Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 26 Απριλίου 2010
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

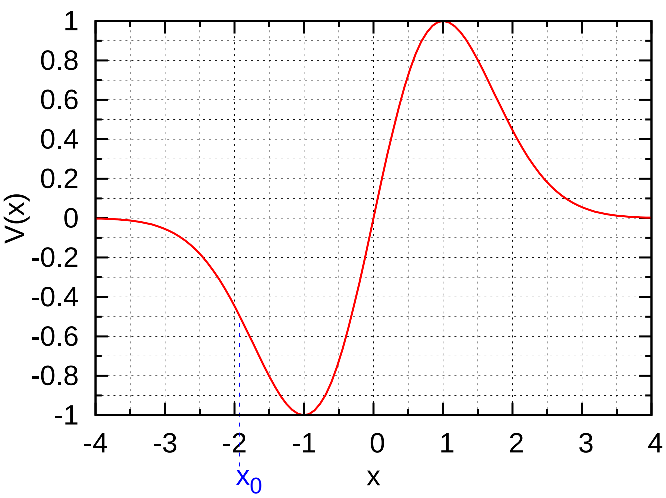
Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: _ _ _ _ _ _ _

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 4/12/2009: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1, 2**

Έχω παραδώσει τις εργασίες: 1η ☐ 2η ☐ 3η ☐ 4η ☐ 5η ☐ 6η ☐ 7η ☐ 8η ☐ 9η ☐ 10η ☐

Θέμα 1ο:

Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα σε πεδίο $V(x) = x \exp\left(\dfrac{1-x^2}{2}\right)$. Αρχικά (για $t = 0$) ξεκινά από το σημείο x_0 που φαίνεται στο σχήμα, στο οποίο $V(x_0) = -1/2$, και έχει ταχύτητα $\upsilon_0 \geq 0$.



Ζητείται η τιμή της υ_0 σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις.

(α) Το σώμα καταλήγει με μηδενική ταχύτητα στο $x = -\infty$.

(β) Το σώμα καταλήγει με ταχύτητα $\upsilon_\infty = 2$ στο $x = +\infty$.

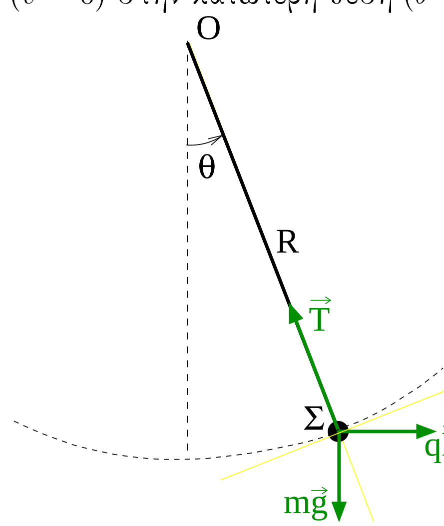
(γ) Το σώμα περνάει μόνο μια φορά το σημείο $x = -1$ και δεν φτάνει ποτέ στο $x = 2$.

(δ) Το σώμα εκτελεί ταλάντωση με ελάχιστη τιμή της θέσης $x_{\min} = x_0$. Ποια είναι σε αυτή την περίπτωση η μέγιστη τιμή της θέσης $x_{\max}$ και η περίοδος της ταλάντωσης; (Εκτιμήστε το $x_{\max}$ με τη βοήθεια του διαγράμματος και γράψτε την περίοδο συναρτήσει κάποιου ορισμένου ολοκληρώματος, χωρίς να υπολογίσετε την αριθμητική της τιμή.)

(ε) Σχεδιάστε τις διάφορες καμπύλες στο διάγραμμα φάσης και δείξτε σε αυτό τις τροχιές που αντιστοιχούν στα προηγούμενα ερωτήματα.

Θέμα 2ο:

Σώμα μάζας m και φορτίου q είναι δεμένο στο ένα άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους R, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακίνητο. Στο σώμα, εκτός το βάρος $m\vec{g}$ (με $\vec{g} =$ σταθερό) και την τάση του νήματος $\vec{T}$, ασκείται και δύναμη $q\vec{E}$ από οριζόντιο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, όπως στο σχήμα, με $E = E_0 \sin(\omega t)$. Αρχικά (για $t = 0$) το σώμα είναι ακίνητο ($v = 0$) στην κατώτερη θέση ($\theta = 0$).



(α) Να μελετηθεί η κίνηση και συγκεκριμένα να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που δίνει την $\theta(t)$.

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε $\omega_0 = \sqrt{g/R}$, $\omega = 3\omega_0$ και ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι αρκούντως μικρό ώστε να ισχύει $|\theta(t)| \ll 1$.

(β) Βρείτε την $\theta(t)$. Αν θέλετε να απλοποιήσετε το αποτέλεσμα θα χρειαστείτε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(3\phi) = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$.
Ποια η περίοδος της κίνησης;
Ποια η μέγιστη τιμή της $\theta(t)$ και πόσο μικρό πρέπει να είναι το ηλεκτρικό πεδίο ώστε να ισχύει πράγματι $|\theta(t)| \ll 1$;

(γ) Πόση ενέργεια έχει δώσει το ηλεκτρικό πεδίο από $t = 0$ μέχρι κάποιο χρόνο t;

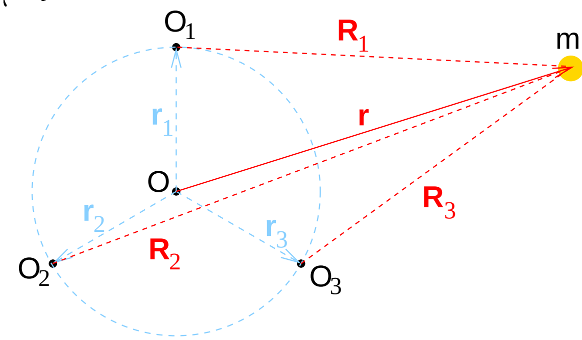
Θέμα 3^o:

Ενας μικρός πλανήτης μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από το άστρο του μάζας M. Το άστρο όμως εκρήγνυται σε μιά έκρηξη υπερκαινοφανούς (supernova) εκτοξεύοντας ακτινικά τα εξωτερικά του στρώματα με ταχύτητα πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα του πλανήτη γύρω από το άστρο, έτσι ώστε η απώλεια μάζας από το άστρο να μπορεί να θεωρηθεί με αρκετά καλή προσέγγιση ότι έγινε στιγμιαία. Η εναπομένουσα μάζα του άστρου είναι M', με $m \ll M' < M$. Να υπολογισθεί τι είδους τροχιά θα διαγράψει ο πλανήτης μετά την έκρηξη και η εκκεντρότητά της. Τι θα συμβεί ιδιαίτερα αν : (α) $M' < \dfrac{M}{2}$, (β) $M' = \dfrac{M}{2}$, (γ) $M' > \dfrac{M}{2}$;

Δίδεται η σχέση εκκεντρότητας, ενέργειας και στροφορμής σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων $F = -\dfrac{k}{r^2}$: $\quad e^2 = 1 + \dfrac{2EL^2}{k^2 m}$.

Θέμα 4^o:

Τρία πεδία κεντρικών δυνάμεων έχουν τα κέντρα τους O_1, O_2, O_3 πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας α και σε ίση απόσταση αναμεταξύ τους (βλέπε σχήμα). Μια μάζα m ευρίσκεται σε τυχούσα απόσταση $\vec{r}$ από το κέντρο του κύκλου. Η δύναμη $\vec{F}_i\,, i = 1, 2, 3$, που ασκείται από κάθε ένα από τα πεδία πάνω στη μάζα m είναι ελκτική και είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο του αντίστοιχου πεδίου, δηλ., ισούται με $\vec{F}_i = -k\vec{R}_i\,, i = 1, 2, 3$, όπου $\vec{R}_i$ είναι το διάνυσμα από το κέντρο του πεδίου προς τη μάζα.



Την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$, η μάζα ευρίσκεται στην τυχούσα θέση $\vec{r}_0$ με ταχύτητα $\vec{v}_0$.

(α) Να υπολογισθεί η συνολική δύναμη που ασκείται από τα τρία πεδία πάνω στη μάζα συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο του κύκλου και να αποδειχθεί ότι η κίνηση της μάζας είναι επίπεδη.

(β) Να λυθεί η εξίσωση της κινήσεως που προκύπτει από την εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα και να υπολογισθούν η θέση του σωματιδίου $\vec{r}(t)$ συναρτήσει των $\vec{r}_0$ και $\vec{v}_0$.

(γ) Εστω ότι $\vec{r}_0 = x_0\,\hat{x}$ και $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{y}$. Δείξτε ότι η τροχιά είναι ελλειπτική.

(δ) Στην προηγούμενη περίπτωση της ελλειπτικής τροχιάς, ισχύει ο 3ος νόμος του Kepler ;

(ε) Να ευρεθεί κάτω από ποιες συνθήκες η κίνηση είναι κυκλική.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

Η ενέργεια, υπολογισμένη στην θέση x_0 όπου $V(x_0) = -\dfrac{1}{2}$, είναι $\mathcal{E} = \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{1}{2}$.

(α) Στο $x = -\infty$ είναι $\dot{x} = 0$ και $V(x) = 0$. Άρα πρέπει $\mathcal{E} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{1}{2} = 0 \overset{v_0>0}{\Longleftrightarrow} \boxed{v_0 = 1}$

(β) Στο $x = +\infty$ είναι $\dot{x} = 2$ και $V(x) = 0$. Άρα πρέπει $\mathcal{E} = 2$. Το ότι προέκυψε $\mathcal{E} > 1$ σημαίνει ότι πράγματι το σώμα θα περάσει το φράγμα δυναμικού (το οποίο έχει μέγιστη τιμή $V_{\max} = 1$ για $x = 1$) και θα φτάσει στο $x = +\infty$. Είναι $\dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{1}{2} = 2 \overset{v_0>0}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{v_0 = \sqrt{5}}$

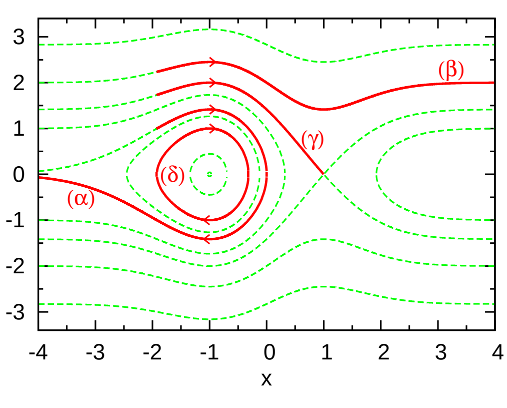
(γ) Το σώμα ξεκινά από το $x = x_0$, περνά το $x = -1$ και δεν ξαναγυρνά στο $x = -1$, άρα η ενέργειά του δεν είναι μικρότερη του $V_{\max} = 1$. Το ότι δεν φτάνει ποτέ στο $x = 2$ σημαίνει ότι η ενέργεια δεν είναι μεγαλύτερη από $V_{\max} = 1$. Από τις δυο τελευταίες προτάσεις προκύπτει ότι $\mathcal{E} = V_{\max} = 1$. Πράγματι σε αυτήν την περίπτωση το σώμα κινείται προς τη θέση μεγίστου του δυναμικού $x = 1$ και επειδή έχει ενέργεια ίση με τη μέγιστη τιμή του δυναμικού θα χρειαστεί άπειρο χρόνο να φτάσει στο σημείο αυτό. Είναι $\dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{1}{2} = 1 \overset{v_0>0}{\Longleftrightarrow} \boxed{v_0 = \sqrt{3}}$

(δ) Αφού η αρχική θέση είναι ακραία της ταλάντωσης, σημαίνει ότι $\boxed{v_0 = 0}$ και $\mathcal{E} = -1/2$. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η επιτρεπτή περιοχή κίνησης $V(x) \le \mathcal{E} \Leftrightarrow V(x) \le 1/2$ έχει ελάχιστη θέση την $x_{\min} = x_0 \approx -1.9$ και μέγιστη την $\boxed{x_{\max} \approx -0.3}$ (η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης $V(x) = -1/2$ δίνει $x_{\min} \approx -1.9287$ και $x_{\max} \approx -0.3227$).
Η περίοδος κίνησης, χρησιμοποιώντας $dt = dx/v$ και $v = \pm\sqrt{\dfrac{2}{m}\left[\mathcal{E} - V(x)\right]}$ (από το ολοκλήρωμα ενέργειας) γράφεται $T =$

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[\mathcal{E} - V(x)\right]}} + \int_{x_{\max}}^{x_{\min}} \frac{dx}{-\sqrt{\frac{2}{m}\left[\mathcal{E} - V(x)\right]}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{T \approx 2\int_{-1.9}^{-0.3} \frac{dx}{\sqrt{-1 - 2x\exp\left(\frac{1-x^2}{2}\right)}}}$$

(ε)



Θέμα 2ο:

(α) $v = R\dot{\theta}\,, \quad a_\epsilon = \dot{v} = R\ddot{\theta}\,.$
Νόμος Νεύτωνα στην επιτρόχια διεύθυνση:
$ma_\epsilon = qE\cos\theta - mg\sin\theta \Leftrightarrow$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = \frac{qE_0}{mR}\cos\theta\sin(\omega t)}$$

(β) Για μικρές γωνίες $\sin\theta \approx \theta$ και $\cos\theta \approx 1$. Άρα η εξίσωση κίνησης γίνεται
$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \dfrac{qE_0}{mR}\sin(3\omega_0 t)$, όπου $\omega_0^2 = \dfrac{g}{R}$
(εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση).
Λύση της ομογενούς:
$\theta_{o\mu} = C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t)$.
Μερική λύση της μορφής $\theta_{\mu\epsilon\rho} = A\sin(3\omega_0 t)$. Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση βρίσκουμε $A = -\dfrac{qE_0}{8mR\omega_0^2} = -\dfrac{qE_0}{8mg}$.
Άρα γενική λύση

$$\theta = C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t) - \frac{qE_0}{8mg}\sin(3\omega_0 t)$$

$$\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = C_1\cos(\omega_0 t) - C_2\sin(\omega_0 t) - \frac{3qE_0}{8mg}\cos(3\omega_0 t)$$

Από τις αρχικές συνθήκες $\theta\big|_{t=0} = 0$, $\dot{\theta}\Big|_{t=0} = 0$ βρίσκουμε $C_2 = 0$ και $C_1 = \dfrac{3qE_0}{8mg}$, οπότε η λύση είναι $\theta = \dfrac{qE_0}{8mg}\left[3\sin(\omega_0 t) - \sin(3\omega_0 t)\right]$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin(3\omega_0 t) = 3\sin(\omega_0 t) - 4\sin^3(\omega_0 t)$ μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{\theta = \frac{qE_0}{2mg}\sin^3(\omega_0 t)}$$

Η περίοδος είναι $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}}$

Η μέγιστη τιμή της γωνίας $\boxed{\theta_{\max} = \dfrac{|qE_0|}{2mg}}$

Για να είναι πάντα $|\theta| \ll 1$ πρέπει $\boxed{|E_0| \ll \dfrac{2mg}{|q|}}$

(γ) Α′ τρόπος:
Η ενέργεια που έχει δώσει το ηλεκτρικό πεδίο έχει γίνει κινητική και βαρυτική δυναμική:

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} + mgR(1 - \cos\theta)$$

$$= \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + mgR(1 - \cos\theta).$$

Με $\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ βρίσκουμε $\mathcal{E} = \dfrac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + \dfrac{mgR\theta^2}{2}$.
Αντικαθιστώντας τις θ και $\dot{\theta}$,

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{mgR}{2}\theta_{\max}^2\left[9 - 8\sin^2(\omega_0 t)\right]\sin^4(\omega_0 t)}$$

Β′ τρόπος:
Η ισχύς της ηλεκτρικής δύναμης είναι $q\vec{E}\cdot\vec{v} = qER\dot{\theta}\cos\theta \approx qER\dot{\theta}$. Άρα $\mathcal{E} = \int_0^t qER\dot{\theta}dt$
$= 6mgR\theta_{\max}^2 \int_0^t \sin(3\omega_0 t)\sin^2(\omega_0 t)\underbrace{\omega_0\cos(\omega_0 t)\,dt}_{d\sin(\omega_0 t)}$
$= 6mgR\theta_{\max}^2 \int_0^{\sin(\omega_0 t)} \left(3\xi - 4\xi^3\right)\xi^2 d\xi \Leftrightarrow$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{mgR}{2}\theta_{\max}^2\left[9 - 8\sin^2(\omega_0 t)\right]\sin^4(\omega_0 t)}$$

Θέμα 3ο:
Η αρχική τροχιά του πλανήτη είναι κυκλική, ακτίνος R, $e = 0$,

$$1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3} = 0 \Longleftrightarrow E = -\frac{G^2M^2m^3}{2L^2}\,,$$

$$\left.\begin{array}{l} L = mRv \\ \dfrac{mv^2}{R} = \dfrac{GMm}{R^2} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow R = \frac{L^2}{GMm^2}\,.$$

$$E' = E + \frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{M'}{M}\right) = E\left(\frac{2M'}{M} - 1\right)\,,$$

$$e^2 = 1 + \frac{2E'L^2}{G^2M^2m^3} = 1 + \frac{M^2}{M'^2}\left(1 - \frac{2M'}{M}\right)\,,$$

Όταν $2M' = M$, παραβολική τροχιά,
Όταν $2M' > M$, ελλειπτική τροχιά,
Όταν $2M' < M$, υπερβολική τροχιά.

Θέμα 4ο:

(α) Λόγω της συμμετρίας έχουμε $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0$,

$$\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_1) - k(\vec{r} - \vec{r}_2) - k(\vec{r} - \vec{r}_3) = -3k\vec{r}\,,$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{v} \Longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$\Longrightarrow$ η τροχιά είναι επίπεδη.

(β) $m\ddot{\vec{r}} + 3k\vec{r} = 0$,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \vec{v}_0\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t\,,$$

(γ)

$$x(t) = x_0\cos\omega t\,,\, y = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\,,\, \frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{v_0^2/\omega^2} = 1\,.$$

δηλ., ελλειπτική τροχιά.

(δ) Δεν ισχύει ο 3ος νόμος του Kepler διότι ο λόγος T^2/a^3 δεν είναι σταθερός (η περίοδος εξαρτάται από τη μάζα ενώ τα μήκη των ημιαξόνων από την αρχική θέση και ταχύτητα).

(ε) $|x_0| = \dfrac{|v_0|}{\omega}$.