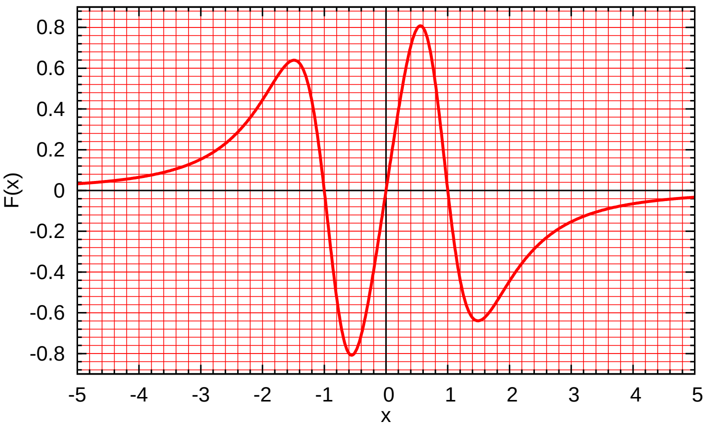
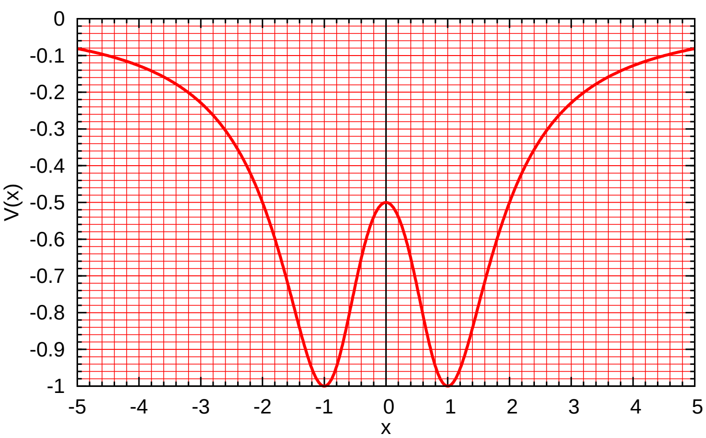
Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 17/12/2010
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

$\boxed{\text{Θέμα 1}}$: Έστω μονοδιάστατη κίνηση σώματος μοναδιαίας μάζας στο πεδίο δύναμης $F(x)$ με το ακόλουθο γράφημα (σε κατάλληλες μονάδες).



Ακολουθεί το γράφημα της αντίστοιχης δυναμικής ενέργειας (σε μεγάλες αποστάσεις $x \to \pm\infty$ τείνει στο 0). Δίνεται η συνάρτησή της $V(x) = -\dfrac{2x^2+1}{x^4+2}$ παρότι όλα τα ερωτήματα μπορούν να απαντηθούν μόνο με τη χρήση των σχημάτων.



(α) Ποια τα σημεία ισορροπίας; Ποια από αυτά είναι ευσταθή;
(β) Υπολογίστε την περίοδο μικρών ταλαντώσεων γύρω από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας. Υπόδειξη: Κοντά σε σημείο ισορροπίας x_0 είναι $F(x) \approx F'(x_0)(x-x_0)$. Εκτιμήστε το $F'(x_0)$ από το γράφημα της $F(x)$.
(γ) Σχεδιάστε σε ελεύθερη κλίμακα τις τροχιές στο χώρο φάσης $(x, \dot{x})$ καλύπτοντας όλες τις διαφορετικές συμπεριφορές ανάλογα με την ενέργεια του σώματος.
(δ) Έστω το σώμα αρχικά βρίσκεται στο $x=-2$ και έχει ταχύτητα v_0. Περιγράψτε την κίνηση στις περιπτώσεις:
(δ_1) $v_0 = 0$, (δ_2) $v_0 = 1/\sqrt{2}$, (δ_3) $v_0 = 1$, (δ_4) $v_0 = \sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Θέμα 2}}$: Ένας σκιέρ μάζας m κατεβαίνει μια χιονισμένη πλαγιά σταθερής γωνίας κλίσης ϕ, υπό την επίδραση του βάρους του, τριβής ολίσθησης με συντελεστή $\mu < \tan\phi$ και αντίστασης αέρα μέτρου $F_a = \lambda v^2$.
(α) Βρείτε την ταχύτητά του σαν συνάρτηση του μήκους x που διανύει (αρχικά $v|_{x=0} = 0$).
(β) Πόσο μήκος πρέπει να διανύσει ο σκιέρ ώστε η ταχύτητά του να αποκτήσει πρακτικά την οριακή τιμή της; Ποια είναι αυτή η οριακή τιμή;
Εφαρμόστε για $m = 70$ kg, $g = 9.8$ m s^{-2}, $\phi = 10^o = \arcsin 0.174 = \arccos 0.985$, $\mu = 0.1$, $\lambda = \frac{1}{2} C_D S \rho$ με $C_D = 0.3$, επιφάνεια $S = 1$ m^2 και πυκνότητα αέρα $\rho = 1.1$ kg m^{-3}.
(γ) Ποια θα ήταν η οριακή ταχύτητα αν φυσούσε αέρας με ταχύτητα w παράλληλα στην πλαγιά, με φορά ίδια με την κίνηση του σκιέρ; (Δεν χρειάζεται να λύσετε την εξίσωση κίνησης για να απαντήσετε.)
Εφαρμόστε για $w = 5$ Beaufort (9 m s^{-1}).
(δ) Δυο σκιέρ με ίδιο βάρος και σωματική διάπλαση κατεβαίνοντας μαζί την πλαγιά απέκτησαν οριακή ταχύτητα $\sqrt{2}$ φορές μεγαλύτερη από την οριακή που αποκτά ο καθένας όταν κατεβαίνει μόνος του. Πως το κατάφεραν αυτό;

$\boxed{\text{Θέμα 3}}$: Σε ένα αστροφυσικό δίσκο προσαύξησης, σώμα μάζας m ακολουθεί σπειροειδή τροχιά προς την κεντρική μάζα M. Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα της ταχύτητας ακολουθεί το νόμο Kepler, $v_\phi = \sqrt{GM/\varpi}$, ενώ η στροφορμή $L = m\varpi v_\phi$ ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό $\dot{L} = -\lambda$. Αν για $t=0$ η θέση του σώματος είναι $\vec{r} = \varpi_0 \hat{x}$ (δηλ. $\varpi = \varpi_0$ και $\phi = 0$), ποια η θέση του σώματος σε κάθε χρόνο, δηλ. ποια τα $\varpi(t)$ και $\phi(t)$ σε πολικές συντεταγμένες; Ποια η εξίσωση τροχιάς του σώματος;

$\boxed{\text{Θέμα 4}}$: Έχουμε σκάψει δύο ευθύγραμμα τούνελ που διαπερνούν την περιστρεφόμενη γη: Το ένα ενώνει βόρειο και νότιο πόλο (βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής). Το δεύτερο είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής και περνά από το κέντρο της γης (ενώνει δύο σημεία του ισημερινού).
(α) Αφήνουμε σώμα στο άκρο του πρώτου τούνελ (στο βόρειο πόλο). Το σώμα έχει διατομή λίγο μικρότερη από τη διατομή του τούνελ και δεν ακουμπά στα τοιχώματα όταν το αφήνουμε. Αν αγνοήσουμε τις τριβές σε πόσο χρόνο θα ξαναγυρίσει στο σημείο που το αφήσαμε;
(β) Όμοια στο δεύτερο τούνελ (στον ισημερινό).
(γ) Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και τούνελ είναι $\mu = 0.1$, ποια η θέση σαν συνάρτηση του χρόνου για την κίνηση σε κάθε ένα από τα δύο τούνελ; Θα καταλήξει το σώμα στο κέντρο της γης; Αν ναι σε πόσο χρόνο;
Θεωρήστε δεδομένο ότι η επιτάχυνση βαρύτητας στο εσωτερικό της γης μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από το κέντρο, $\vec{g} = -(g_0/R)\vec{r}$, με $g_0 = 9.8$ m/s^2, $R = 6.4 \times 10^6$ m.
Επίσης το σώμα σε κάθε περίπτωση κινείται χωρίς να χτυπά από τη μια στην άλλη πλευρά των τοιχωμάτων του τούνελ: είτε κινείται χωρίς να ακουμπά στα τοιχώματα όπως όταν το αφήνουμε, είτε, αν υπάρχει λόγος, βρίσκεται σε συνεχή επαφή με μια πλευρά.
Υπόδειξη: Για ένα τρόπο λύσης θα χρειαστεί η
$\vec{a}_\sigma = \Sigma\vec{F}/m - \vec{a}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$.
Για ένα δεύτερο τρόπο λύσης θα χρειαστεί η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες
$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}$.