Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 20 Οκτωβρίου 2011
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

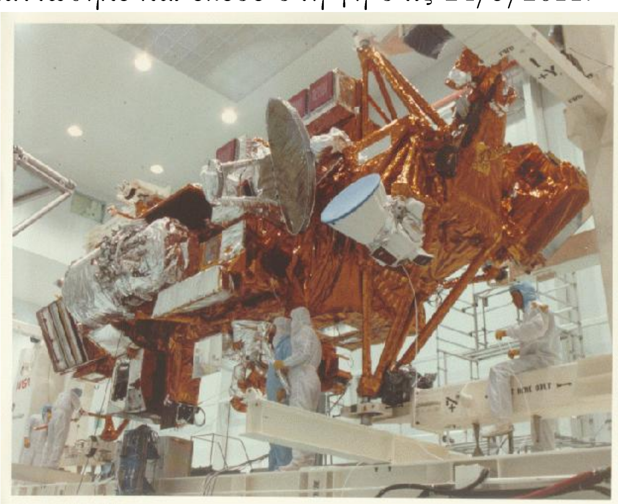
Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 17 Δεκεμβρίου 2010: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει τις εργασίες: 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐

Θέμα 1ο:

Πριν κάποια χρόνια η NASA αποφάσισε να ρίξει στη γη το δορυφόρο UARS (Upper Atmosphere Research Satellite). Για να το πετύχει αυτό τον «κατέβασε» σε τροχιά ύψους $h_0 = 350$ km πάνω από την επιφάνεια της γης. Λόγω της αντίστασης από την ατμόσφαιρα η ακτίνα της τροχιάς του σταδιακά ελαττώθηκε και έπεσε στη γη στις 24/9/2011.



(α) Βρείτε το ρυθμό μείωσης της ακτίνας $(-dr/dt)$ θεωρώντας ότι ο δορυφόρος εκτελεί συνεχώς κυκλική τροχιά γύρω από τη (θεωρούμενη ακίνητη) γη, με αργά μειούμενη ακτίνα, δηλ. $|\dot r| \ll |r\dot\theta|$, $|\ddot r| \ll r\dot\theta^2$. Η αντίσταση του αέρα είναι $\frac{1}{2}C_D S\rho v^2$, όπου $\rho$ η πυκνότητα του αέρα, $v$ η ταχύτητα του δορυφόρου, $S$ η επιφάνειά του κάθετα στην κίνηση και για το σχήμα του δορυφόρου $C_D = 2$.

(β) Βρείτε ένα πάνω όριο του χρόνου πτώσης του δορυφόρου, υποθέτοντας ότι η πυκνότητα της ατμόσφαιρας είναι σταθερή, με την τιμή που έχει στο αρχικό ύψος $h_0$. Πως θα επηρεάσει το χρόνο πτώσης η ηλιακή δραστηριότητα η οποία μέσω της υπεριώδους ακτινοβολίας ζεσταίνει την ατμόσφαιρα και προκαλεί εκτόνωσή της σε μεγαλύτερα ύψη;

Εφαρμογή για $h_0 = 3.5 \times 10^5$ m, ακτίνα της γης $R_\oplus = 6.4 \times 10^6$ m, μάζα γης $M_\oplus = 6 \times 10^{24}$ kg, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m$^3$ kg$^{-1}$ s$^{-2}$, ατμοσφαιρική πυκνότητα στο αρχικό ύψος $\rho = 4 \times 10^{-12}$ kg m$^{-3}$, και για το δορυφόρο $m = 5900$ kg, $S = 30$ m$^2$.
Δίνεται η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες $\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2)\hat r + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot\theta)\hat\theta$.

Θέμα 2ο:

Σώμα μάζας $m$ κινείται μονοδιάστατα σε πεδίο δύναμης $\vec F = -\nabla V$ με

$$V = \begin{cases} A_- \,|x|^\lambda \,, x \le 0 \\ A_+ \,x^\lambda \,, x \ge 0 \end{cases}$$

όπου $A_\pm$ και $\lambda$ θετικές σταθερές.

(α) Ποια τα όρια της κίνησης και ποια η μέγιστη ταχύτητα αν η ενέργεια είναι $E$;

(β) Ποια η περίοδος της κίνησης;
Μπορείτε να εκφράσετε το αποτέλεσμα μέσω της συνάρτησης Γ, χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^\lambda}} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1+1/\lambda)}{\Gamma(1/2+1/\lambda)}$.
Εξαρτάται η περίοδος από την ενέργεια;

(γ) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για $A_+ > A_-$.

(δ) Αναφέρατε φυσικά προβλήματα που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις:
(δ$_1$) $\lambda = 2$ και $A_+ = \infty$,
(δ$_2$) $\lambda = 2$ και $A_+ = 0$.

Θέμα $3^o$:

Ένα σώμα μάζας $m$ κινείται στο πεδίο της κεντρικής δύναμης $\vec{F} = F(r)\hat{r}$,

$$F(r) = -\frac{L^2}{mr^3}\left(1 + \frac{d^2}{r^2}\right) ,$$

όπου $L$ είναι η στροφορμή του σώματος και $d$ μια σταθερά.

(α) Δείξτε ότι η εξίσωση της κινήσεως του σώματος είναι,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) ,$$

όπου $u = \dfrac{1}{r}$ και $F\left(\dfrac{1}{u}\right) = F(r)$ είναι η δύναμη.

Δίδεται η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}\hat{\theta}$.

(β) Βρείτε το υποθετικό δυναμικό και δώστε ένα ποιοτικό διάγραμμά του. Συναρτήσει της ολικής ενέργειας του σώματος, πότε η τροχιά είναι περατωμένη και πότε όχι ;

(γ) Δείξτε ότι η εξίσωση της κινήσεως του σώματος $\theta = \theta(u)$ δίδεται από το ολοκλήρωμα,

$$\theta(u) = \pm \int \frac{du}{\sqrt{k + d^2u^4/2}} ,$$

όπου $k$ είναι μια σταθερά.

(δ) Στην ειδική περίπτωση όπου $k = 0$, δείξτε ότι η τροχιά του σώματος είναι σπειροειδής,

$$r = r_0 \mp \frac{d}{\sqrt{2}}\theta .$$

Υπολογίστε την ενέργεια του σώματος σε αυτή την περίπτωση.

Θέμα $4^o$:

Συνεχίζοντας τη μελέτη της πρόσφατης πτώσης του δορυφόρου UARS, στο σχήμα φαίνεται η χρονική εξάρτηση του περίγειου και απόγειου της τροχιάς του: (Α) κατά την φάση της κανονικής λειτουργίας του 1999-2005, (Β) κατά την φάση που απότομα κατέβηκε σε χαμηλή τροχιά το 2005 και (Γ) κατά τη μετέπειτα εξέλιξη του περίγειου/απόγειου της τροχιάς του από το 2005 μέχρι την τελική του πτώση στις 24 Σεπτεμβρίου του 2011. Στην φάση (Α), το απόγειο και το περίγειο της τροχιά του ήταν 580 και 575 km αντίστοιχα πάνω από την επιφάνεια της Γης.

(1) Ποια ήταν η εκκεντρότητα της τροχιάς του κατά την φάση (Α);

(2) Ποια ήταν η ενέργειά του $E_o$ κατά την φάση (Α);

(3) Ποια ήταν η περίοδός του $T_o$ κατά την φάση (Α);

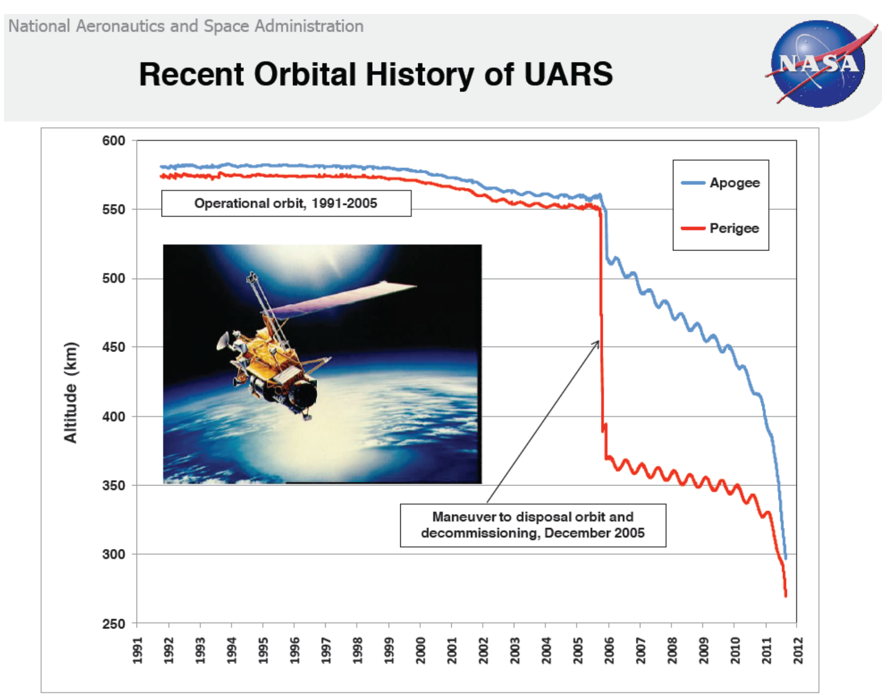
(4) Ποια ήταν η ταχύτητά του $V_o$ κατά την φάση (Α);

(5) Κατά την σύντομη μετάβαση από την φάση (Α) στην φάση (Β), χρειάσθηκε να του δοθεί ή να του αφαιρεθεί ενέργεια; Περιγράψτε ένα τρόπο μετάβασης από τη φάση (Α) στη φάση (Β).

(6) Κατά την αρχή της φάσης (Γ), το περίγειο είναι 500 km και το απόγειο 350 km πάνω από την επιφάνεια της Γης. Αυξήθηκε ή ελαττώθηκε η εκκεντρότητα της τροχιάς του και η περίοδός του κατά την μετάβαση από την φάση (Α) στην φάση (Γ);

(7) Πως εξηγείτε το παράδοξο ότι λόγω τριβής η ταχύτητα του δορυφόρου αυξήθηκε καθώς έπεσε σε χαμηλότερο ύψος από την επιφάνεια της Γης (συνήθως η τριβή δεν επιταχύνει την κίνηση ενός σώματος αλλά την επιβραδύνει). Δώστε μια εξήγηση.

Δίδονται η μάζα του δορυφόρου, η μάζα και η ακτίνα της Γης, και η σταθερά $G$ (δείτε το $1^o$ Θέμα).



## ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) Ο νόμος Νεύτωνα

$m\vec{a} = -\frac{GM_\oplus m}{r^2}\hat{r} - \frac{1}{2}C_D S\rho v^2 \frac{\vec{v}}{v}$,

με $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta} \approx -r\dot{\theta}^2\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta}$ και $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \approx r\dot{\theta}\hat{\theta}$ δίνει στην $\hat{r}$ διεύθυνση

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r^3}} \tag{1}$$

και στην $\hat{\theta}$ διεύθυνση

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -\frac{1}{2}C_D S\rho r^2\dot{\theta}^2 \,. \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας στην εξ. (2) το $\dot{\theta}$ από την εξ. (1) προκύπτει

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{GM_\oplus r}) = -\frac{C_D S\rho GM_\oplus}{2m} \Leftrightarrow$$
$$-\frac{dr}{dt} = \frac{C_D S\rho\sqrt{GM_\oplus r}}{m} \,. \tag{3}$$

(β) Θεωρώντας σταθερή την πυκνότητα $\rho$ η προηγούμενη σχέση δίνει

$$-\int_{R_\oplus + h_0}^{r} r^{-1/2}dr = \frac{C_D S\rho\sqrt{GM_\oplus}}{m}\int_0^t dt \Leftrightarrow$$
$$2\left(\sqrt{R_\oplus + h_0} - \sqrt{r}\right) = \frac{C_D S\rho\sqrt{GM_\oplus}}{m}t \,.$$

Ο δορυφόρος θα φτάσει στη γη ($r = R_\oplus$) σε χρόνο

$$t = \frac{2m\left(\sqrt{R_\oplus + h_0} - \sqrt{R_\oplus}\right)}{C_D S\rho\sqrt{GM_\oplus}} \,.$$

Η αντικατάσταση δίνει $t =$

$$\frac{2\times 5900\left(\sqrt{6.4\times 10^6 + 3.5\times 10^5} - \sqrt{6.4\times 10^6}\right)}{2\times 30\times 4\times 10^{-12}\sqrt{6.67\times 10^{-11}\times 6\times 10^{24}}}\ \mathrm{s}$$
$$= 1.7\times 10^8\ \mathrm{s}\ ,\ \text{ή } t = 5.3 \text{ χρόνια.}$$

Ένας απλούστερος υπολογισμός που αρκεί για να πάρουμε τη σωστή τάξη μεγέθους του αποτελέσματος, είναι να θεωρήσουμε στην εξ. (3) $dr/dt \approx \Delta r/\Delta t = -h_0/t$ και $r \approx R_\oplus$, οπότε έχουμε

$$t \approx \frac{mh_0}{C_D S\rho\sqrt{GM_\oplus R_\oplus}} \,.$$

(Στην περίπτωσή μας η αντικατάσταση δίνει πάλι $t = 5.3$ χρόνια!)

Η αυξημένη ηλιακή δραστηριότητα αυξάνει την πυκνότητα οπότε η αντίσταση γίνεται εντονότερη και ο χρόνος πτώσης μειώνεται.

Θέμα 2ο:

(α) Όρια κίνησης (λύσεις της $V(x) = E$): $x_{0+} = (E/A_+)^{1/\lambda}$ και $x_{0-} = -(E/A_-)^{1/\lambda}$.
Μέγιστη ταχύτητα στο $x = 0$ όπου το $V(x)$ είναι ελάχιστο:

$E = \frac{mv_{\max}^2}{2} + V(0) \Leftrightarrow v_{\max} = \sqrt{2E/m}$.

(β) Με $dt = \frac{dx}{v} = \pm\frac{dx}{|v|} = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}}$ (όπου $\pm$ το πρόσημο της ταχύτητας), βρίσκουμε το χρόνο για την κίνηση από το $x = 0$ στο $x = x_{0+}$:

$$t_1 = \int_0^{x_{0+}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - A_+x^\lambda\right)}} \overset{\xi = x/x_{0+}}{=\!=\!=}$$
$$x_{0+}\sqrt{\frac{m}{2E}}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^\lambda}} = \frac{E^{1/\lambda - 1/2}}{A_+^{1/\lambda}}\sqrt{\frac{\pi m}{2}}\frac{\Gamma(1+1/\lambda)}{\Gamma(1/2+1/\lambda)} .$$

Όμοια για την κίνηση από το $x = x_{0+}$ στο $x = 0$ βρίσκουμε ότι γίνεται σε χρόνο $t_2 = t_1$, για την κίνηση από το $x = 0$ στο $x = x_{0-}$ βρίσκουμε ότι γίνεται σε χρόνο

$$t_3 = \frac{E^{1/\lambda - 1/2}}{A_-^{1/\lambda}}\sqrt{\frac{\pi m}{2}}\frac{\Gamma(1+1/\lambda)}{\Gamma(1/2+1/\lambda)}$$

και για την κίνηση από το $x = x_{0-}$ στο $x = 0$ βρίσκουμε ότι γίνεται σε χρόνο $t_4 = t_3$.
Η περίοδος είναι $T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \Leftrightarrow$

$$T = \left(\frac{1}{A_+^{1/\lambda}} + \frac{1}{A_-^{1/\lambda}}\right)E^{1/\lambda - 1/2}\sqrt{2\pi m}\frac{\Gamma(1+1/\lambda)}{\Gamma(1/2+1/\lambda)} \,.$$

Για $\lambda \neq 2$ η περίοδος εξαρτάται από την ενέργεια.

(γ) Για κάθε ενέργεια έχουμε κλειστές καμπύλες φάσης με άκρα τα $x_{0-}$, $x_{0+}$ στον άξονα των θέσεων (με $x_{0+} < |x_{0-}|$ αφού $A_+ > A_-$) και $\pm v_{\max}$ στον άξονα των ταχυτήτων.

($\delta_1$) Σώμα κινείται στην περιοχή $x \leq 0$ δεμένο σε ελατήριο (θέση φυσικού μήκους η $x = 0$), ενώ στο $x = 0$ υπάρχει ελαστικός τοίχος (ώστε η περιοχή $x > 0$ δεν είναι επιτρεπτή).

($\delta_2$) Σώμα και ελατήριο (θέση φυσικού μήκους η $x = 0$). Το σώμα δεν είναι δεμένο στο ελατήριο, οπότε του ασκείται δύναμη μόνο όταν το ελατήριο είναι συμπιεσμένο (για $x < 0$).

Θέμα $3^o$:

(α) Εξισώνοντας με την επιτάχυνση εκ της κεντρικής δύναμης έχουμε ότι η $\theta$-συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι 0,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} = 0 \ ,$$

ενώ η ακτινική συνιστώσα είναι,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{F(r)}{m} \ .$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει $r^2\dot{\theta} = L/m =$ σταθερό ($2^{ος}$ νόμος του Kepler), ενώ αν στη δεύτερη αντικαταστήσουμε $u = 1/r$, $\dot{r} = -Lu'(\theta)/m$,

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \ ,$$

παίρνουμε,

$$u''(\theta) + u^{'} = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \ .$$

(β)

$$V(r) = -\int F(r)dr = -\frac{L^2}{2mr^2}\left(1 + \frac{d^2}{2r^2}\right) \ ,$$

$$V'(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{L^2d^2}{4mr^4} \, .$$

(γ) Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, $\frac{m\dot{r}^2}{2} + V'(r) = E$ με $\dot{r} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$ δίνει $\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{d^2u^4}{2}}$, οπότε με $k = 2mE/L^2$ παίρνουμε τη ζητούμενη.

(δ) Για $k = 0$ (δηλ. $E = 0$) είναι $\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{d}\int\frac{du}{u^2}$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε $\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{d}(r_0 - r)$.

Τα ερωτήματα (γ) και (δ) μπορούν να απαντηθούν και ως ακολούθως:

(γ) $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \Leftrightarrow u'' = d^2u^3$ .
Με $u' = y$, $u'' = \frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{du}y$ προκύπτει $ydy = d^2u^3du \Leftrightarrow y^2 = k + d^2u^4/2$ όπου $k$ σταθερά. Άρα $u' = \pm\sqrt{k + d^2u^4/2}$ και προκύπτει η ζητούμενη.

(δ) Για $k = 0$ είναι $\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{d}\int\frac{du}{u^2}$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε $\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{d}(r_0 - r)$.

Η ενέργεια είναι $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V'(r)$ και αντικαθιστώντας $\dot{r} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$ και τη συνάρτηση $V'(r)$ προκύπτει $E = \frac{L^2k}{2m}$. Για $k = 0$ είναι $E = 0$.

Θέμα $4^o$:

(1) $r_\pi = \alpha(1 - e)$, $r_\alpha = \alpha(1 + e)$, $r_\pi/r_\alpha \equiv \lambda$, $\Leftrightarrow$ $e = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$.
(2) $E_0 = -\frac{GM}{\alpha}$, $2\alpha = 2R_\oplus + 580 + 575$.
(3) $T_0 \approx 2\pi\sqrt{\frac{R_\oplus}{g}}$.
(4) $V_0 \approx 2\pi\frac{R_\oplus}{T_0}$.
(5) Αφαιρέθηκε ενέργεια από τον δορυφόρο, με ανασχετικούς πυραύλους.
(6) Αυξήθηκε η εκκεντρότητα, ελαττώθηκε η περίοδος.
(7) Καθώς ο δορυφόρος κινείται σε ελλειπτική τροχιά μικρότερου ημιάξονα, από το νόμο του Kepler περιστρέφεται με μικρότερη περίοδο, δηλ., αυξάνει η ταχύτητά του (παράδοξο του δορυφόρου, σελ. 238, βιβλίου ΚΤ).