικού επίπεδου εκκρεμούς, αφού σε όλα αυτά τα προβλήματα η έκφραση της $V(\phi)$ είναι ίδια και η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη του $\dot\phi^2$.

(γ) $\dot\phi^2 = \frac{g}{R}\left(\frac{v_0^2}{2gR} - 1 + \cos\phi\right)$ από το ολοκλήρωμα ενέργειας και $\ddot\phi = -\frac{g}{2R}\sin\phi$ από την εξίσωση κίνησης.

Αντικαθιστώντας στην επιτάχυνση βρίσκουμε

$\vec a = -\frac{g}{2}\sin\phi(\hat\phi + \hat z) - g\left(\frac{v_0^2}{2gR} - 1 + \cos\phi\right)\hat\varpi$.

Η επιτρόχια επιτάχυνση είναι $\vec a_\varepsilon = \left(\vec a\cdot\frac{\vec v}{|\vec v|}\right)\frac{\vec v}{|\vec v|} = -\frac{g}{2}\sin\phi(\hat\phi+\hat z)$ και η κεντρομόλος είναι $\vec a_\kappa = \vec a - \vec a_\varepsilon = -g\left(\frac{v_0^2}{2gR}-1+\cos\phi\right)\hat\varpi$.

Από $|\vec a_\kappa| = \frac{v^2}{\mathcal R}$ με $|\vec a_\kappa| = g\left|\frac{v_0^2}{2gR} - 1 + \cos\phi\right|$ και $v^2 = \frac{2E}{m} + 2gR\cos\phi = v_0^2 - 2gR + 2gR\cos\phi$ βρίσκουμε $\mathcal R = 2R$.

$\vec N = m\vec a - m\vec g = mg\left[\frac{\sin\phi}{2}(\hat\phi - \hat z) - \left(2\cos\phi + \frac{v_0^2}{2gR} - 1\right)\hat\varpi\right]$.

$\boxed{\text{Θέμα 2}}$:

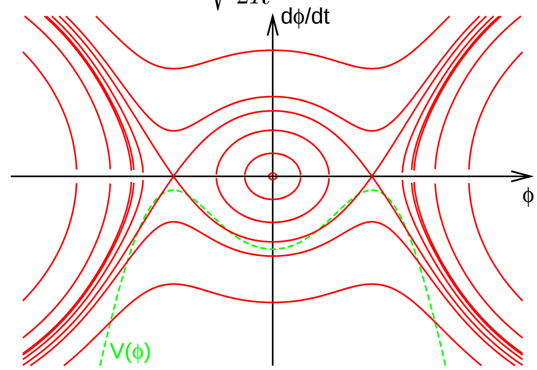
(α) Πολλαπλασιάζοντας την $\vec a = \vec g + \frac{\vec N}{m} - \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) - 2\vec\omega\times\vec v$ με $\vec v$ προκύπτει $\vec a\cdot\vec v = \vec g\cdot\vec v - [\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)]\cdot\vec v$.

Αντικαθιστώντας $\vec r = R\;\hat\varpi + R\phi\;\hat z$, $\vec v = R\dot\phi\;\hat\phi + R\dot\phi\;\hat z$, $\vec a = R\ddot\phi\;\hat\phi - R\dot\phi^2\;\hat\varpi + R\ddot\phi\;\hat z$, $\vec g = g(\cos\phi\;\hat\varpi - \sin\phi\;\hat\phi)$, $\vec\omega = \omega(\cos\phi\;\hat\varpi - \sin\phi\;\hat\phi)$, βρίσκουμε

$\ddot\phi = -\frac{g}{2R}\sin\phi + \frac{\omega^2}{2}(\phi + \sin\phi\cos\phi)$.

(β) Για $|\phi| \ll 1$ είναι $\sin\phi\approx\phi$ και $\cos\phi\approx 1$, οπότε η εξίσωση κίνησης γίνεται $\ddot\phi + \left(\frac{g}{2R} - \omega^2\right)\phi = 0$. Αν $\frac{g}{2R} - \omega^2 > 0 \Leftrightarrow |\omega| < \sqrt{\frac{g}{2R}}$ η κίνηση είναι ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\Omega = \sqrt{\frac{g}{2R} - \omega^2}$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

(γ)



(δ) Η πρώτη συνθήκη είναι όπως και πριν $\vec N\perp\vec v$. Η δεύτερη συνθήκη είναι η διατήρηση της ενέργειας στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (στην περίπτωση του σταθερού $\vec\omega$ η ενέργεια αυτή δεν διατηρείται, αφού αυτός που κινεί την έλικα παράγει έργο μέσω της δύναμης $\vec N$, η οποία υποχρεώνει το σώμα να κινείται μαζί με την έλικα).

Η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με $\vec N\cdot\vec v_a = 0$ όπου $\vec v_a = \vec v + \vec\omega\times\vec r$ η ταχύτητα του σώματος στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Πρέπει λοιπόν να είναι $\vec N\cdot\vec v = 0$ και $\vec N\cdot\vec v_a = 0$, ή ισοδύναμα $\vec N\cdot\vec v_a = \vec N\cdot(\vec\omega\times\vec r) = 0$.

Πολλαπλασιάζοντας την $\vec a = \vec g + \frac{\vec N}{m} - \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) - 2\vec\omega\times\vec v - \dot{\vec\omega}\times\vec r$ διαδοχικά με $\vec v_a$ και $\vec\omega\times\vec r$ προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης που καθορίζουν τις $\phi(t)$ και $\omega(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left[\dot\phi^2 + \omega\dot\phi\,(\sin\phi - \phi\cos\phi) + \frac{\omega^2}{2}\left(\phi^2+\sin^2\phi\right) - \frac{g}{R}\cos\phi\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\omega\left(\phi^2+\sin^2\phi\right) + \dot\phi\,(\sin\phi - \phi\cos\phi)\right] = 0\,.$$

Η πρώτη εξίσωση είναι το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{1}{mR^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_a^2}{2} - mgR\cos\phi\right) = 0$, ενώ η δεύτερη είναι το ολοκλήρωμα της $\hat x$ συνιστώσας της στροφορμής $\frac{1}{mR^2}\frac{d}{dt}[(\vec r\times m\vec v_a)\cdot\hat x] = 0$ (η οποία διατηρείται γιατί ως γνωστόν η παράγωγος της στροφορμής ισούται με τη συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων $\frac{d\,(\vec r\times m\vec v_a)}{dt} = \vec r\times\Sigma\vec F$ και οι $\hat x$ συνιστώσες τόσο της ροπής του βάρους $(\vec r\times m\vec g)\cdot\hat x = \vec r\cdot(m\vec g\times\hat x)$ όσο και της ροπής της αντίδρασης $\left(\vec r\times\vec N\right)\cdot\hat x = \frac{\vec\omega}{\omega}\cdot\left(\vec r\times\vec N\right) = \frac{1}{\omega}\,(\vec\omega\times\vec r)\cdot\vec N$ είναι μηδέν).

$\boxed{\text{Θέμα 3}}$:

(α) $\dot{v} = -x - \frac{1}{2}v^2 \frac{v}{|v|}$. Άρα η εξίσωση κίνησης είναι

$\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x = 0$ αν $\dot{x} \geq 0$ και $\ddot{x} - \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x = 0$ αν $\dot{x} \leq 0$.

(β) Το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μεγαλύτερα x (αφού αρχικά ασκείται η δύναμη $-x > 0$ που αυξάνει την ταχύτητα από μηδέν σε θετικές τιμές). Θέτοντας $\ddot{x} = \dot{v} = \frac{dv}{dx}v$ η εξίσωση κίνησης για $v \geq 0$ γράφεται $v\frac{dv}{dx} + \frac{1}{2}v^2 + x = 0$ με λύση $v = \sqrt{De^{-x} + 2 - 2x}$.

Η συνθήκη για $x = x_{\min(1)}$ να είναι $v = 0$ δίνει την σταθερά $D = -(2 - 2x_{\min(1)})e^{x_{\min(1)}}$, οπότε

$v = \sqrt{-(2 - 2x_{\min(1)})e^{x_{\min(1)} - x} + 2 - 2x}$.

Η ταχύτητα μηδενίζεται ξανά στο $x = x_{\max(1)}$ που είναι λύση της $v = 0 \Leftrightarrow (1 - x_{\min(1)})e^{x_{\min(1)}} = (1 - x_{\max(1)})e^{x_{\max(1)}}$.

Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται ακίνητο στη θέση $x = x_{\min(1)} = -1$ από το σχήμα βρίσκουμε $x_{\max(1)} \approx 0.60$

(γ) Όμοια για $v \leq 0$ η εξίσωση κίνησης γράφεται $v\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2}v^2 + x = 0$ και έχει λύση $v = -\sqrt{De^{x} + 2 + 2x}$. Η νέα σταθερά ολοκλήρωσης D βρίσκεται από τη συνθήκη $v = 0$ για $x = x_{\max(1)}$. Προκύπτει $D = -(2 + 2x_{\max(1)})e^{-x_{\max(1)}}$, οπότε

$v = -\sqrt{-(2 + 2x_{\max(1)})e^{-x_{\max(1)} + x} + 2 + 2x}$.

Η ταχύτητα μηδενίζεται ξανά στο $x_{\min(2)}$ που είναι λύση της $v = 0 \Leftrightarrow (1 + x_{\max(1)})e^{-x_{\max(1)}} = (1 + x_{\min(2)})e^{-x_{\min(2)}}$.

Από το σχήμα βρίσκουμε $x_{\min(2)} \approx -0.42$ (για $x_{\max(1)} \approx 0.60$).

(δ)