Ακουστικό Ανάλογο Μελανών Οπών

Διάδοση ηχητικών κυμάτων σε ρευστά.

• Ηχητικά κύματα σε ακίνητο ρευστό.

Εξίσωση συνέχειας: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Εξίσωση Euler: $$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \ (-\vec{\nabla}\Phi + \ldots)$$

Μικρές διαταραχές: $$p = p_0 + p_1 \ , \ \rho = \rho_0 + \rho_1 \ , \ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$$

Έχουμε υποθέσει όμως ότι οι διαταραχές είναι μικρές και το ρευστό ακίνητο. Αυτό σημαίνει ότι τα γινόμενα ανάμεσα σε όρους διαταραχών θα τα θεωρούμε μηδενικά και ότι:

$$\vec{v}_0 = 0$$

Αν αντικαταστήσουμε τις διαταραγμένες ποσότητες μέσα στις εξισώσεις μας θα πάρουμε τις εξισώσεις για τις διαταραχές:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_1 = 0$$

Χρειαζόμαστε ακόμα μία εξίσωση για να ολοκληρώσουμε το σύστημα των εξισώσεων. Γενικά θα θεωρήσουμε ότι οι διαδικασίες στο ρευστό μας είναι αδιαβατικές και ότι το ρευστό μας είναι βαροτροπικό, δηλαδή ότι οι μεταβολές γίνονται υπό σταθερή εντροπία και η πίεση είναι συνάρτηση της πυκνότητας. Έτσι από το θεώρημα Taylor μπορούμε να δείξουμε ότι θα ισχύει:

$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho_1$$

Εξίσωση συνέχειας $$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 (\frac{\partial p}{\partial \rho})_s \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0$$

Εξίσωση Euler $$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_1 = 0$$

Γενικά θα υποθέσουμε ότι το ρευστό μας είναι αστρόβιλο. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε το πεδίο της ροής και τις διαταραχές του ως βαθμίδες κάποιου δυναμικού.

$$\vec{\nabla} \times v_1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\vec{\nabla}\psi$$

Έτσι από την εξίσωση του Euler θα πάρουμε: $$p_1 = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Και από την εξίσωση συνέχειας: $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - (\frac{\partial p}{\partial \rho})_s \nabla^2 \psi = 0$$

όπου: $(\frac{\partial p}{\partial \rho})_s = c^2$

Η παραπάνω κυματική εξίσωση περιγράφει το ανάλογο της διάδοσης Η/Μ κυμάτων σε επίπεδο χώρο.

Μία ειδική κατηγορία λύσεων αυτής της κυματικής εξίσωσης είναι τα επίπεδα κύματα.

$$\psi = ae^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

όπου η ποσότητα $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = \phi$ είναι η φάση του κύματος. Το χαρακτηριστικό αυτών των κυμάτων είναι ότι οι επιφάνειες σταθερής φάσης στα διάφορα στιγμιότυπα είναι επίπεδα. Τα κύματα αυτά διαδίδονται κάθετα στα επίπεδα σταθερής φάσης, δηλαδή πάνω σε ευθείες τροχιές (ακτίνες) στην διεύθυνση του κυματανύσματος.

Αν εισάγουμε την εξίσωση του επίπεδου κύματος στην κυματική εξίσωση, τότε θα πάρουμε την σχέση:

$$\vec{k}\cdot\vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

Που μπορεί να θεωρηθεί ως ο ορισμός του φωτοειδούς κυματανύσματος

$$k^a = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$$

Γενικά ένα ακουστικό κύμα δεν θα είναι επίπεδο. Μπορούμε όμως να κάνουμε την γεωμετρική προσέγγιση. Δηλαδή να θεωρήσουμε ότι το κύμα τοπικά συμπεριφέρεται ως επίπεδο και δεν αλλάζει σημαντικά η διεύθυνση διάδοσής του σε αποστάσεις της τάξης του μήκους κύματος.

Στα πλαίσια της γεωμετρικής προσέγγισης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η φάση μπορεί να περιγραφεί από το ανάπτυγμα:

$$\phi = \phi_0 + \vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi + t\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

όπου $\vec{k} = \vec{\nabla}\phi$ και $\omega = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$

Βλέπουμε πάλι λοιπόν ότι τα κύματα θα διαδίδονται κάθετα στις επιφάνειες σταθερής φάσης κατά μήκος του κυματανύσματος.

Η περιγραφή αυτή είναι ανάλογη με την κίνηση σωματιδίων σε δυναμικό όπως περιγράφεται από την εξίσωση Hamilton-Jacobi όπου η φάση παίζει το ρόλο της δράσης, το κυματάνυσμα το ρόλο της ορμής και το ω το ρόλο της Χαμηλτονιανής.

• Ηχητικά κύματα σε κινούμενο ρευστό. $\vec{v}_0 \neq 0$

Εξίσωση συνέχειας: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Εξίσωση Euler: $$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p - \vec{\nabla}\Phi$$

Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\vec{\nabla}(a \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})$$

η εξίσωση του Euler παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p - \vec{\nabla}(\frac{1}{2}v^2 + \Phi)$$

Επειδή το ρευστό μας είναι αστρόβιλο και βαροτροπικό μπορούμε να ορίσουμε τις ποσότητες:

$\vec{v} = -\vec{\nabla}\psi$ και $\vec{\nabla}h = \frac{\vec{\nabla}p}{\rho}$ όπου *h* είναι η ειδική ενθαλπία.

Η εξίσωσης του Euler μετά την εισαγωγή των παραπάνω ποσοτήτων θα πάρει τελικά την μορφή:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\psi)^2 + h + \Phi$$

Θεωρούμε τώρα διαταραχές της μορφής:

$$p = p_0 + p_1\ ,\ \rho = \rho_0 + \rho_1\ ,\ \psi = \psi_0 + \psi_1\ ,\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$$

Από τον ορισμό της η ενθαλπία θα είναι συνάρτηση της πίεσης και άρα για τη διαταραχή της θα έχουμε:

$h(p_0 + p_1) = h_0 + (\frac{\partial h}{\partial p})_{p_0} p_1$ όπου $(\frac{\partial h}{\partial p})_{p_0} = \frac{1}{\rho_0}$ αφού $dh = \frac{dp}{\rho}$

Έτσι οι εξισώσεις για τις διαταραχές θα είναι:

Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho_0 \vec{v}_1 + \rho_1 \vec{v}_0\right) = 0$$

Εξίσωση Euler

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{p_1}{\rho_0} - \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \psi_1$$

Επειδή το ρευστό είναι βαροτροπικό μπορούμε να εκφράσουμε την πυκνότητα ως συνάρτηση της πίεσης

$$\rho_1 = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s\right)^{-1} p_1 = c^{-2} p_1$$

Και από τον συνδυασμό των δύο τελευταίων εξισώσεων θα πάρουμε

$$\rho_1 = c^{-2} \rho_0 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \psi_1\right)$$

Τελικά εισάγοντας την εξίσωση που προέκυψε από την εξίσωση του Euler στην εξίσωση που προέκυψε από την εξίσωση συνέχειας θα πάρουμε

$$-\frac{\partial}{\partial t}(c^{-2}\rho_0(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\vec{v}_0\cdot\vec{\nabla}\psi_1))+\vec{\nabla}\cdot(\rho_0\vec{\nabla}\psi_1-c^{-2}\rho_0\vec{v}_0(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\vec{v}_0\cdot\vec{\nabla}\psi_1))=0$$

Αυτή η εξίσωση απλοποιείται δραματικά αν ορίσουμε τον πίνακα

$$f^{\mu\nu}\equiv\frac{\rho_0}{c^2}\begin{pmatrix}-1 & -u_0^j\\ -u_0^i & (c^2\delta^{ij}-u_0^iu_0^j)\end{pmatrix}$$

και παίρνει την μορφή $\partial_\mu(f^{\mu\nu}\partial_\nu\psi_1)=0$ όπου $x^\mu\equiv(t,x^i)$

Σε ένα καμπύλο χώρο, η κυματική εξίσωση για ένα βαθμωτό πεδίο έχει τη μορφή

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi)=0$$

Η σύγκριση των δύο εξισώσεων μας υποδεικνύει να ορίσουμε την μετρική του χώρου στον οποίο θα διαδίδονται τα κύματα από την εξίσωση

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}$$

Τελικά η μετρική του γεωμετρικού ανάλογου θα έχει τη μορφή

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\rho}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -u_j \\ -u_i & \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\rho}{c}(-(c^2 - v^2)dt^2 - 2u_i dx^i dt + \delta_{ij} dx^i dx^j)$$

και η κίνηση του ηχητικού κύματος θα γίνεται πάνω στις φωτοειδείς γεωδαισιακές αυτού το χωρόχρονου.

Αυτό σημαίνει ότι οι τροχιές των ηχητικών κυμάτων θα ικανοποιούν τη σχέση

$$-(c^2 - v^2)dt^2 - 2u_i dx^i dt + \delta_{ij} dx^i dx^j = 0$$

που πρακτικά είναι ισοδύναμο με το να πούμε πως η ταχύτητα της διαταραχής θα έχει την ταχύτητα του ήχου στο σύστημα αναφοράς της ροής του ρευστού

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = c\vec{n} + \vec{v}$$

όπου το διάνυσμα $\vec{n}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, στη διεύθυνση διάδοσης της διαταραχής.

$$\vec{n}^2 = 1$$

Παραδείγματα ανάλογων ροών.

- Ροή από δυναμικό $\psi = Aln(r)$

Το πεδίο της ροής όπως προκύπτει από το παραπάνω δυναμικό θα είναι

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}\psi = -\frac{A}{r}\hat{r}$$

που όπως βλέπουμε είναι ακτινικό και άρα οι γραμμές ροής θα είναι ευθείες με ακτινική διεύθυνση.

Αν επιλέξουμε για τη σταθερά *A* την τιμή 1 και θεωρήσουμε και ότι η ταχύτητα του ήχου είναι ίση με τη μονάδα, τότε βλέπουμε ότι υπάρχει μία περιοχή για την οποία η ταχύτητα της ροής είναι

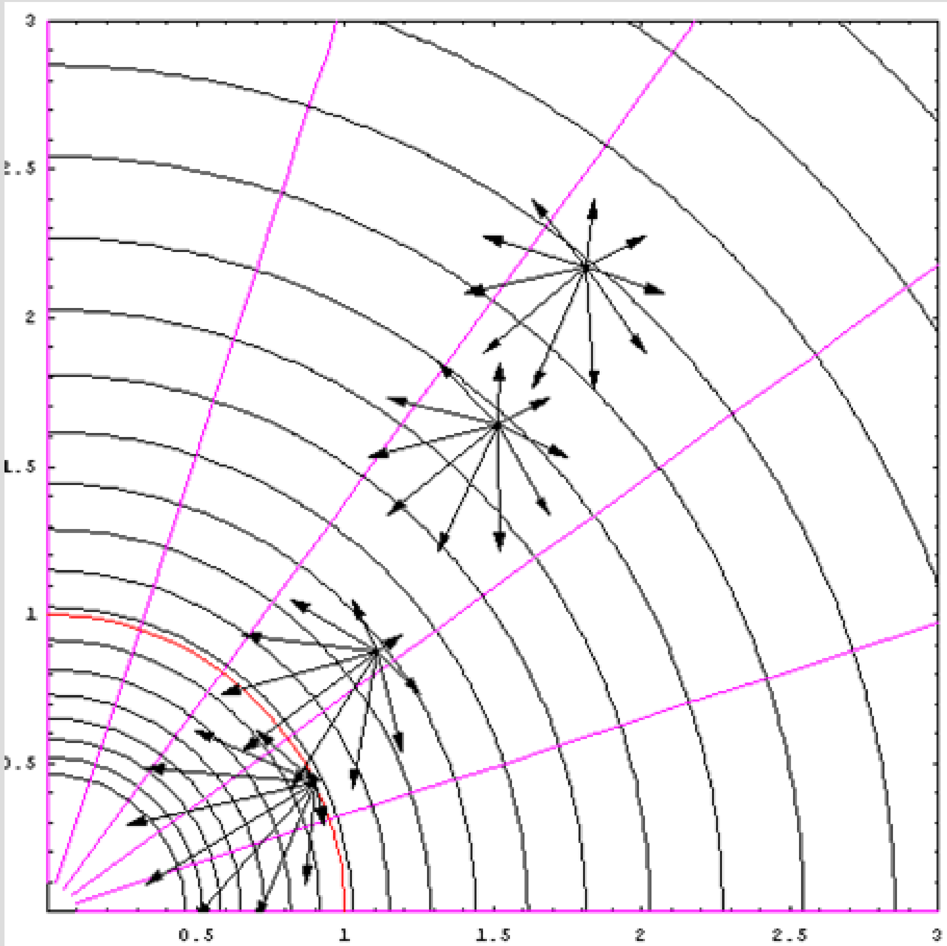
$$u^2 > c^2$$

Η περιοχή αυτή βρίσκεται μέσα από την κόκκινη καμπύλη και πρακτικά είναι το ανάλογο της εσωτερικής από τον ορίζοντα περιοχής μίας μελανής οπής.

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τις γραμμές ροής, τον ορίζοντα και τις καμπύλες σταθερής ταχύτητας.

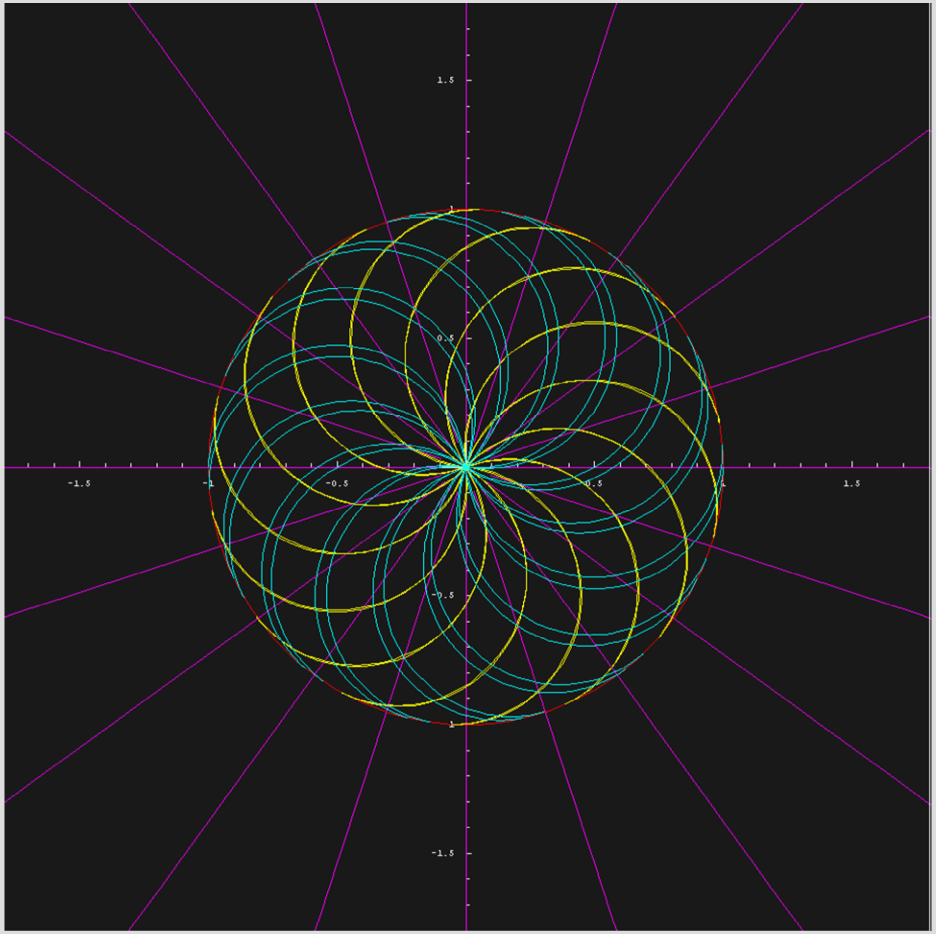
Τα διανύσματα δείχνουν τις διευθύνσεις προς τις οποίες θα κινηθεί μια διαταραχή από τα διάφορα σημεία της ροής.

Βλέπουμε ότι από τον ορίζοντα και μέσα οι διαταραχές δεν μπορούν να διαδοθούν προς τα έξω.



Στα πλαίσια της υδροδυναμικής, στο εσωτερικό του ορίζοντα, οι τροχιές των διαταραχών περιγράφονται από τις χαρακτηριστικές καμπύλες.

Υπάρχουν δύο οικογένειες χαρακτηριστικών που περιγράφουν τις διαταραχές που κινούνται προς τα έξω και προς τα μέσα.



Τα σημεία τομής των χαρακτηριστικών ορίζουν τους κώνους Mach που είναι το ανάλογο των κώνων φωτός.

Όπως βλέπουμε στο σχήμα όλοι οι κώνοι Mach δείχνουν προς τα μέσα.

Στη γεωμετρική περιγραφή μπορούμε να ορίσουμε τις φωτοειδείς διευθύνσεις και να κατασκευάσουμε χωροχρονικά διαγράμματα που να δείχνουν τις τροχιές των ηχητικών κυμάτων.

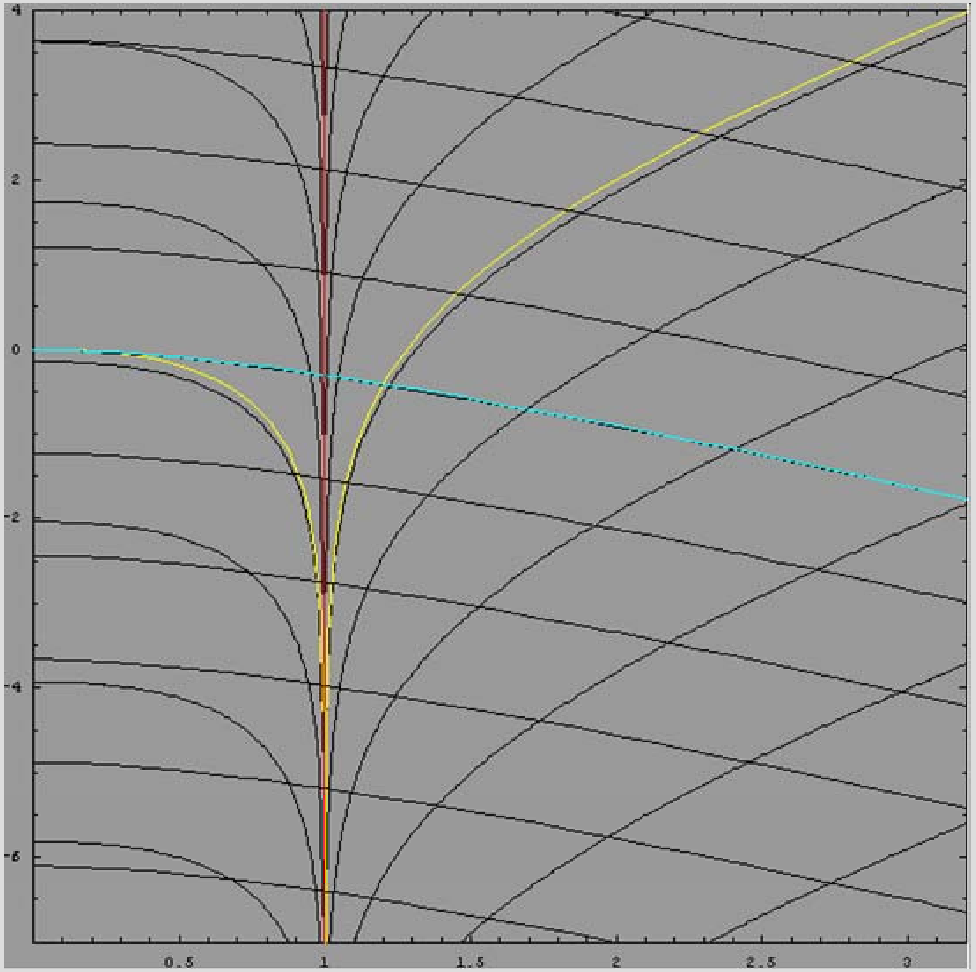
Συγκεκριμένα μπορούμε να ορίσουμε τις καμπύλες

$$du = dt - \frac{dr}{c+v(r)}$$

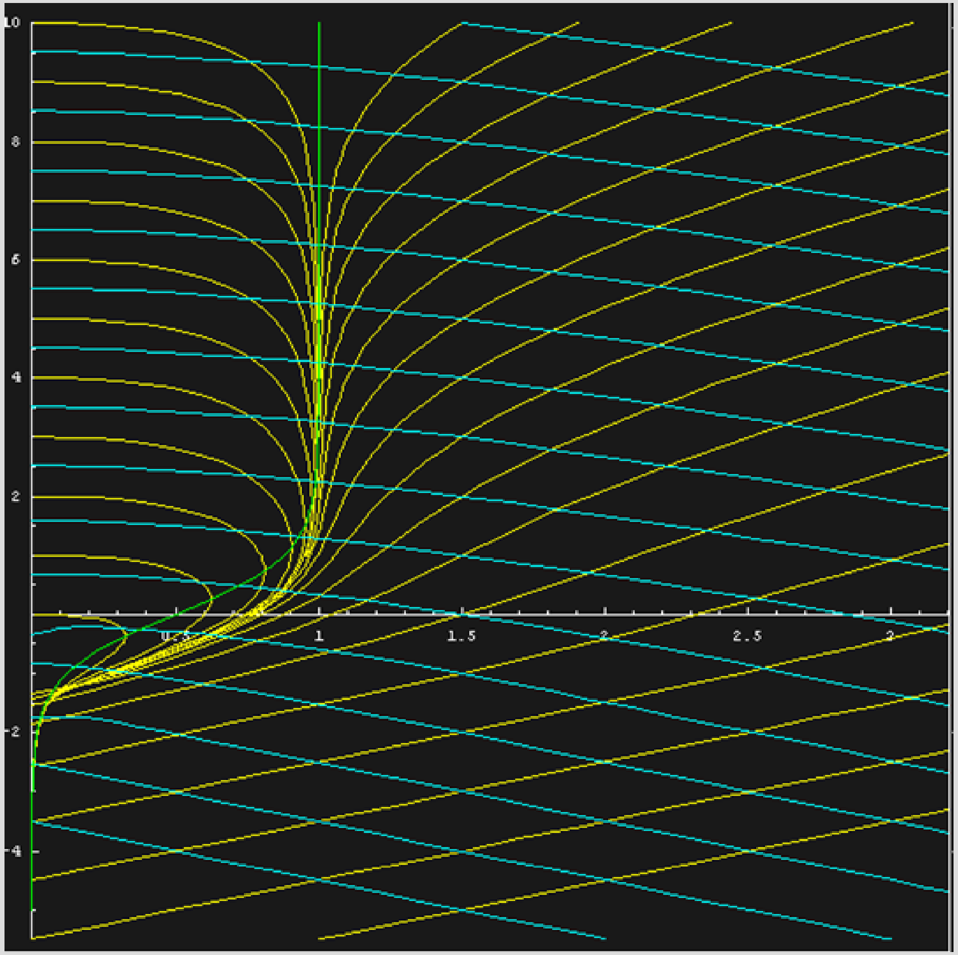
$$dw = dt + \frac{dr}{c-v(r)}$$

οι οποίες έχουν ως εφαπτόμενα φωτοειδή διανύσματα. Αυτές οι καμπύλες ορίζουν το σύστημα των φωτοειδών συντεταγμένων.

Στο σχήμα βλέπουμε τις εξερχόμενες και τις εισερχόμενες φωτοειδείς τροχιές και τον ορίζοντα. Οι τομές των τροχιών ορίζουν κώνους φωτός.



Το ενδιαφέρον με τα υδροδυναμικά ανάλογα είναι ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή και δυναμικών χωροχρονικών μοντέλων.
Στο σχήμα φαίνεται ένα μοντέλο δημιουργίας μίας μελανής οπής. Εδώ παρουσιάζονται εκτός από τον ορίζοντα γεγονότων και ένας φαινόμενος ορίζοντας.



• Ροή από δυναμικό $\psi = A ln(r) + B\theta$

Το πεδίο της ροής όπως προκύπτει από το παραπάνω δυναμικό θα είναι

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}\psi = -\frac{A\hat{r} + B\hat{\theta}}{r}$$

Το πεδίο αυτό είναι το πεδίο ενός στροβίλου.

Αν επιλέξουμε για τη σταθερά *A* την τιμή 1 και για τη σταθερά *B* την τιμή -1, τότε βλέπουμε ότι υπάρχει μία περιοχή για την οποία η ταχύτητα της ροής είναι

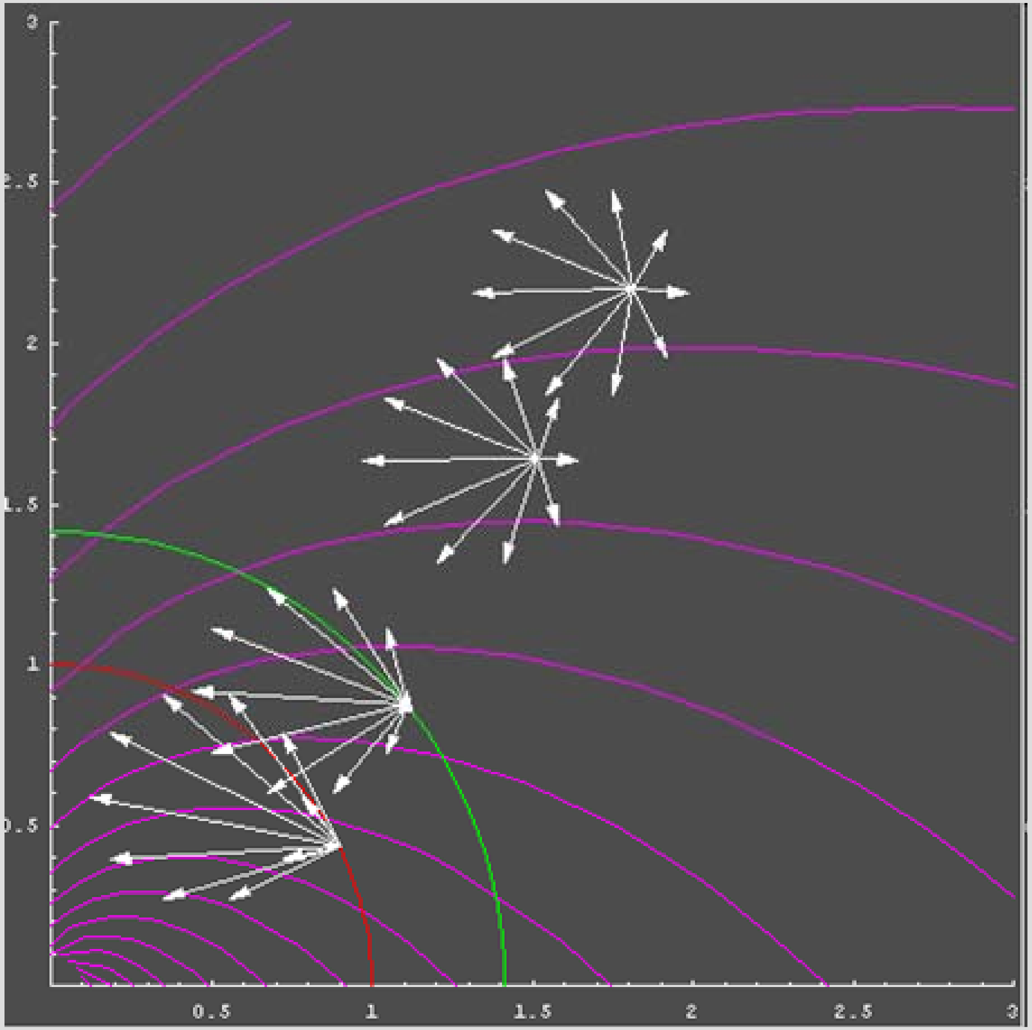
$$v^2 > c^2$$

και μία περιοχή για την οποία η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας της ροής είναι

$$v_r > c$$

Η περιοχή όπου το μέτρο της ταχύτητας ροής είναι μεγαλύτερο από την ταχύτητα του ήχου ορίζει την εργόσφαιρα κατ’ αναλογία με την γεωμετρία τύπου Kerr.

Η περιοχή όπου η ακτινική συνιστώσα είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου ορίζει τον ορίζοντα γεγονότων.



Χαρακτηριστικές της ροής στροβίλου.