Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 2 Σεπτεμβρίου 2010
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

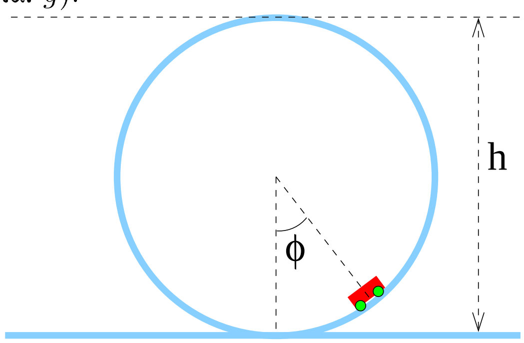
Ονοματεπώνυμο: ____, AM: __ __ __ __ __ __ __

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 4/12/2009: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1, 2**

Έχω παραδώσει τις εργασίες: 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐

Θέμα 1ο:

Σε ένα θεματικό πάρκο (luna park) ένα τρενάκι (roller coaster) εκτελεί κατακόρυφη πλήρη τροχιά η οποία έχει μέγιστο ύψος h και γίνεται με τρόπο ώστε να μην ασκείται δύναμη από τις ράγες στα βαγόνια στη θέση μέγιστου ύψους. Αν η τροχιά είναι κυκλική (ακτίνας $R = h/2$), το τρενάκι θεωρείται σημειακό σώμα και οι τριβές αγνοούνται, απαντήστε τα ακόλουθα ερωτήματα (γνωστά θεωρούνται τα h και g):



(α) Ποια η ταχύτητα στο ανώτερο σημείο ($\phi = \pi$);
(β) Ποια η ταχύτητα στο σημείο της τροχιάς που αντιστοιχεί σε τυχούσα γωνία ϕ;
(γ) Ποια η κεντρομόλος επιτάχυνση στη θέση ϕ;
(δ) Ποια η επιτρόχια επιτάχυνση στη θέση ϕ;
(ε) Ποια η επιτάχυνση που νοιώθουν οι επιβάτες (σε μονάδες g), ποια η μέγιστη τιμή της και σε ποιο σημείο υλοποιείται;

Θέμα 2ο:

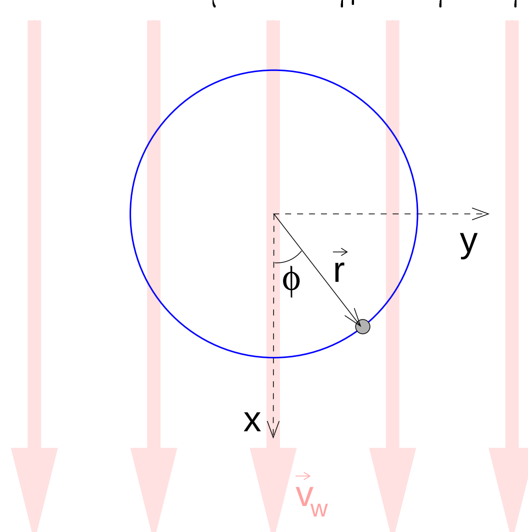
Σφαιρικό σώμα κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντια κυκλική στεφάνη ακτίνας R. Η στεφάνη είναι βυθισμένη σε ποτάμι, του οποίου το νερό κυλάει με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_w$. Το νερό ασκεί δύναμη στο σώμα (αντίσταση κίνησης μέσα σε ρευστό) η οποία είναι ανάλογη της σχετικής ταχύτητας, $\vec{F} = -c\,(\vec{v} - \vec{v}_w)$, όπου $\vec{v}$ η ταχύτητα του σώματος και c θετική σταθερά.

(α) Δείξτε ότι αν $\phi(t)$ είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος θέσης του σώματος από το κέντρο της στεφάνης ($\vec{r}$) με την ταχύτητα του νερού ($\vec{v}_w$), η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{\phi} + \dfrac{c}{m}\dot{\phi} + \dfrac{c v_w}{mR}\sin\phi = 0$.

Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε χωρίς βλάβη της γενικότητας $\vec{v}_w = v_w \hat{x}$ οπότε η ϕ είναι η γωνία των πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο της στεφάνης, βλέπε σχήμα.

Δίνονται οι εκφράσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}$.

(β) Περιγράψτε την κίνηση αν αυτή περιορίζεται σε μικρές τιμές της γωνίας $|\phi| \ll 1$. Εκτιμήστε το χρόνο στον οποίο το σώμα καταλήγει στη θέση $\phi = 0$.



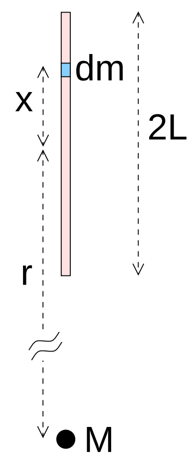
Θέμα 3^o:

Ενα σώμα μάζας m κινείται στο πεδίο της ελκτικής κεντρικής δύναμης

$$F(r) = -\frac{k}{r^3}, \qquad k > 0\,.$$

(α) Αν το σώμα είναι αρχικά ακίνητο στην απόσταση d, να υπολογισθεί ο χρόνος T_o που απαιτείται έως ότου το σώμα θα φθάσει στο κέντρο της κεντρικής δύναμης $r = 0$.
(β) Αν το σώμα έχει αρχικά στην απόσταση d τυχούσα στροφορμή L, χρησιμοποιώντας μόνο το υποθετικό δυναμικό εξηγείστε αν το σώμα θα φθάσει στην αρχή ή όχι.
(γ) Αν αρχικά $\dot{r} = 0$ και η στροφορμή του σώματος L ικανοποιεί τη σχέση $L^2 < km$, να υπολογισθεί η τροχιά του σώματος και ο χρόνος T που απαιτείται έως ότου το σώμα θα φθάσει στο κέντρο της κεντρικής δύναμης $r = 0$. Δίδεται ότι $\int\limits_0^\infty dx/\cosh^2 x = \tanh x|_0^\infty = 1\,.$
(δ) Πώς σχετίζονται οι χρόνοι T_o και T ;

Θέμα 4^o:



Ενα διαστημόπλοιο συνολικής μάζας m ταξιδεύοντας μέσα στο Γαλαξία μας συλλαμβάνεται απο το πεδίο μιάς αστρικής μελανής οπής (στη συνέχεια ΜΟ) μάζας M. Εστω ότι περιστρέφεται γύρω από την ΜΟ σε αρκετά μεγάλες αποστάσεις r σε σχέση με την ακτίνα Schwarzchild R_S της ΜΟ έτσι ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιούμε με πολύ καλή προσέγγιση Νευτώνεια βαρύτητα. Όμως, στις αποστάσεις αυτές r οι παλιρροιακές δυνάμεις μπορεί να είναι σημαντικές. Θέλουμε να υπολογίσουμε την εγγύτερη απόσταση r_0 στην οποία το διαστημόπλοιο μπορεί να βρεθεί περιστρεφόμενο με ασφάλεια γύρω από τη ΜΟ χωρίς οι παλιρροιακές δυνάμεις να το διαμελίσουν και να ρουφήξουν τους αστροναύτες του. Έστω ότι θεωρούμε το διαστημόπλοιο μονοδιάστατο συνολικού μήκους $2L$, ενώ το μήκος του αυτό $2L$ είναι στην ακτινική διεύθυνση ως προς τη μελανή οπή. Θεωρούμε επίσης ότι η μάζα του διαστημοπλοίου είναι κατανεμημένη με το μήκος $2L$ με συγκεκριμένο δεδομένο νόμο, έτσι ώστε μια στοιχειώδης μάζα dm σε απόσταση x από το κέντρο συμμετρίας του να είναι $dm = f(x)dx$. Υποθέτουμε ότι ο διαμελισμός του διαστημοπλοίου αρχίζει όταν η συνολική παλιρροιακή δύναμη που ασκείται σε έκαστο ήμισυ του σκάφους υπερβαίνει το δεκαπλάσιο του βάρους του εδώ στη Γη.

(α) Να υπολογισθεί η γενική έκφραση της παλιρροιακής δύναμης που ασκείται σε μια στοιχειώδη μάζα του διαστημοπλοίου dm που ευρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο του. Το κέντρο του διαστημοπλοίου περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά σε απόσταση r απο τη ΜΟ.

(β) Αν η μάζα του διαστημοπλοίου είναι κατανεμημένη με το ύψος του με το νόμο, $dm = (m|x|/L^2)\,dx$, να υπολογισθεί η οριακή απόσταση r_0 στην οποία θα αρχίσει ο διαμελισμός του διαστημοπλοίου, αν : $L = 1\ m$ και η αστρική ΜΟ έχει μάζα τριπλάσια αυτής του Ήλιου, δηλ., $M = 3M_\odot \approx 10^6\ M_\Gamma$, όπου $M_\odot$ είναι η μάζα του Ήλιου και M_Γ είναι η μάζα της Γής, της οποίας η ακτίνα θεωρείστε ότι είναι περίπου $6000\ km$.

(γ) Η ακτίνα Schwarzchild (εκεί όπου τα σχετικιστικά φαινόμενα είναι κυρίαρχα και σημαντικά) για μιά ΜΟ είναι $R_S = (3M/M_\odot)\,km$. Εξηγείστε αν το αποτέλεσμα για την απόσταση r_0 που προέκυψε δικαιολογεί την υπόθεση που κάναμε να χρησιμοποιήσουμε ότι το σκάφος κινείται στο πεδίο της Νευτώνειας βαρύτητας.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) Στο ανώτερο σημείο ακείται μόνο το βάρος. Άρα $\frac{mv_{\text{top}}^2}{R} = mg \Leftrightarrow \boxed{v_{\text{top}} = \sqrt{\frac{gh}{2}}}$.

(β) Η υψομετρική διαφορά μεταξύ της θέσης ϕ και του ανώτερου σημείου είναι $R + R\cos\phi$. Άρα $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_{\text{top}}^2}{2} + mg(R + R\cos\phi) \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{gh\left(\frac{3}{2} + \cos\phi\right)}}$.

(γ) Κεντρομόλος επιτάχυνση $a_\kappa = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow \boxed{a_\kappa = (3 + 2\cos\phi)\, g}$.

(δ) Επιτρόχια επιτάχυνση $ma_\varepsilon = m\vec{g} \cdot \hat{\varepsilon} \Leftrightarrow \boxed{a_\varepsilon = -g\sin\phi}$.

(ε) Ολική επιτάχυνση $a = \sqrt{a_\kappa^2 + a_\varepsilon^2} \Leftrightarrow \boxed{a = g\sqrt{3\cos^2\phi + 12\cos\phi + 10}}$.

Η μέγιστη τιμή της a αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή του $\cos\phi = 1 \Leftrightarrow \phi = 0$. Άρα $\boxed{a_{\max} = 5g \text{ στην κατώτερη θέση}}$.

Θέμα 2ο:

(α) Με $r = R$, $\dot{r} = 0$, $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{F} \cdot \hat{\phi} = -c\left(R\dot{\phi} - v_w\hat{x} \cdot \hat{\phi}\right) = -c\left(R\dot{\phi} + v_w \sin\phi\right)$, η εξίσωση Νεύτωνα στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση δίνει

$m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = \vec{F} \cdot \hat{\phi} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\phi} + \frac{c}{m}\dot{\phi} + \frac{cv_w}{mR}\sin\phi = 0}$.

(β) Για μικρές τιμές της $|\phi|$ είναι $\sin\phi \approx \phi$ και η εξίσωση κίνησης γίνεται $\ddot{\phi} + \frac{c}{m}\dot{\phi} + \frac{cv_w}{mR}\phi = 0$ (εξίσωση ταλαντωτή με απόσβεση). Η τελευταία δέχεται λύσεις της μορφής $e^{\lambda t}$, με $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{cv_w}{mR} = 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις (ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας του τριωνύμου):

- Αν $c < \frac{4mv_w}{R}$ (ασθενής απόσβεση) οι λύσεις του τριωνύμου είναι $\lambda_\pm = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{cv_w}{mR} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$, οπότε η γενική λύση είναι $\phi = De^{-ct/2m}\cos\left(\sqrt{\frac{cv_w}{mR} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\, t + C\right)$.

  Το εκθετικό (και η λύση) πρακτικά μηδενίζεται για $\frac{ct}{2m} \approx 5 \Leftrightarrow \boxed{t \approx \frac{10m}{c}}$.

- Αν $c > \frac{4mv_w}{R}$ (ισχυρή απόσβεση) οι λύσεις του τριωνύμου είναι $\lambda_\pm = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{cv_w}{mR}}$, οπότε η γενική λύση είναι $\phi = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}$. Και τα δυο μέρη φθείνουν με τον χρόνο διότι $\lambda_\pm < 0$. Το $e^{\lambda_+ t}$ πρακτικά μηδενίζεται σε χρόνο $5/|\lambda_+|$, ενώ το $e^{\lambda_- t}$ πρακτικά μηδενίζεται σε χρόνο $5/|\lambda_-|$. Αφού $|\lambda_+| < |\lambda_-|$, η συνολική λύση πρακτικά μηδενίζεται σε χρόνο $t = \frac{5}{|\lambda_+|} \Leftrightarrow$

  $$\boxed{t \approx \frac{\frac{10m}{c}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4mv_w}{cR}}}}.$$

- Αν $c = \frac{4mv_w}{R}$ (κρίσιμη απόσβεση) το τριώνυμο έχει διπλή λύση $\lambda = -\frac{c}{2m}$, οπότε η γενική λύση είναι $\phi = e^{-ct/2m}(C_1 + C_2 t)$.

  Το εκθετικό (και η λύση) πρακτικά μηδενίζεται για $\frac{ct}{2m} \approx 5 \Leftrightarrow \boxed{t \approx \frac{10m}{c}}$.

Θέμα 3ο:

(α)

$$F(r) = -\frac{k}{r^3}\,, V = -\int F(r)dr\,, E = -\frac{k}{2d^2}\,,$$

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - V(r) = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{d^2}\right)\,,$$

$$x = \frac{r}{d}\,, \dot{x} = -\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{d^2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,,$$

$$T_0\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{d^2} = \int_{x=0}^{x=1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \equiv I\,, (z = x^2)\,,$$

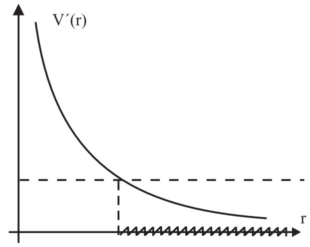
$$I = \int_{z=0}^{z=1}\frac{dz}{2\sqrt{1-z}} = -\int_{y=1}^{y=0}\frac{dy}{2\sqrt{y}} = 1\,, (y = 1 - z)\,,$$

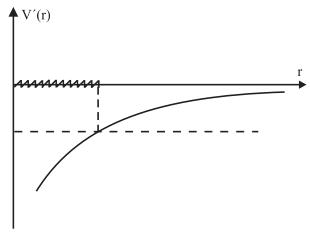
$$\Longrightarrow \boxed{T_0 = \sqrt{\tfrac{m}{k}}d^2}.$$

(β)

$$V'(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{1}{2mr^2}(mk - L^2)$$

Ανάλογα με τις 2 περιπτώσεις $mk < L^2, mk > L^2$ έχουμε αντίστοιχα:





Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα του υποθετικού δυναμικού, το σώμα θα φθάσει στην αρχή μόνο στη 2η περίπτωση της χαμηλής στροφορμής ($mk > L^2$).
(γ) Γιά απόδειξη της εξίσωσης

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \,,$$

βλ. Κ. Τσίγκανος, Εισαγωγή στη Θεωρητική Μηχανική, σελ. 193, ή, σελ. 198.
Αντικαθιστώντας την έκφραση $F(1/u) = -ku^3$ προκύπτει αμέσως η λύση:

$$r(\theta) = \frac{d}{\cosh\left(\sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}\right)\theta} \,.$$

Ο χρόνος που απαιτείται έως ότου το σώμα θα φθάσει στο κέντρο της κεντρικής δύναμης $r = 0$ είναι:

$$T = \int\limits_{\theta=0}^{\infty} \frac{mr^2}{L} d\theta = \frac{md^2}{L} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{d\theta}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}\right)\theta} \,,$$

$$\Longrightarrow T = \frac{md^2}{\sqrt{mk - L^2}} \,,$$

(δ) ο Χρόνος T_0 προκύπτει από το όριο του T για $L \longrightarrow 0$.

Θέμα 4ο:

(α) Το κέντρο του σκάφους περιστρέφεται γύρω από τη μελανή οπή σε μεγάλη απόσταση r. Σε ένα σημείο Σ_1 που είναι προς την πλευρά της μελανής οπής και απέχει απόσταση x από το κέντρο του σκάφους, η παλιρροιακή δύναμη F_1 ανά μονάδα μάζας είναι,

$$F_1 = -\frac{GM}{r^2}\left[1 - \frac{1}{(1 - x/r)^2}\right] \,.$$

Επειδή $x \ll r$ μπορούμε να προσεγγίσουμε την F_1 ως εξής,

$$F_1 = -\frac{GM}{r^2}\left[1 - \left(1 + \frac{2x}{r}\right)\right] \simeq \frac{2GM}{r^3}x \,.$$

Αντίστοιχα στο αντιδιαμετρικό σημείο Σ_2 που απέχει απόσταση $-x$ από το κέντρο του σκάφους η παλιρροιακή δύναμη είναι,

$$F_2 = -\frac{2GM}{r^3}x \,,$$

δηλαδή έχει διεύθυνση αντίθετη από τη διεύθυνση της μελανής οπής.
(β) Έστω dF_1 και dF_2 οι αντίθετες παλιρροιακές δυνάμεις που ασκούνται σε δύο στοιχειώδεις μάζες ίσες με dm που βρίσκονται συμμετρικά σε απόσταση x από το κέντρο του σκάφους το οποίο απέχει απόσταση r από την μελανή οπή. Για την δεδομένη κατανομή της μάζας του σώματος έχουμε,

$$dm = \frac{mx}{L^2}dx \,,$$

$$dF_1 = \frac{2GMdm}{r^3}x = -dF_2 \,.$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως L έχουμε,

$$F_1 = \int_0^L \frac{2GMm}{r^3L^2}x^2dx = \frac{2GMmL}{3r^3} \,.$$

Στην οριακή απόσταση r_0 εξισώνοντας την παλιρροιακή αυτή δύναμη F_1 με το δεκαπλάσιο του βάρους του διαστημοπλοίου στη Γη,

$$F_1 = 10\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^2} \,,$$

έχουμε

$$r_0^3 = \frac{1}{15}\frac{M}{M_\Gamma}R_\Gamma^2 L \,,$$

$$\Longrightarrow r_0 \approx 1340\,km \,.$$

(γ) Η ακτίνα Schwarzchild είναι $R_S \approx 9km$ και $r_0 \approx 150R_S$. Επειδή $r_0 \gg R_S$, η προσέγγιση της Νευτώνειας βαρύτητας που κάναμε ισχύει.