Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, Τμήμα Κ. Τσίγκανου & Ν. Βλαχάκη, 4 Δεκεμβρίου 2009
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

Δαχτυλίδι μάζας $m = 1$ κινείται περασμένο σε λείο σύρμα που έχει το σχήμα της εκθετικής σπείρας. Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις: η κάθετη αντίδραση από το σύρμα $\vec{N}$ και δύναμη $\vec{F}$ παράλληλη στην ταχύτητα $\vec{v}$. Η θέση του σώματος (σε καρτεσιανές συντεταγμένες Oxy στο επίπεδο της τροχιάς) σαν συνάρτηση του χρόνου t είναι

$$x(t) = \frac{\lambda \cos t + \sin t}{1+\lambda^2} e^{\lambda t}, \quad y(t) = \frac{\lambda \sin t - \cos t}{1+\lambda^2} e^{\lambda t},$$

όπου λ σταθερά.

(α) Ποιό το μοναδιαίο $\hat{\varepsilon}(t)$ στη φορά κίνησης και ποιά η επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης $\vec{a}_\varepsilon(t)$;
(β) Ποιά η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης $\vec{a}_\kappa(t)$, ποιό το μοναδιαίο $\hat{n}(t)$ προς το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς και ποιά η ακτίνα καμπυλότητας $R(t)$;
(γ) Βρείτε τις δυνάμεις $\vec{N}$ και $\vec{F}$ σε κάθε χρόνο t.
(δ) Ποιό το μέτρο της ταχύτητας σε κάθε χρόνο; Αν $\lambda < 0$, αυτός που ασκεί την δύναμη $\vec{F}$ δίνει ή παίρνει ενέργεια από το δαχτυλίδι; Πόσο είναι το έργο της $\vec{F}$ για την κίνηση από $t = 0$ ως $t = \ln 2/|\lambda|$;
(ε) Δείξτε ότι το μέτρο των δυνάμεων $\vec{N}$ και $\vec{F}$ είναι ανάλογο του μέτρου της ταχύτητας. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $\vec{F} = -b\vec{v}$ και $\vec{N} = \vec{v} \times q\vec{B}$, με $q\vec{B}$ ένα σταθερό διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο κίνησης, δηλαδή $q\vec{B} = qB\hat{z}$. Έτσι, η εξίσωση του Newton γράφεται $m\vec{a} = -b\vec{v} + \vec{v} \times q\vec{B}$. Αναφέρατε ένα άλλο φυσικό πρόβλημα για το οποίο ισχύει αυτή η εξίσωση. Ποιά τα b και qB ώστε το σώμα να μπορέσει να εκτελέσει την σπειροειδή τροχιά που δόθηκε;

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

Η θέση $\phi = \phi(t)$ σώματος με ένα βαθμό ελευθερίας καθορίζεται από την εξίσωση $\ddot{\phi} = F(\phi)$ με

$$F(\phi) = 2 \sin\phi \cos\phi - \sin\phi\,.$$

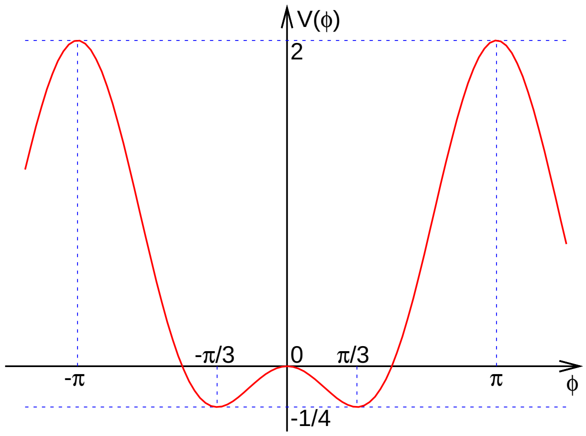
(α) Βρείτε την αντίστοιχη «δυναμική ενέργεια»

$$V(\phi) = -\int (2\cos\phi - 1)\sin\phi \, d\phi$$

θεωρώντας ότι μηδενίζεται στη θέση $\phi = 0$ και γράψτε το ολοκλήρωμα «ενέργειας»

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) = E\,.$$

(β) Δίνεται η γραφική παράσταση της $V(\phi)$ (περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π).



(β_1) Για ποιές τιμές της E η κίνηση μπορεί να είναι ταλάντωση σε διάστημα $0 < \phi_{\min} \le \phi(t) \le \phi_{\max}$ (δηλαδή η θέση $\phi(t)$ είναι θετική σε κάθε χρόνο t);
(β_2) Για ποιές τιμές της E η κίνηση είναι ταλάντωση σε διάστημα $\phi_{\min} \le \phi(t) \le \phi_{\max}$ με $\phi_{\min} = -\phi_{\max}$;
(β_3) Για ποιές τιμές της E δεν μηδενίζεται ποτέ η παράγωγος της θέσης $\dot{\phi}(t)$;
(β_4) Ποιά τα σημεία ισορροπίας; Είναι ευσταθή ή ασταθή;
(β_5) Ποιά η περίοδος της κίνησης μικρού πλάτους γύρω από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας;
(γ) Σχεδιάστε πρόχειρα το διάγραμμα φάσης, δηλαδή τις διάφορες καμπύλες φάσης στο επίπεδο $(\phi, \dot{\phi})$.

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

Κατακόρυφη στεφάνη ακτίνας $\ell = 1$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \sqrt{2}$ γύρω από την κατακόρυφη διάμετρό της, μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο $\vec{g}$ μέτρου $g = 1$ (όλα σε κατάλληλες μονάδες). Ένα δαχτυλίδι μάζας $m = 1$ είναι περασμένο στη στεφάνη και κινείται πάνω της χωρίς τριβές.
(α) Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης του δαχτυλιδιού είναι η $\ddot{\phi} = F(\phi)$ που δόθηκε στο 2$^{\text{ο}}$ θέμα, με ϕ την γωνία μεταξύ $\vec{g}$ και του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ του δαχτυλιδιού από το κέντρο της στεφάνης (ανεξάρτητα από το αν τα $\vec{\omega}$ και $\vec{g}$ είναι ομόρροπα ή αντίρροπα).
(β) Ποιά η ενέργεια E_α του δαχτυλιδιού όπως την μετρά αδρανειακός παρατηρητής; Ποιά η σχέση της με το ολοκλήρωμα E του 2$^{\text{ου}}$ θέματος; Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της E_α και πως συνδέεται με την ισχύ $\vec{N} \cdot \vec{v}_\alpha$ της δύναμης $\vec{N}$ που ασκεί η στεφάνη στο δαχτυλίδι;
Δίνονται οι γενικές σχέσεις $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_0 + \vec{v}_\sigma + \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a}_\sigma = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ και η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a}_\sigma = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}$.