Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις επί πτυχίω στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 9 Μαΐου 2011
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

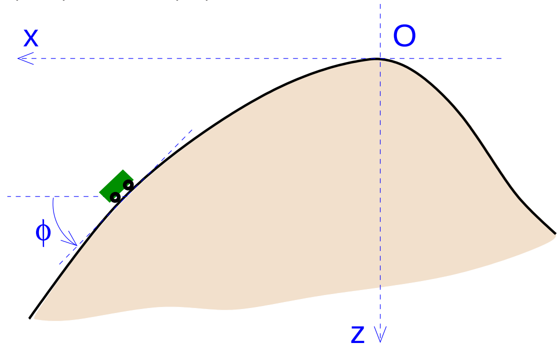
Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 17 Δεκεμβρίου 2010: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει τις εργασίες: 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐

Θέμα 1ο:

Όχημα ανεβαίνει ένα λόφο. Το σχήμα του λόφου καθορίζεται πλήρως από την συνάρτηση $\phi(x)$ (βλέπε σχήμα), η οποία στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι $\phi(x) = \lambda x^{1/2}$, με λ θετική σταθερά (μας ενδιαφέρει μόνο το μέρος $x > 0$).



(α) Σε ποια θέση το όχημα θα χάσει την επαφή του με το δρόμο αν κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v;

Δίνεται ότι η ακτίνα καμπυλότητας $\mathcal{R}$ συνδέεται με την $\phi(x)$ μέσω της $\dfrac{1}{\mathcal{R}} = \cos\phi \dfrac{d\phi}{dx}$.

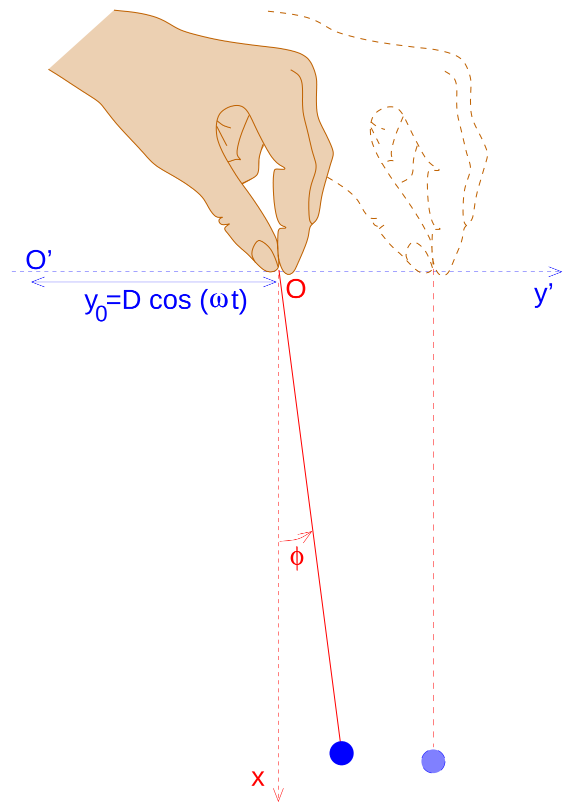
(β) Ποια είναι η ισχύς της μηχανής του οχήματος (λόγω της οποίας διατηρείται το μέτρο της ταχύτητας σταθερό);

(γ) Αν η ισχύς ήταν σταθερή, το όχημα θα έχανε την επαφή του νωρίτερα ή αργότερα σε σχέση με την περίπτωση σταθερής ταχύτητας;

(Αγνοήστε την επίδραση του ανέμου στην κίνηση.)

Θέμα 2ο:

Με το χέρι μας κρατάμε το πάνω άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους R, στο κάτω άκρο του οποίου είναι δεμένο σημειακό σώμα. Στο χρόνο $t = 0$ και ενώ το σώμα βρίσκεται ακίνητο με το νήμα κατακόρυφο, αρχίζουμε να κινούμε οριζόντια και αρμονικά το πάνω άκρο, με κυκλική συχνότητα ω και πλάτος D, όπως στο σχήμα.



(α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης του σώματος, δηλ. τη διαφορική που καθορίζει την $\phi(t)$.

(β) Λύστε την εξίσωση αυτή για μικρές αποκλίσεις από την κατακόρυφο $|\phi| \ll 1$. Ποια η συνθήκη ώστε οι αποκλίσεις να είναι πράγματι μικρές; Τι είδους κίνηση εκτελεί το σώμα; Ποια η φυσική σημασία της περίπτωσης $\omega \approx \omega_0$, όπου $\omega_0 = \sqrt{g/R}$; Τι κίνηση βλέπουμε να εκτελεί το σώμα (δηλ. ποια η οριζόντια μετατόπισή του y' από το σταθερό σημείο O') στις οριακές περιπτώσεις $\omega \ll \omega_0$, $\omega \gg \omega_0$;

(Η επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g}$ θεωρείται δεδομένη.)

Δίνονται $\vec{v}_\sigma = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_0$, $\vec{a}_\sigma = \dfrac{\Sigma\vec{F}}{m} - \vec{a}_0$, η επιτάχυνση σε πολικές $(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}$ και η ταυτότητα $\cos B - \cos C = 2\sin\dfrac{C+B}{2}\sin\dfrac{C-B}{2}$.

Θέμα 3^o:

Ένα άστρο ακτίνας R και μάζας M κινείται με σταθερή ταχύτητα V μέσα σε ένα αραιό μεσοαστρικό νεφέλωμα πυκνότητας ρ, τα άτομα του οποίου θεωρούνται ακίνητα. Κάποια από τα άτομα του νεφελώματος που ευρίσκονται σε κατάλληλη θέση ως προς την τροχιά του άστρου, έλκονται βαρυτικά από το πεδίο βαρύτητας του άστρου, προσκρούουν πάνω στην φωτόσφαιρά του όπου και τελικά απορροφώνται.

(α) Θεωρείστε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο το άστρο είναι ακίνητο και στο οποίο τα άτομα του νεφελώματος έρχονται από το «άπειρο». Γράψτε τις ποσότητες που διατηρούνται κατά τη βαρυτική σκέδαση των ατόμων αυτών από το άστρο.

(β) Υπολογίστε την παράμετρο κρούσεως b ενός ατόμου το οποίο ερχόμενο από το «άπειρο» θα διαγράψει τροχιά που εφάπτεται στη φωτόσφαιρα του άστρου ακτίνας R.

(γ) Υπολογίστε το ρυθμό προσρόφησης μεσοαστρικής ύλης dm/dt από το άστρο συναρτήσει των (ρ, V, M, R).

(δ) Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται πάνω στο άστρο λόγω της μεσοαστρικής ύλης που συναντά στην κίνησή του.

Θέμα 4^o:

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται εντός του πεδίου κεντρικών δυνάμεων $F = -5Ar^4$, $A > 0$.

(α) Σχεδιάστε σε ελεύθερη κλίμακα το υποθετικό δυναμικό. Ποιες είναι οι επιτρεπτές ενέργειες του σωματιδίου; Εξηγείστε ποιες είναι οι αντίστοιχες αποστάσεις στις οποίες αυτό κινείται.

(β) Για ποιες τιμές της ενέργειας και στροφορμής εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρω από το κέντρο των δυνάμεων; Υπολογίστε τη συχνότητα ω_0 της κίνησης στην κυκλική αυτή τροχιά.

(γ) Αν το σωματίδιο διαταραχθεί ελαφρά από την κυκλική τροχιά του, χωρίς να αλλάξει η στροφορμή, υπολογίστε τη συχνότητα των μικρών ακτινικών ταλαντώσεων γύρω από την αρχική κυκλική του τροχιά συναρτήσει μόνο του ω_0.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1$^{\text{o}}$:

(α) Η προβολή της εξίσωσης Νεύτωνα στη διεύθυνση $\hat{n}$ (κάθετα στην κίνηση) δίνει $\frac{mv^2}{\mathcal{R}} = mg\cos\phi - N$, όπου N η κάθετη αντίδραση. Άρα $N = mg\cos\phi - \frac{mv^2}{\mathcal{R}} = mg\cos\phi - mv^2\cos\phi\frac{d\phi}{dx} = mg\cos\phi\left(1-\frac{\lambda v^2}{2gx^{1/2}}\right)$. Όσο το όχημα βρίσκεται σε επαφή με το δρόμο $N>0 \Leftrightarrow 1-\frac{\lambda v^2}{2gx^{1/2}} > 0 \Leftrightarrow x > \left(\frac{\lambda v^2}{2g}\right)^2$. Η επαφή χάνεται στη θέση $x = \left(\frac{\lambda v^2}{2g}\right)^2$.

(β) $F = mg\sin\phi$ και η ισχύς $P = Fv = mgv\sin\phi = mgv\sin\left(\lambda x^{1/2}\right)$.

Αλλιώς: Η ισχύς της μηχανής είναι αντίθετη του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας $P = -\frac{d(-mgz)}{dt} = mgv_z = mgv\sin\phi$.

(γ) Αν η ισχύς ήταν σταθερή, η ταχύτητα θα αυξανόταν γιατί η ανηφόρα γίνεται όλο και λιγότερο απότομη (η ϕ μειώνεται με το χρόνο). Άρα ο όρος $\frac{\lambda v^2}{2gx^{1/2}}$ θα γινόταν μονάδα γρηγορότερα, οπότε και η αντίδραση $N = mg\cos\phi\left(1-\frac{\lambda v^2}{2gx^{1/2}}\right)$ θα μηδενιζόταν γρηγορότερα.

Θέμα 2$^{\text{o}}$:

(α) Στο επιταχυνόμενο σύστημα με αρχή το O, $\vec{a}_\sigma = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - \vec{a}_0$, με $\vec{a}_\sigma = -R\dot{\phi}^2\hat{r} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{g} = g\hat{x}$, $\vec{T} = -T\hat{r}$ η τάση του νήματος και $\vec{a}_0 = \ddot{y}_0\hat{y}' = -D\omega^2\cos(\omega t)\hat{y}'$. Η προβολή πάνω στο $\hat{\phi}$ δίνει $R\ddot{\phi} = -g\sin\phi + D\omega^2\cos(\omega t)\cos\phi$, ή $\boxed{\ddot{\phi} + \omega_0^2\sin\phi = \frac{D}{R}\omega^2\cos(\omega t)\cos\phi}$.

(β) Για $|\phi| \ll 1$ είναι $\sin\phi \approx \phi$, $\cos\phi \approx 1$, οπότε η εξίσωση κίνησης γίνεται γραμμική $\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = \frac{D}{R}\omega^2\cos(\omega t)$. Η λύση αποτελείται από το άθροισμα της λύσης της ομογενούς $\phi_{\text{ομ}} = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$ με μια μερική λύση $\phi_{\mu\varepsilon\rho}$. Η μερική λύση είναι της μορφής $\phi_{\mu\varepsilon\rho} = A\cos(\omega t)$. Με αντικατάσταση βρίσκουμε $A = \frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}$. Άρα $\phi(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t) + \frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)$ και $v_\sigma(t) = R\dot{\phi}(t) = aR\omega_0\cos(\omega_0 t) - bR\omega_0\sin(\omega_0 t) - \frac{D\omega^3}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(\omega t)$.

Από τις αρχικές συνθήκες $\phi(t=0) = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}$ και $v_\sigma(t=0) = \underbrace{v_\alpha}_{0} - \underbrace{v_0}_{\dot{y}_0} = 0 \Leftrightarrow a = 0$, οπότε $\boxed{\phi(t) = \frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right]}$.

Η απόκλιση από την κατακόρυφο είναι πράγματι μικρή αν $\boxed{\frac{2D}{R}\frac{\omega^2}{|\omega_0^2-\omega^2|} \ll 1}$.

Το σώμα εκτελεί σύνθεση ταλαντώσεων, μια με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος ω_0 και μια δεύτερη με τη συχνότητα του διεγέρτη ω.

Για $\omega \approx \omega_0$ το πλάτος μεγιστοποιείται (συντονισμός).

Η λύση, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cos B - \cos C = 2\sin\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2}$, μπορεί να γραφεί σαν $\phi(t) = \frac{2D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)$ και εκφράζει διακρότημα για $\omega \approx \omega_0$.

$y' = y_0 + R\phi = D\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t) + D\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\cos(\omega_0 t)$

Αν $\omega \ll \omega_0$, $y' \approx D\cos(\omega t) = y_0$, ενώ αν $\omega \gg \omega_0$, $y' \approx D\cos(\omega_0 t)$.

Η $\hat{r}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής δίνει $-R\dot{\phi}^2 = g\cos\phi - \frac{T}{m} + D\omega^2\cos(\omega t)\sin\phi \Leftrightarrow \frac{T}{m\omega_0^2 R} = \cos\phi + \frac{\dot{\phi}^2}{\omega_0^2} + \frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos(\omega t)\sin\phi$.

Στην περίπτωση $|\phi| \ll 1$ προκύπτει

$$\frac{T}{m\omega_0^2 R} = 1 - \frac{\phi^2}{2} + \frac{\dot{\phi}^2}{\omega_0^2} + \frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos(\omega t)\phi$$

$$= 1 + \left(\frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2\left[\sin^2(\omega_0 t) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega t) - 2\frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\cos^2(\omega t) - \frac{1}{2}\cos^2(\omega_0 t) - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos^2(\omega t) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos(\omega t)\cos(\omega_0 t)\right].$$

Παρότι $\left(\frac{D}{R}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2 \ll 1$, για $\omega \gg \omega_0$ μπορεί να γίνει $T < 0$.

Στην περίπτωση $\omega \gg \omega_0$ είναι $\frac{T}{m\omega_0^2 R} \approx 1 + \left(\frac{D}{R}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left[1 - 2\cos^2(\omega t) + \cos(\omega t)\cos(\omega_0 t)\right]$ με ελάχιστη τιμή $\frac{T_{\min}}{m\omega_0^2 R} \approx 1 - 2\left(\frac{D}{R}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$, οπότε το νήμα χαλαρώνει μετά από κάποια στιγμή αν $\frac{D}{R}\frac{\omega}{\omega_0} > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Θέμα 3^o:

(α) (E, L)

(β) $b = R(1 + 2GM/RV^2)^{1/2}$

(γ) $dm/dt = \rho\pi V R^2(1 + 2GM/RV^2)$

(δ) $F = (dm/dt)V$

Θέμα 4^o:

(α) $V' = -\int F dr + \frac{L^2}{2mr^2} = Ar^5 + \frac{L^2}{2mr^2}$

(β) $\frac{dV'}{dr} = 0 \Leftrightarrow L = \left(5mAr_0^7\right)^{1/2}$

$E = V'(r_0) \Leftrightarrow E = \frac{7}{2}Ar_0^5$

$\omega_0 = \frac{L}{mr_0^2} \Leftrightarrow \omega_0 = \left(\frac{5Ar_0^3}{m}\right)^{1/2}$

(γ) Γύρω από το r_0, $V'(r) \approx V'(r_0) + \left.\frac{dV'}{dr}\right|_{r_0}(r - r_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r_0}(r - r_0)^2 = \frac{7}{2}Ar_0^5 + \frac{35}{2}Ar_0^3(r - r_0)^2$. Η διαφόριση του ολοκληρώματος ενέργειας $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V'(r) = E + \delta E$ δίνει $m\ddot{r} + \left.\frac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r_0}(r - r_0) = 0$, οπότε οι μικρές ακτινικές ταλαντώσεις έχουν συχνότητα $\omega = \left(\frac{35Ar_0^3}{m}\right)^{1/2} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{7}\omega_0$.