Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 22 Φεβρουαρίου 2010
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: __ __ __ __ __ __ __

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 4/12/2009: ΟΧΙ ☐ ΝΑΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1, 2**

Έχω παραδώσει τις εργασίες: $1^η$ ☐ $2^η$ ☐ $3^η$ ☐ $4^η$ ☐ $5^η$ ☐ $6^η$ ☐ $7^η$ ☐ $8^η$ ☐ $9^η$ ☐ $10^η$ ☐

Θέμα $1^ο$:

Ομογενής κύβος ακμής h και πυκνότητας ρ_κ αφήνεται στην επιφάνεια υγρού πυκνότητας $\rho_\upsilon = 2\rho_\kappa$, με μια έδρα του να εφάπτεται στην επιφάνεια του υγρού. Ο κύβος κινείται κάτω από την επίδραση του βάρους του ($\rho_\kappa h^3 g$), της άνωσης ($\rho_\upsilon h^2 gz$ αν η κάτω έδρα του έχει βυθιστεί κατά $z \in (0,h)$ και $\rho_\upsilon h^3 g$ αν $z > h$) και της αντίστασης από το υγρό που υποθέτουμε ότι είναι $\frac{1}{2}\rho_\upsilon h^2 v^2$, όπου $v = \dot{z}$ η ταχύτητά του. Μελετούμε την κάθοδο του κύβου, μέχρι τη στιγμή μηδενισμού της ταχύτητάς του.

(α) Δείξτε ότι αν μετράμε μήκη σε h, μάζες σε $\rho_\kappa h^3$ και χρόνους σε $\sqrt{h/g}$, η αδιάστατη εξίσωση κίνησης για $0 < z < h$, $v > 0$ είναι $a = 1 - 2z - v^2$, όπου $a = \dot{v} = \ddot{z}$ η επιτάχυνση (δηλαδή μπορούμε να θέσουμε $h = \rho_\kappa = g = 1$).

(β) Βρείτε την ταχύτητα του κύβου σαν συνάρτηση της θέσης z, καθώς και τη θέση $z_{\max}$ όπου στιγμιαία σταματά. Δίνεται ότι η διαφορική $v\frac{dv}{dz} = A + Bv^2 + Cz$ έχει λύση $v^2 = De^{2Bz} - \frac{C}{B}z - \frac{C}{2B^2} - \frac{A}{B}$. Επίσης δίνεται η θετική λύση της εξίσωσης
$1 - e^{-2\xi} = \xi \Leftrightarrow \xi = 0.797$.

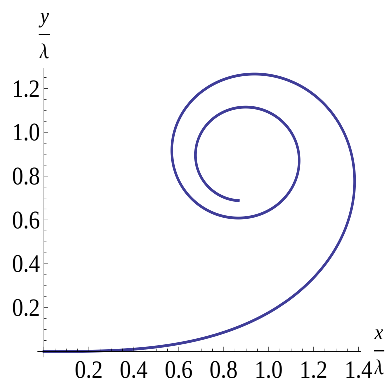
(γ) Υπολογίστε τον χρόνο καθόδου. Δίνεται ότι
$$\int_0^{0.797} \frac{d\xi}{\sqrt{2 - 2e^{-2\xi} - 2\xi}} = 2.279.$$

(δ) Έστω ότι η ακμή του κύβου είναι $h = 10$ cm και $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Δώστε διαστάσεις στα αποτελέσματα των ερωτημάτων (β), (γ), δηλαδή δώστε το μήκος $z_{\max}$ σε cm και το χρόνο καθόδου σε s.

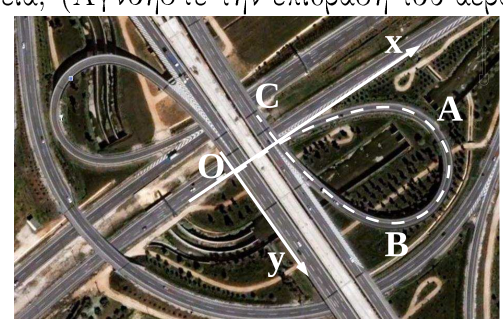
Θέμα $2^ο$:

(α) Ποια η κεντρομόλος επιτάχυνση σώματος που κινείται με ταχύτητα μέτρου v σε τροχιά καμπυλότητας $\kappa = 1/\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ είναι η ακτίνα καμπυλότητας);

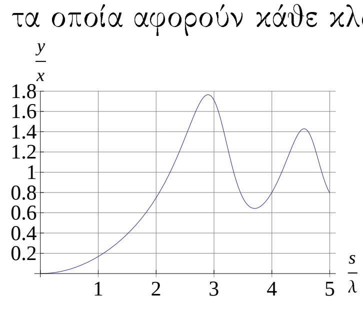
(β) Η κλωθοειδής καμπύλη (βλέπε σχήμα) έχει παραμετρική εξίσωση
$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2\lambda^2}\right) ds\,,\ y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{s^2}{2\lambda^2}\right) ds\,,$$
όπου s το μήκος πάνω στην καμπύλη και λ σταθερά. Δείξτε την βασική ιδιότητα της κλωθοειδούς: η καμπυλότητα αυξάνεται γραμμικά με το μήκος, $\kappa = s/\lambda^2$. (Υπόδειξη: Βρείτε το μοναδιαίο $\hat{\varepsilon}$ πάνω στην καμπύλη και χρησιμοποιήστε την $\frac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \kappa\hat{\eta}$.)

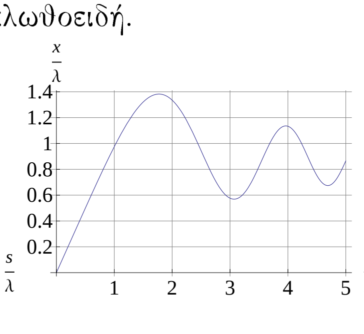


(γ) Στο δρόμο του σχήματος (τμήμα της Αττικής οδού) το τμήμα ΟΑ είναι μέρος κλωθοειδούς ($0 < s < s_A$), το ΑΒ είναι τμήμα κύκλου και το BC είναι επίσης τμήμα κλωθοειδούς. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται η ομαλή μεταβολή της καμπυλότητας της τροχιάς. Αν οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι $x_A = 150$ m, $y_A = 75$ m υπολογίστε την τριβή που ασκείται στα λάστιχα αυτοκινήτου μάζας $m = 3000$ kg το οποίο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου $v = 50 \text{ km h}^{-1}$ στο δρόμο του σχήματος. Κατασκευάστε πρόχειρα το διάγραμμα $T = T(s)$. Ποια η μέγιστη τιμή της τριβής και ποιος πρέπει να είναι κατ' ελάχιστον ο συντελεστής στατικής τριβής έτσι ώστε το όχημα να στρίψει με ασφάλεια; (Αγνοήστε την επίδραση του αέρα.)



Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τα ακόλουθα σχήματα τα οποία αφορούν κάθε κλωθοειδή.





Θέμα 3ο:

Στην κλασική προσέγγιση ενός ατόμου με ατομικό αριθμό Z και μαζικό αριθμό A, το εγγύτερο στον πυρήνα ηλεκτρόνιο περιφέρεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_o γύρω από τον πυρήνα, ο οποίος περιέχει Z πρωτόνια και $A-Z$ νετρόνια. Επειδή όμως ο συγκεκριμένος πυρήνας είναι ασταθής σε διάσπαση β^-, ξαφνικά υφίσταται διάσπαση β^- εκπέμποντας ένα ηλεκτρόνιο (που διαφεύγει ταχύτατα από τον πυρήνα). Λόγω διατήρησης φορτίου, κατά τη διάσπαση β^- το φορτίο του πυρήνα αλλάζει από Z σε $Z+1$. Η διάσπαση β^- συμβαίνει σε πολύ μικρότερο χρονικό διάστημα σε σχέση με την περίοδο περιφοράς του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα, δηλ., σχεδόν ακαριαία. Έτσι, απότομα το ηλεκτρόνιο αισθάνεται ένα διαφορετικό ελκτικό πεδίο δυνάμεων.

(α) Να υπολογισθεί ο λόγος της ολικής ενέργειας του ηλεκτρονίου μετά τη διάσπαση β^- προς αυτήν προ της διάσπασης β^- θεωρώντας, ως συνήθως, ως μηδέν της ενέργειας την κατάσταση όπου το ηλεκτρόνιο ευρίσκεται σε άπειρη απόσταση και με μηδενική ταχύτητα από τον πυρήνα.

(β) Διακαιολογήστε τί είδους τροχιά θα διαγράψει το ηλεκτρόνιο μετά τη διάσπαση β^-. Αν παραμείνει κυκλική υπολογίστε τη νέα ακτίνα. Αν είναι άλλη κωνική τομή υπολογίστε τα γεωμετρικά στοιχεία της (εκκεντρότητα και μεγάλο ημιάξονα).

(γ) Να υπολογισθεί η ελάχιστη και μέγιστη απόσταση του ηλεκτρονίου σε μονάδες του r_o.

Δίδεται η εξίσωση της τροχιάς σώματος μάζας m, ενέργειας E και στροφορμής L, σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων $F=-\frac{k}{r^2}$ (με $k>0$),

$$r(\theta)=\frac{L^2/km}{1+\sqrt{1+\frac{2L^2E}{k^2m}}\cos\theta}$$

Θέμα 4ο:

Η Σελήνη περιστρέφεται σήμερα γύρω από τη Γη με γωνιακή συχνότητα $\Omega_0=2\pi/T_0=2\pi/(27.3$ ημέρες) σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r_0=384,000\,\mathrm{km}$. Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της με τη (μεγαλύτερη) γωνιακή συχνότητα $\omega_0=2\pi/\tau_0=2\pi/(1$ ημέρα). Σε πρώτη προσέγγιση, η ολική στροφορμή J του συστήματος Γη-Σελήνη είναι $J=L+S$, όπου L είναι η τροχιακή στροφορμή της Σελήνης γύρω από τη Γη και $S=I\omega$ η ιδιοστροφορμή (spin) της Γης γύρω από τον άξονά της (I είναι η σταθερή ροπή αδράνειας της Γης), θεωρώντας αμελητέα την ιδιοστροφορμή (spin) της Σελήνης γύρω από τον εαυτό της και την κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο.

(α) Ποια είναι η εξάρτηση της γωνιακής συχνότητας της Σελήνης $\Omega(r)$ με την στιγμιαία απόσταση της Σελήνης r από τη Γη ;

(β) Ένα αποτέλεσμα των παλιρροιακών τριβών στον πυθμένα των ωκεανών και των ακτών της Γης είναι ότι η γωνιακή συχνότητα ω της Γης ελαττώνεται με το χρόνο, δηλ., η διάρκεια της ημέρας αυξάνει. Δείξτε ότι στο απομονωμένο σύστημα Γης - Σελήνης (δηλ., όπου οι συνολικές εξωτερικές δυνάμεις και ροπές είναι αμελητέες) αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η Σελήνη να απομακρύνεται βαθμιαία από τη Γη.

(γ) Ποια είναι η εξάρτηση της γωνιακής συχνότητας της Γης $\omega(r)$ με την στιγμιαία απόσταση του συστήματος Γης - Σελήνης r ; Συγκεκριμένα δείξτε ότι η περίοδος ιδιοπεριστροφής της Γης τ όταν η Σελήνη είναι σε απόσταση r είναι:

$$\tau=\frac{\tau_0}{1-\frac{\tau_0 L_0}{2\pi I}\left[\sqrt{\frac{r}{r_0}}-1\right]}\,.$$

(δ) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα για την εξάρτηση της γωνιακής συχνότητας της Γης $\omega(r)$ με την στιγμιαία απόσταση του συστήματος Γης - Σελήνης r βρείτε την εξάρτηση της ολικής ενέργειας Ε του συστήματος Γης - Σελήνης με την στιγμιαία απόσταση του συστήματος Γης - Σελήνης r. Η ολική ενέργεια Ε του συστήματος Γης - Σελήνης είναι το άθροισμα της τροχιακής ενέργειας της Σελήνης γύρω από τη Γη, της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος και της ενέργειας περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της $[(1/2)\mathrm{I}\ \omega^2)]$.

(ε) Δείξτε ότι τελικά το σύστημα φθάνει σε μια τελική κατάσταση σε κάποια απόσταση r_*, όπου η ενέργειά του Ε ελαχιστοποιείται, όταν η γωνιακή συχνότητα της Γης $\omega(r_*)=\omega_*$ ισούται με τη γωνιακή συχνότητα της Σελήνης γύρω από τη Γη, $\Omega(r_*)=\Omega_*$, δηλ., όταν $\omega_*=\Omega_*$. Πως μπορούμε να υπολογίσουμε γραφικά τα r_*, ω_*, Ω_* ;

Λύσεις:

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

(α) $\vec{r}=z\hat{z}$, $\vec{v}=v\hat{z}=\dot{z}\hat{z}$, $\vec{a}=a\hat{z}=\dot{v}\hat{z}=\ddot{z}\hat{z}$.
Νόμος Νεύτωνα (για την κάθοδο $0<z<h$): $ma=\rho_\kappa h^3 g-\rho_\upsilon h^2 gz-\frac{1}{2}\rho_\upsilon h^2 v^2 \xLeftrightarrow{m=\rho_\kappa h^3\ ,\ \rho_\upsilon=2\rho_\kappa} a=g-\dfrac{2g}{h}z-\dfrac{1}{h}v^2$.
Με $z=hz'$, $t=\sqrt{\dfrac{h}{g}}\,t'$,

$$v=\frac{dz}{dt}=\frac{h}{\sqrt{\frac{h}{g}}}\frac{dz'}{dt'}=\sqrt{gh}\;v',$$

$$a=\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{h}{\left(\sqrt{\frac{h}{g}}\right)^2}\frac{d^2z'}{dt'^2}=g\;a',$$

η εξίσωση κίνησης γράφεται $a'=1-2z'-v'^2$, ή απαλείφοντας τους τόνους $a=1-2z-v^2$.

(β) Με $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dz}\dfrac{dz}{dt}=v\dfrac{dv}{dz}$ η προηγούμενη εξίσωση γράφεται $v\dfrac{dv}{dz}=1-2z-v^2$. Σύμφωνα με την υπόδειξη η λύση της είναι $v^2=De^{-2z}-2z+2$, όπου D σταθερά ολοκλήρωσης που προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Για $z=0$ είναι $v=0$, οπότε $D=-2$. Η τελική έκφραση για την ταχύτητα είναι $v=\sqrt{2-2e^{-2z}-2z}$.
Για $z=z_{\max}$ είναι $v=0$, οπότε $0=2-2e^{-2z_{\max}}-2z_{\max}\Leftrightarrow 1-e^{-2z_{\max}}=z_{\max}$ με λύση $z_{\max}=0.797$. Βλέπουμε ότι $z_{\max}<1$, οπότε ισχύει η εξίσωση κίνησης που χρησιμοποιήσαμε σε όλη τη διάρκεια της καθόδου (για $z>1$ η άνωση είναι σταθερή οπότε η εξίσωση είναι διαφορετική).

(γ) Ο χρόνος καθόδου είναι

$$\int_0^{z_{\max}}\frac{dz}{v}=\int_0^{0.797}\frac{dz}{\sqrt{2-2e^{-2z}-2z}}=2.279$$

(δ) Για να βρούμε το μήκος πολλαπλασιάζουμε το αδιάστατο αποτέλεσμα με $h=10$ cm, οπότε $z_{\max}=0.797\times 10\text{ cm}=7.97$ cm. Όμοια για τον χρόνο

$$2.279\times\sqrt{\frac{h}{g}}=2.279\times\sqrt{\frac{10\times10^{-2}\text{ m}}{10\text{ m s}^{-2}}}=0.2279\text{ s}.$$

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

(α) $a_\kappa=\dfrac{v^2}{\mathcal{R}}=\kappa v^2$.

(β) Α′ τρόπος:

$$\hat{\varepsilon}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\hat{x}+\frac{dy}{ds}\hat{y}\Leftrightarrow$$

$$\hat{\varepsilon}=\cos\left(\frac{s^2}{2\lambda^2}\right)\hat{x}+\sin\left(\frac{s^2}{2\lambda^2}\right)\hat{y},\text{ οπότε}$$

$$\frac{d\hat{\varepsilon}}{ds}=\frac{s}{\lambda^2}\left[-\sin\left(\frac{s^2}{2\lambda^2}\right)\hat{x}+\cos\left(\frac{s^2}{2\lambda^2}\right)\hat{y}\right].$$

Είναι $\kappa=\left|\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds}\right|\Leftrightarrow\kappa=\dfrac{s}{\lambda^2}$.

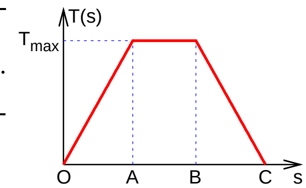
Β′ τρόπος:
Από την έκφραση του $\hat{\varepsilon}$ ή της ταχύτητας

$$\vec{v}=\frac{dx}{dt}\hat{x}+\frac{dy}{dt}\hat{y}=\frac{ds}{dt}\left[\cos\left(\frac{s^2}{2\lambda^2}\right)\hat{x}+\sin\left(\frac{s^2}{2\lambda^2}\right)\hat{y}\right],$$

συμπεραίνουμε ότι η γωνία μεταξύ της ταχύτητας και του άξονα x είναι $\phi=\dfrac{s^2}{2\lambda^2}$. Η καμπυλότητα είναι

$$\kappa=\mathcal{R}^{-1}=\left(\frac{ds}{d\phi}\right)^{-1}=\frac{d\phi}{ds}=\frac{s}{\lambda^2}.$$

(γ) Η τριβή είναι $T=ma_\kappa=m\kappa v^2$ και άρα ακολουθεί τη μεταβολή της καμπυλότητας κ. Στο σημείο O είναι μηδέν (αφού η καμπυλότητα είναι μηδέν). Στο τμήμα OA αυξάνεται γραμμικά με το μήκος s, $T=\dfrac{mv^2}{\lambda^2}s$. Στο σημείο A αποκτά τη μέγιστη τιμή $T_{\max}=\dfrac{mv^2}{\lambda^2}s_{\text{A}}$.



Στο τμήμα κύκλου AB παραμένει σταθερή και ίση με $T_{\max}$ (αφού η καμπυλότητα είναι σταθερή). Στο τμήμα BC μειώνεται γραμμικά με το s, από την τιμή $T_{\max}$ (στο σημείο B) σε μηδέν (στο σημείο C).
Από το διάγραμμα που συνδέει τα $\dfrac{y}{x}$ και $\dfrac{s}{\lambda}$, βρίσκουμε ότι για τεταγμένη $\dfrac{y_{\text{A}}}{x_{\text{A}}}=\dfrac{75}{150}=0.5$ η τετμημένη είναι $\dfrac{s_{\text{A}}}{\lambda}\approx 1.7$.[1]
Από το διάγραμμα που συνδέει τα $\dfrac{x}{\lambda}$ και $\dfrac{s}{\lambda}$, βρίσκουμε ότι για τετμημένη $\dfrac{s_{\text{A}}}{\lambda}\approx 1.7$ η τεταγμένη είναι $\dfrac{x_{\text{A}}}{\lambda}\approx 1.38$. (Η τιμή αυτή μπορεί να προκύψει επίσης από την τομή της κλωθοειδούς με την ευθεία $y=x/2$, χρησιμοποιώντας το διάγραμμα που συνδέει τα $\dfrac{y}{\lambda}$ και $\dfrac{x}{\lambda}$.)
Η τιμή του λ για τη συγκεκριμένη κλωθοειδή είναι $\lambda=\dfrac{x_{\text{A}}}{\frac{x_{\text{A}}}{\lambda}}\approx 109$ m και για το σημείο A είναι $s_{\text{A}}=\dfrac{s_{\text{A}}}{\lambda}\lambda\approx 185$ m. Επομένως η τιμή της μέγιστης τριβής είναι (αντικαθιστούμε όλες τις τιμές στο σύστημα mks) $T_{\max}=\dfrac{1}{\lambda^2}mv^2 s_{\text{A}}\approx \dfrac{1}{109^2}\times 3000\times\left(50\dfrac{1000}{3600}\right)^2\times 185\text{ N}=9000\text{ N}$.

Αν μ ο συντελεστής στατικής τριβής, πρέπει $T\le\mu A_\perp$, όπου $A_\perp$ η κάθετη αντίδραση. Αν αγνοήσουμε την επίδραση του αέρα και θεωρήσουμε το δρόμο οριζόντιο, είναι $A_\perp=mg$ και άρα $T\le\mu mg\Rightarrow\mu\ge\dfrac{T_{\max}}{mg}\approx\dfrac{9000}{3000\times 10}=0.3$.

[1] Προφανώς είναι αδύνατο να βρεθεί η ακριβής τιμή από το διάγραμμα, αρκεί απλά μια εκτίμησή της.

Θέμα 3ο:

Πριν τη διάσπαση η δύναμη που δέχεται το ηλεκτρόνιο είναι κεντρική, της μορφής $\dfrac{k_o}{r^2}$, με $k_o = \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$. Από $\dfrac{mv_o^2}{r_o} = \dfrac{k_o}{r_o^2}$ βρίσκουμε την ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς $v_o = \sqrt{\dfrac{k_o}{mr_o}}$ και άρα η ενέργεια πριν τη διάσπαση είναι $E_o = \dfrac{mv_o^2}{2} - \dfrac{k_o}{r_o} = -\dfrac{k_o}{2r_o}$.

Αμέσως μετά τη διάσπαση η δύναμη που δέχεται το ηλεκτρόνιο είναι κεντρική, της μορφής $\dfrac{k}{r^2}$ με $k = \dfrac{(Z+1)\,e^2}{4\pi\varepsilon_0} = \dfrac{Z+1}{Z}k_o$. Λόγω της ακαριαίας αλλαγής της δύναμης αλλάζει κατά τη διάρκεια της διάσπασης η δυναμική ενέργεια (από $-k_o/r_o$ σε $-k/r_o$) ενώ παραμένουν ίδιες η θέση και η ταχύτητα (άρα και η στροφορμή και η κινητική ενέργεια).

(α) Για τη νέα τροχιά έχουμε ενέργεια
$E = \dfrac{mv_o^2}{2} - \dfrac{k}{r_o} = \dfrac{k_o}{2r_o} - \dfrac{Z+1}{Z}\dfrac{k_o}{r_o} = -\dfrac{Z+2}{2Z}\dfrac{k_o}{r_o}$.
Ο λόγος των ενεργειών μετά τη διάσπαση προς αυτήν προ της διάσπασης είναι $\dfrac{E}{E_o} = \dfrac{Z+2}{Z}$.

(β)-(γ) Η στροφορμή είναι $L = mr_ov_o = \sqrt{k_omr_o}$ και άρα η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon = \sqrt{1+\dfrac{2L^2E}{k^2m}} = \sqrt{1-\dfrac{Z+2}{(Z+1)^2}} = \dfrac{1}{Z+1}$. Προφανώς $\varepsilon < 1$ και άρα η τροχιά είναι ελλειπτική. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού λόγω της ακαριαίας αύξησης του πεδίου αναμένουμε να τροποποιηθεί η τροχιά (δεν θα είναι πια κυκλική, αλλά το ηλεκτρόνιο θα έχει την τάση να πλησιάσει προς τον πυρήνα), ενώ η ενέργεια παραμένει αρνητική. Αφού $\dfrac{mv_o^2}{\mathcal{R}} = \dfrac{k}{r_o^2} > \dfrac{k_o}{r_o^2} = \dfrac{mv_o^2}{r_o}$ η ακτίνα καμπυλότητας $\mathcal{R}$ αμέσως μετά τη διάσπαση είναι μικρότερη από r_o και άρα το αρχικό σημείο είναι το απόκεντρο της τροχιάς.

Αντικαθιστώντας τα L, E, k στην εξίσωση της τροχιάς βρίσκουμε $r(\theta) = \dfrac{Zr_o}{Z+1+\cos\theta}$.
Η μεγαλύτερη απόσταση (απόκεντρο) αντιστοιχεί σε $\cos\theta = -1$ και είναι $r_{\max} = r_o$ (η αρχική θέση).
Η μικρότερη απόσταση (περίκεντρο) αντιστοιχεί σε $\cos\theta = 1$ και είναι $r_{\min} = \dfrac{Z}{Z+2}r_o$.
Ο μεγάλος ημιάξονας είναι $\alpha = \frac{1}{2}(r_{\min}+r_{\max}) = \dfrac{Z+1}{Z+2}r_o$.
(Το ίδιο προκύπτει και από τη σχέση $E = -\dfrac{k}{2\alpha}$.)

Θέμα 4ο:

(α) Η τροχιά της σελήνης είναι σχεδόν κυκλική, οπότε από $m\Omega^2 r = \dfrac{GMm}{r^2}$ προκύπτει ο νόμος Κέπλερ $\Omega(r) = \sqrt{\dfrac{GM}{r^3}}$.

(β) Από τη διατήρηση της ολικής στροφορμής $J = L+S = m\Omega r^2 + I\omega = m\sqrt{GMr}+I\omega$ προκύπτει ότι αν το ω ελαττώνεται το r πρέπει να αυξάνεται.

(γ) Λύνοντας την πρηγούμενη σχέση ως προς ω βρίσκουμε $\omega = \dfrac{J-m\sqrt{GMr}}{I}$, οπότε η περίοδος είναι $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi I}{J-m\sqrt{GMr}}$. Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί όπως η ζητούμενη, αν ορίσουμε $L_0 = m\sqrt{GMr_0}$ και $J = L_0 + \dfrac{2\pi I}{\tau_0} \Leftrightarrow \tau_0 = \dfrac{2\pi I}{J-L_0}$.

(δ) $E = \dfrac{I\omega^2}{2} + \dfrac{m\Omega^2 r^2}{2} - \dfrac{GMm}{r} \Leftrightarrow$

$E(r) = \dfrac{\left(J-m\sqrt{GMr}\right)^2}{2I} - \dfrac{GMm}{2r}$.

(ε) Είναι $\dfrac{dE}{dr} = \dfrac{m}{2}\sqrt{\dfrac{GM}{r}}\left(\sqrt{\dfrac{GM}{r^3}} - \dfrac{J-m\sqrt{GMr}}{I}\right) = \dfrac{m}{2}\sqrt{\dfrac{GM}{r}}\left[\Omega(r)-\omega(r)\right]$, οπότε είναι φανερό ότι για $\Omega = \omega$ η ενέργεια γίνεται ακρότατη.
Σχεδιάζοντας γραφικά τις συναρτήσεις $\Omega(r)$ και $\omega(r)$ μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα (τομές) και το είδος τους (αν αριστερά από το ακρότατο είναι $\Omega < \omega \Leftrightarrow \dfrac{dE}{dr} < 0$ και δεξιά $\Omega > \omega \Leftrightarrow \dfrac{dE}{dr} > 0$ το ακρότατο είναι ελάχιστο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι μέγιστο).

Επέκταση του Θέματος 4: Για την περίπτωση Γης - Σελήνης, όπου $M = 5.97\times 10^{24}$ kg, $I = 8\times 10^{37}$ kg m^2, $m = 7.35\times 10^{22}$ kg, $J = m\sqrt{GMr_0} + I\omega_0 = 3.5\times 10^{34}$ kg m^2, $G = 6.67\times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}, βρίσκεται από το διάγραμμα ότι το ευσταθές σημείο ισορροπίας αντιστοιχεί σε απόσταση Γης - Σελήνης 551,000 km και κοινή περίοδο 47.6 φορές μεγαλύτερη από τη σημερινή ημέρα. (Οι συναρτήσεις $\Omega(r)$ και $\omega(r)$ γενικά προκύπτει ότι έχουν δύο, ένα, ή κανένα σημεία τομής, αν $\dfrac{3^3J^4}{4^4G^2M^2m^3I} > 1, = 1,$ ή < 1, αντίστοιχα.)