Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 16 Φεβρουαρίου 2011
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

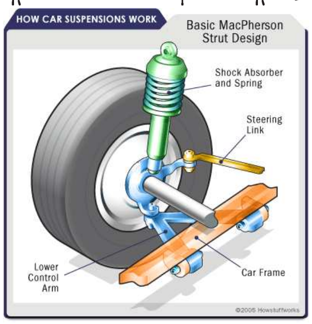
Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _

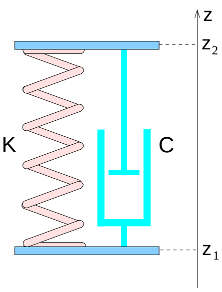
Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 17 Δεκεμβρίου 2010: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει τις εργασίες: 1^η ☐ 2^η ☐ 3^η ☐ 4^η ☐ 5^η ☐ 6^η ☐ 7^η ☐ 8^η ☐ 9^η ☐

Θέμα 1^o:

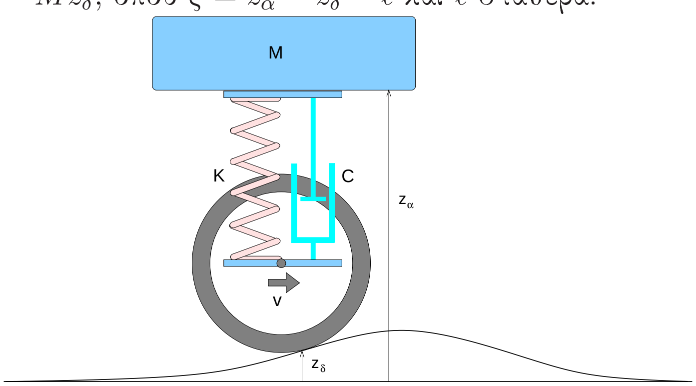
Τα κύρια μέρη της ανάρτησης των αυτοκινήτων είναι ελατήρια και αποσβεστήρες (αμορτισέρ).





Το ιδανικό ελατήριο του σχήματος ασκεί δύναμη $\vec{F}_K = -K\,(z_2 - z_1 - \ell_0)\,\hat{z}$ στο πάνω άκρο και $-\vec{F}_K$ στο κάτω άκρο, όπου K η σταθερά του ελατηρίου και ℓ_0 το φυσικό του μήκος. Ο ιδανικός αποσβεστήρας του σχήματος ασκεί δύναμη ανάλογη της σχετικής ταχύτητας των άκρων του, δηλ. $\vec{F}_C = -C\,(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)\,\hat{z}$ στο πάνω άκρο και $-\vec{F}_C$ στο κάτω άκρο, όπου C η σταθερά του αποσβεστήρα.

(α) Δείξτε ότι για το απλό μοντέλο του παρακάτω σχήματος η θέση του αμαξώματος z_α σχετίζεται με το σχήμα του δρόμου z_δ μέσω της $M\ddot{\zeta}+C\dot{\zeta}+K\zeta = -M\ddot{z}_\delta$, όπου $\zeta = z_\alpha - z_\delta - \ell$ και ℓ σταθερά.



Στο μοντέλο αυτό που αφορά το ένα τέταρτο του αυτοκινήτου αγνοούμε την αλληλεπίδραση με το υπόλοιπο μέρος, θεωρούμε τα λάστιχα άκαμπτα, τους τροχούς αμελητέας μάζας και το δρόμο σχεδόν οριζόντιο (την κλίση του μικρή και την καμπυλότητά του μικρή σε σχέση με αυτή του τροχού.)

(β) Έστω το αυτοκίνητο έχει σταθερή οριζόντια ταχύτητα $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} = v$ και κινείται σε δρόμο με $z_\delta = z_0 \sin \dfrac{2\pi x}{\lambda}$, οπότε $z_\delta = z_0 \sin(\omega t)$ με $\omega = \dfrac{2\pi v}{\lambda}$. Για να απλοποιηθούν οι πράξεις θεωρείστε $\omega = 1$ και $M = 1$. Βρείτε την επιτάχυνση που νοιώθουν οι επιβάτες $\ddot{z}_\alpha(t)$ σε «μεγάλους» χρόνους (αγνοώντας όρους που φθίνουν εκθετικά). Ποια η μέγιστη τιμή της; Ποια η συνθήκη ώστε ο τροχός, θεωρούμενος αβαρής, να μην χάνει ποτέ την επαφή με το δρόμο;

Θέμα 2^o:

Έστω δύναμη $\vec{F} = \dfrac{3\cos^2\theta - 1}{r^4}\hat{r} + \dfrac{a\sin\theta\cos\theta}{r^4}\hat{\theta}$, σε σφαιρικές συντεταγμένες $(r\,,\theta\,,\phi)$, όπου a σταθερά.

(α) Βρείτε το έργο της δύναμης αυτής για τις ακόλουθες διαδρομές:

(α_1) Από το σημείο $A(x=1\,,y=0\,,z=0)$ στο σημείο $B(x=2\,,y=0\,,z=0)$ πάνω στην ευθεία $y=0\,,z=0$ (ή σε σφαιρικές $\theta=\pi/2\,,\phi=0$).

(α_2) Από το σημείο $B(x=2\,,y=0\,,z=0)$ στο σημείο $C(x=0\,,y=0\,,z=2)$ πάνω στο τεταρτοκύκλιο $x^2+z^2=4\,,y=0$ (ή $r=2\,,\phi=0$).

(α_3) Από το σημείο $C(x=0\,,y=0\,,z=2)$ στο σημείο $D(x=0\,,y=0\,,z=1)$ πάνω στην ευθεία $x=0\,,y=0$ (ή $\theta=0\,,\phi=0$).

(α_4) Από το σημείο $D(x=0\,,y=0\,,z=1)$ στο σημείο $A(x=1\,,y=0\,,z=0)$ πάνω στο τεταρτοκύκλιο $x^2+z^2=1\,,y=0$ (ή $r=1\,,\phi=0$).

(β) Από τα αποτελέσματά σας στο ερώτημα (α) βρείτε για ποια τιμή της σταθεράς a ίσως η $\vec{F}$ είναι συντηρητική. Δείξτε ότι πράγματι είναι συντηρητική για αυτή την τιμή της a βρίσκοντας την δυναμική ενέργεια $V(r\,,\theta\,,\phi)$ και υπολογίστε τα έργα στις διαδρομές του ερωτήματος (α) χρησιμοποιώντας την.

Δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες η κλίση $\vec{\nabla}V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\phi}$ και η απειροστή μετατόπιση $d\vec{r} = dr\ \hat{r} + rd\theta\ \hat{\theta} + r\sin\theta\ d\phi\ \hat{\phi}$.

Θέμα 3^o:

Υποθέστε ότι η Γη και ο Ερμής διαγράφουν συνεπίπεδες κυκλικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο, ακτίνων 1 και 0.4 AU αντίστοιχα (1 AU = αστρονομική μονάδα = 150 εκατ. km). Η ταχύτητα της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι $v_o = 30$ km/sec, ενώ η ταχύτητα του Ερμή περί τον Ήλιο είναι v_E. Μια διαστημική αποστολή προς τον πλανήτη Ερμή ακολουθεί την εξής ειδική τροχιά : Όταν το διαστημόπλοιο βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη Γη και στην σκοτεινή πλευρά της, αναφλέγονται οι προωθητικοί του πύραυλοι την κατάλληλη στιγμή και του επιτρέπουν να ελευθερωθεί από το πεδίο της Γης και να κατευθυνθεί προς τον Ερμή. Έστω v_1 η αρχική ταχύτητα του διαστημοπλοίου στην ειδική αυτή τροχιά, όταν ξεκινά το ταξίδι του από τη χαμηλή κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη.

(α) Για ποια τιμή της ταχύτητας v_1 μπαίνει το διαστημόπλοιο στην ειδική αυτή τροχιά προς τον Ερμή;

(β) Υπολογίστε το χρόνο T_o για να φθάσει το διαστημόπλοιο στον Ερμή.

(γ) Υπολογίστε την ταχύτητα v_2 του διαστημοπλοίου όταν αυτό φθάσει στον Ερμή. Τι ταχύτητα πρέπει να δώσουν οι προωθητικοί πύραυλοι στο διαστημόπλοιο για να μπεί αυτό σε τροχιά γύρω από τον Ερμή;

(δ) Ποια πρέπει να είναι η σχετική γωνιακή απόσταση του Ερμή και της Γης ως προς τον Ήλιο για την πραγματοποίηση αυτής της ειδικής τροχιάς; (Η στροφορμή του Ερμή λόγω της περιφοράς του γύρω από τον Ήλιο είναι ομόρροπη με αυτή της Γης.)

(ε) Κάθε πόσους μήνες η Γη και ο Ερμής ευρίσκονται στη σωστή σχετική γωνιακή θέση ως προς τον Ήλιο για να μπορεί να πραγματοποιηθεί αυτό το ταξίδι;

Θέμα 4^o:

Ενα σώμα μάζας m κινείται στο κεντρικό πεδίο δυνάμεων

$$V(r) = -\frac{k}{r} - \frac{\epsilon}{r^2}, \qquad k > 0\,.$$

Επιζητούμε να υπολογίσουμε και να συζητήσουμε το είδος της τροχιάς που διαγράφει αυτό το σώμα στο συγκεκριμένο πεδίο.

(α) Αποδείξτε ότι η τροχιά είναι επίπεδη και η εμβαδική ταχύτητα είναι σταθερή. Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες (r, θ) υπολογίστε την επιτάχυνση που αισθάνεται το σώμα. Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την τροχιά του σώματος στο συγκεκριμένο πεδίο είναι:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{2m\epsilon}{L^2}\right) u = \frac{km}{L^2}\,, \text{ όπου } u \equiv \frac{1}{r}\,.$$

(β) Επιλύστε την προηγούμενη διαφορική εξίσωση στην περίπτωση όπου $2m\epsilon/L^2 < 1$, υπολογίζοντας τελικά την εξάρτηση της απόστασης του σώματος από το κέντρο του πεδίου, $r(\theta)$.

(γ) Δείξτε ότι η κίνηση του σώματος είναι ίδια με αυτή του γνωστού προβλήματος του Kepler (δηλ., όταν $\epsilon = 0$ στην δεδομένη έκφραση του πεδίου) όπου όμως χρησιμοποιούμε ένα σύστημα συντεταγμένων το οποίο περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του πεδίου με κάποια γωνιακή ταχύτητα ω. Υπολογίστε αυτή τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω.

(δ) Για αρνητική συνολική ενέργεια δείξτε ότι αν ο δεύτερος όρος της δυναμικής ενέργειας $-\epsilon/r^2$ είναι πολύ μικρός εν σχέσει με τον όρο Kepler $-k/r$ (συγκεκριμένα θεωρείστε ότι $|\epsilon| \ll L^2/m$), τότε η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του περικέντρου της τροχιάς είναι

$$\Omega \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi m\epsilon}{L^2 T}\,,$$

όπου T είναι η περίοδος της τροχιάς.

(ε) Το περιήλιο της τροχιάς του Ερμή παρατηρείται ότι μεταπίπτει γύρω από την Ήλιο με γωνιακή ταχύτητα $\Omega \equiv \Delta\theta/\Delta t$ ίση με 43 δευτερόλεπτα τόξου ανά αιώνα. Δείξτε ότι αυτή η μετάθεση του περιηλίου της τροχιάς του Ερμή μπορεί να εξηγηθεί σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση αν η αδιάστατη ποσότητα $\eta = \epsilon/k\alpha$, με α τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιάς (η οποία σημειωτέον είναι ένα μέτρο της διαταραχής της δυναμικής ενέργειας $-\epsilon/r^2$ εν σχέσει με τη δυναμική ενέργεια Kepler $-k/r$) είναι συγκεκριμένα για την περίπτωση του Ερμή ίση με

$$\eta = \frac{\Omega(1 - e^2)T}{2\pi} = 7.6 \times 10^{-8}\,.$$

Δίδεται η εκκεντρότητα της τροχιάς του Ερμή $e = 0.206$, η περίοδός του $T = 0.24$ έτη και ότι ένα ακτίνιο ισοδυναμεί με 206265 δευτερόλεπτα τόξου.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) $M\ddot{z}_\alpha\hat{z} = -Mg\hat{z} - K\left(z_2 - z_1 - \ell_0\right)\hat{z} - C\left(\dot{z}_2 - \dot{z}_1\right)\hat{z}$ με $z_2 = z_\alpha$ και $z_1 = z_\delta + R$, όπου R η ακτίνα του τροχού. Αντικαθιστώντας έχουμε $M\ddot{z}_\alpha + K\left(z_\alpha - z_\delta - R - \ell_0 + \dfrac{Mg}{K}\right) + C\left(\dot{z}_\alpha - \dot{z}_\delta\right) = 0$, ή $M\ddot{\zeta} + C\dot{\zeta} + K\zeta = -M\ddot{z}_\delta$, όπου $\zeta = z_\alpha - z_\delta - \ell$ και $\ell = R + \ell_0 - \dfrac{Mg}{K} =$ σταθερά.

(β) $\ddot{z}_\delta = -\omega^2 z_0 \sin(\omega t)$, άρα $M\ddot{\zeta} + C\dot{\zeta} + K\zeta = M\omega^2 z_0 \sin(\omega t)$. Σε μεγάλους χρόνους μένει μόνο η μερική λύση (η λύση της ομογενούς φθίνει λόγω της απόσβεσης). Αντικαθιστώντας λύση της μορφής $\zeta = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ βρίσκουμε

$$\left.\begin{aligned}(k-1)A - cB = z_0\\ cA + (k-1)B = 0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{k-1}{(k-1)^2 + c^2}\, z_0 \\ B = -\dfrac{c}{(k-1)^2 + c^2}\, z_0 \end{cases}$$

όπου $k = \dfrac{K}{M\omega^2}$ και $c = \dfrac{C}{M\omega}$ (αν θέσουμε $\omega = 1$ και $M = 1$ τότε $k = K$, $c = C$).

Είναι $z_\alpha = \zeta + z_\delta + \ell$ οπότε $\ddot{z}_\alpha = \ddot{\zeta} + \ddot{z}_\delta = -\omega^2\left(A + z_0\right)\sin(\omega t) - \omega^2 B\cos(\omega t) = \dfrac{(k - k^2 - c^2)\sin(\omega t) + c\cos(\omega t)}{(k-1)^2 + c^2}\omega^2 z_0$.

Με $\tan\phi = \dfrac{k - k^2 - c^2}{c}$, $\phi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε $k - k^2 - c^2 = \sqrt{(k-k^2-c^2)^2 + c^2}\ \sin\phi$, $c = \sqrt{(k-k^2-c^2)^2 + c^2}\ \cos\phi$, η επιτάχυνση γράφεται $\ddot{z}_\alpha = a_{\max}\cos(\omega t - \phi)$ όπου

$$a_{\max} = \frac{\sqrt{(k-k^2-c^2)^2 + c^2}}{(k-1)^2 + c^2}\ \omega^2 z_0$$

η μέγιστη τιμή της.

Για το σύστημα του αμαξώματος με τον τροχό είναι $M\ddot{z}_\alpha\hat{z} = N\hat{z} - Mg\hat{z} \Leftrightarrow N = M(g + \ddot{z}_\alpha)$. Άρα για να είναι $N > 0$ πρέπει $\ddot{z}_\alpha > -g$ για κάθε χρόνο. Επομένως και η ελάχιστη τιμή του $\ddot{z}_\alpha$, η οποία είναι $-a_{\max}$, πρέπει να είναι μεγαλύτερη του $-g$, δηλ. $-a_{\max} > -g \Leftrightarrow a_{\max} < g$.[1]

Θέμα 2ο:

(α_1) $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$ και το r μεταβάλλεται από 1 στο σημείο A σε 2 στο σημείο B. Άρα $d\vec{r} = dr\ \hat{r}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\dfrac{1}{r^4}dr$ και $W_{\rm AB} = -\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{r^4}dr = \left[\frac{1}{3r^3}\right]_1^2 = -\frac{7}{24}$.

(α_2) $\phi = 0$, $r = 2$ και το θ μεταβάλλεται από $\pi/2$ στο σημείο B, σε 0 στο σημείο C. Άρα $d\vec{r} = 2d\theta\ \hat{\theta}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \dfrac{a\sin\theta\cos\theta}{8}d\theta$ και $W_{\rm BC} = \displaystyle\int_{\pi/2}^0 \frac{a\sin\theta\cos\theta}{8}d\theta = \left[\frac{a\sin^2\theta}{16}\right]_{\pi/2}^0 = -\frac{a}{16}$.

(α_3) $\theta = 0$, $\phi = 0$ και το r μεταβάλλεται από 2 στο σημείο C σε 1 στο σημείο D. Άρα $d\vec{r} = dr\ \hat{r}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \dfrac{2}{r^4}dr$ και $W_{\rm CD} = \displaystyle\int_2^1 \frac{2}{r^4}dr = \left[\frac{-2}{3r^3}\right]_2^1 = -\frac{7}{12}$.

(α_4) $\phi = 0$, $r = 1$ και το θ μεταβάλλεται από 0 στο σημείο D, σε $\pi/2$ στο σημείο A. Άρα $d\vec{r} = d\theta\ \hat{\theta}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = a\sin\theta\cos\theta d\theta$ και $W_{\rm DA} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} a\sin\theta\cos\theta\ d\theta = \left[\frac{a\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{a}{2}$.

(β) Αν η δύναμη είναι συντηρητική πρέπει το έργο της στην κλειστή διαδρομή του προηγούμενου ερωτήματος να είναι μηδέν. Είναι $W_{o\lambda} = W_{\rm AB} + W_{\rm BC} + W_{\rm CD} + W_{\rm DA} = \dfrac{7}{16}(a-2)$, οπότε $a = 2$ είναι η αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι η $\vec{F}$ συντηρητική.

Για $a = 2$ πρέπει $\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Leftrightarrow \dfrac{3\cos^2\theta - 1}{r^4}\hat{r} + \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r^4}\hat{\theta} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\phi}$, άρα πρέπει να ισχύουν $\dfrac{\partial V}{\partial r} = -\dfrac{3\cos^2\theta - 1}{r^4}$, $\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = -\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r^3}$ και $\dfrac{\partial V}{\partial\phi} = 0$. Ολοκληρώνοντας την πρώτη έχουμε $V = \dfrac{3\cos^2\theta - 1}{3r^3} + f(\theta,\phi)$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη και τρίτη εξίσωση προκύπτει ότι $\partial f/\partial\theta = 0$ και $\partial f/\partial\phi = 0$, αντίστοιχα, επομένως η f είναι αυθαίρετη προσθετική σταθερά. Οπότε η δύναμη είναι πράγματι συντηρητική με την δυναμική ενέργεια (αγνοώντας την προσθετική σταθερά κάτι που δεν βλάπτει την γενικότητα) $V = \dfrac{3\cos^2\theta - 1}{3r^3}$.

Η τιμή της δυναμικής ενέργειας στα διάφορα σημεία:
$V_{\rm A} = V(r = 1, \theta = \pi/2) = -1/3$,
$V_{\rm B} = V(r = 2, \theta = \pi/2) = -1/24$,
$V_{\rm C} = V(r = 2, \theta = 0) = 1/12$,
$V_{\rm D} = V(r = 1, \theta = 0) = 2/3$.
Έτσι προκύπτουν τα έργα:
$W_{\rm AB} = V_{\rm A} - V_{\rm B} = -7/24$,
$W_{\rm BC} = V_{\rm B} - V_{\rm C} = -1/8$,
$W_{\rm CD} = V_{\rm C} - V_{\rm D} = -7/12$,
$W_{\rm DA} = V_{\rm D} - V_{\rm A} = 1$.

[1] Αν $a_{\max} \geq g$ η επαφή χάνεται σε σημείο όπου $\cos(\omega t - \phi) = -\dfrac{g}{a_{\max}} \Leftrightarrow \sin\left(\omega t - \phi - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{g}{a_{\max}} \Leftrightarrow z_\delta = z_0\cos\left(\phi + \arcsin\dfrac{g}{a_{\max}}\right)$.

Θέμα 3ο:

Το διαστημόπλοιο τίθεται σε τροχιά γύρω από τη Γη και την κατάλληλη στιγμή (όσον αφορά την αρχική θέση του Ερμή ως προς τη Γη), τίθενται σε λειτουργία οι προωθητικοί του πύραυλοι που του δίνουν την απαιτούμενη ταχύτητα έτσι ώστε να διαγράψει ελλειπτική τροχιά που θα έχει περίκεντρο τη θέση της Γης εκείνη τη στιγμή και απόκεντρο τη θέση του Ερμή όταν θα φθάνει εκεί. Έστω (Γ_1, E_1) και (Γ_2, E_2) οι αρχικές και τελικές θέσεις της Γης και του Ερμή στο ταξίδι του Διαστημοπλοίου (Δ). Στις τροχιές των δύο πλανητών, οι μέσες ταχύτητες της Γης και του Ερμή είναι 30 km/sec και 47.43 km/sec αντίστοιχα. Ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς αυτής Hohman είναι,

$$a_H = \frac{1+0.4}{2} = 0.7\,\mathrm{AU}\ .$$

(α) Η ταχύτητα v_1 του Δ στο απόκεντρο της τροχιάς Hohman είναι (βλ. σελ. 245),

$$v_1 = v_\alpha = \sqrt{\frac{GM}{a_H}\frac{r_\pi}{r_\alpha}}\ .$$

Επειδή $r_\alpha = 1$ AU, $r_\pi = 0.4$ AU, $a_H = 0.7$, $\sqrt{GM/(1\mathrm{AU})} = 30$ km/sec,

$$\boxed{v_1 = v_\alpha = 30 \times \sqrt{0.4/0.7} = 22.678\,\mathrm{km/sec}\,.}$$

(β) Η χρονική διάρκεια του ταξιδιού του διαστημοπλοίου κατά μήκος της τροχιάς Hohman από το Γ_1 έως το E_2 ισούται με το ήμισυ της περιόδου περιφοράς T_H όπως υπολογίζεται από το νόμο του Kepler για ελλειπτική τροχιά με ημιάξονα $a_H = 0.7$ AU,

$$\boxed{T_H/2 = a_H^{3/2}/2 = 0.586/2 \text{ έτη} \approx 107 \text{ ημέρες}\,.}$$

(γ) Η ταχύτητα v_2 του Δ όταν φθάνει στον Ερμή είναι

$$\boxed{v_2 = v_\pi = v_a\frac{r_\alpha}{r_\pi} = 22.7 \times (1/0.4) = 56.7\,\mathrm{km/sec}\,.}$$

Εάν το διαστημόπλοιο θέλει να παραμείνει σε τροχιά γύρω από τον Ερμή, πρέπει να αποκτήσει ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του Ερμή που είναι $v_E = 47.43$ km/sec. Επομένως, οι ανασχετικοί του πύραυλοι πρέπει να του ελαττώσουν την ταχύτητα κατά

$$\boxed{\Delta v = (56.7 - 47.43)\ \mathrm{km/sec} \simeq 9.3\ \mathrm{km/sec}\,.}$$

(δ) Η περίοδος περιφοράς του Ερμή γύρω από τον Ήλιο από το νόμο του Kepler είναι περί τις 92 ημέρες. Εντός των 107 ημερών ο Ερμής έχει μετακινηθεί γύρω από τον Ήλιο κατά γωνία,

$$\phi = 360^\circ\frac{107}{92} \simeq 418^\circ = 360^\circ + 58^\circ\ .$$

Επομένως, κατά τη στιγμή της αναχώρησης του διαστημοπλοίου από τη Γη πρέπει ο Ερμής να προηγείται της Γης κατά

$$\boxed{\Delta\phi = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ}$$

έτσι ώστε όταν το διαστημόπλοιο φθάσει στο περίκεντρο της τροχιάς Hohman να συναντήσει εκεί τον Ερμή.

(ε) Σε χρόνο t ο Ερμής με περίοδο $T_E = 92$ ημερών και η Γη με περίοδο $T_\Gamma = 365$ ημερών διαγράφουν τόξα ϕ_E, ϕ_Γ έτσι ώστε $\phi_E - \phi_\Gamma = 2\pi$. Επομένως,

$$\boxed{t = \frac{T_E T_\Gamma}{T_\Gamma - T_E} = 123 \text{ ημέρες}\,.}$$

Θέμα 4ο:

(α) βλ. Σελ. 44, 192, 196

(β) Αντικαθιστώντας $u = y + \dfrac{mk}{L^2 - 2m\epsilon}$ παίρνουμε,

$$\boxed{\frac{d^2y}{d\theta^2} + \lambda^2 y = 0\,,\ \lambda^2 = 1 - \frac{2\epsilon m}{L^2}},$$

$$\boxed{y = y_0\cos\left[\lambda(\theta-\theta_0)\right]\ ,\ r = \frac{(L^2-2m\epsilon)/mk}{1+e'\cos\left[\lambda(\theta-\theta_0)\right]}}.$$

Η θ_0 μηδενίζεται με κατάλληλη επιλογή αξόνων.

(γ) Στο περιστρεφόμενο σύστημα θέλουμε $\theta' = \lambda\theta$ ώστε η τροχιά να είναι ελλειπτική $r = \dfrac{(L^2-2m\epsilon)/mk}{1+e'\cos\theta'}$. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος είναι $\omega = \dfrac{d(\theta-\theta')}{dt} = (1-\lambda)\dot\theta$.

(δ) Η μετάθεση του περιηλίου σε κάθε κλειστό κύκλο είναι $\Delta\theta = \dfrac{2\pi}{\lambda} - 2\pi$, άρα $\Omega \equiv \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{2\pi}{T}\left(\dfrac{1}{\lambda} - 1\right)$.

Αλλιώς, το Ω μπορεί να βρεθεί σαν η μέση τιμή του $\omega = (1-\lambda)\dot\theta$, με $\dot\theta = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d\theta'}{dt} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{2\pi}{T}$.

Για μικρό ϵ,

$$\boxed{\lambda^{-1} \approx 1 + \frac{m\epsilon}{L^2}\ ,\ \Omega \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \approx \frac{2\pi m\epsilon}{L^2 T}}.$$

(ε) Είναι $\Omega = 2\pi\dfrac{mka}{L^2}\dfrac{\eta}{T}$, αλλά, $\alpha(1-e^2) = \dfrac{L^2}{mk}$, οπότε $\Omega = \dfrac{2\pi\eta}{(1-e^2)T}$. Με $\dfrac{1}{1-e^2} = 1.044$, έχουμε τελικά,

$$\boxed{\eta = \frac{43 \times 0.24}{2\pi \times 1.044 \times 100 \times 206265} = 7.6 \times 10^{-8}}.$$