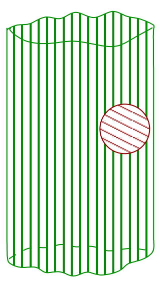
$\boxed{1}$: Θέμα 4ο από εξέταση της 7/2/2006:
Σφαιρικός φλοιός εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής b είναι ομογενώς μαγνητισμένος με μαγνήτιση $\vec{M}$.
(α) Ποιο το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και το πεδίο $\vec{H}$ που δημιουργεί σε κάθε σημείο του χώρου;
(β) Σχεδιάστε τις δυναμικές γραμμές του πεδίου $\vec{B}$.
Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό τον τύπο $\vec{B}_\sigma = (2/3)\mu_0 \vec{M}_\sigma$ που ισχύει για το εσωτερικό κάποιας συγκεκριμένης κατανομής μαγνήτισης, καθώς και το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό αυτής της κατανομής.

$\boxed{2}$: Θέμα 4ο από εξέταση της 26/5/2005:
Μικρή σφαίρα ακτίνας α από γραμμικό μαγνητικό υλικό επιδεκτικότητας χ τοποθετείται σε απόσταση r από ένα ραβδόμορφο μαγνήτη διπολικής ροπής $\vec{m}$. Η ευθεία που ενώνει το μαγνήτη και τη σφαίρα σχηματίζει γωνία θ με την διεύθυνση της ροπής $\vec{m}$, ενώ οι διαστάσεις της σφαίρας και του μαγνήτη είναι πολύ μικρότερες από r.
(α) Ποια τα πεδία $\vec{B}_0$, $\vec{H}_0$ που δημιουργεί ο μαγνήτης στη θέση της σφαίρας πριν αυτή τοποθετηθεί εκεί;
(β) Ποια η μαγνήτιση που αποκτά η σφαίρα αφού τοποθετηθεί και ποια τα πεδία $\vec{B}$, $\vec{H}$ στο εσωτερικό της;
(Θεωρήστε γνωστά τα πεδία $\vec{B}_\sigma$, $\vec{H}_\sigma$ που δημιουργεί ομογενώς μαγνητισμένη σφαίρα μαγνήτισης $\vec{M}_\sigma$.)

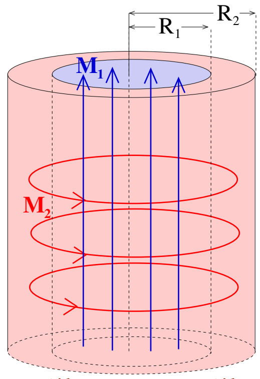
$\boxed{3}$: Θέμα 4ο από εξέταση της 1/10/2007:
Ένας μαγνητισμένος κύβος ακμής a βρίσκεται στην περιοχή $|x|, |y|, |z| < a/2$ συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$, και φέρει μαγνήτιση $\vec{M} = \lambda \sin(2\pi z/a)\,\hat{z}$, όπου $\lambda =$ σταθερά.
(α) Ποια τα δέσμια ρεύματα στο εσωτερικό και στην επιφάνεια του κύβου;
(β) Ποια η συνολική διπολική ροπή του κύβου;
(γ) Πάνω στον άξονα z και σε μεγάλες αποστάσεις από τον κύβο ($|z| \gg a$), ποια η εξάρτηση του πεδίου $\vec{B}$ από το z; Συγκεκριμένα είναι $B \propto z^{-3}$ ή $B \propto z^{-4}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

$\boxed{4}$: Θέμα 4ο από εξέταση της 4/5/2011:
Κύλινδρος απείρου μήκους είναι ομογενώς μαγνητισμένος με μαγνήτιση $\vec{M}_\kappa$ παράλληλη στον άξονά του. Μέσα στον κύλινδρο σμιλεύουμε μια σφαιρική κοιλότητα και στη θέση της τοποθετούμε ομογενώς μαγνητισμένη σφαίρα, με μαγνήτιση $\vec{M}$.



Ποια πρέπει να είναι η $\vec{M}$ (για δεδομένη $\vec{M}_\kappa$) ώστε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας να είναι μηδενικό;
Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστές τις σχέσεις $\vec{B}_{\sigma\phi} = (2/3)\mu_0 \vec{M}_{\sigma\phi}$, $\vec{B}_\kappa = \mu_0 \vec{M}_\kappa$ που ισχύουν στο εσωτερικό ομογενώς μαγνητισμένης σφαίρας και κυλίνδρου απείρου μήκους, αντίστοιχα.

$\boxed{5}$: Θέμα 4ο από εξέταση της 17/9/2010:
Κύλινδρος απείρου μήκους και ακτίνας R_1 έχει μια ομοιόμορφη μαγνήτιση $\vec{M}_1 = M_0 \hat{z}$ παράλληλη στον άξονά του. Ο κύλινδρος περιβάλλεται από κυλινδρικό φλοιό απείρου μήκους, εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2, ο οποίος έχει μαγνήτιση $\vec{M}_2 = M_0 \dfrac{R_2}{\varpi}\hat{\phi}$ (σε κυλινδρικές συντεταγμένες με άξονα z τον άξονα συμμετρίας).

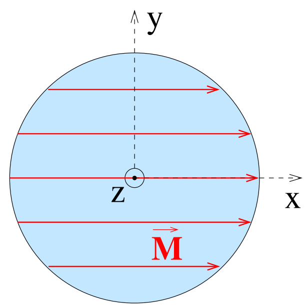


Να βρεθούν τα πεδία $\vec{H}$ και $\vec{B}$ σε όλο το χώρο.

$\boxed{6}$: Θέμα 4ο από εξέταση της 28/2/2011:
Κυλινδρικός φλοιός απείρου μήκους με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b, είναι μαγνητισμένος με μαγνήτιση παράλληλη στον άξονά του $\vec{M} = \dfrac{k}{\varpi}\,\hat{z}$ (σε κυλινδρικές συντεταγμένες, με k σταθερά).
(α) Ποια τα χωρικά και επιφανειακά δέσμια ρεύματα;
(β) Ποια τα πεδία $\vec{H}$ και $\vec{B}$ σε όλο το χώρο;

$\boxed{7}$: Θέμα 4ο από εξέταση της 19/6/2012:
Βρείτε διανυσματικό δυναμικό για το πεδίο ομοιόμορφα μαγνητισμένου κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R, με μαγνήτιση παράλληλη στον άξονά του.

$\boxed{8}$: Θέμα 3ο από εξέταση της 6/2/2012:
Κύλινδρος απείρου μήκους και ακτίνας R είναι μαγνητισμένος με σταθερή μαγνήτιση, κάθετη στον άξονά του. Έστω ο άξονας του κυλίνδρου είναι ο $\hat{z}$ και $\vec{M} = M\hat{x}$.



Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:
(α) Βρείτε τα δέσμια ρεύματα.

(β) Δικαιολογήστε γιατί υπάρχει διανυσματικό δυναμικό της μορφής $\vec{A} = A(\varpi, \phi)\hat{z}$ με τη συνάρτηση $A(\varpi, \phi)$ να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στις περιοχές $\varpi < R$ και $\varpi > R$.
(γ) Δίνεται ότι οι κατάλληλες λύσεις της εξίσωσης Laplace είναι $A = \begin{cases} C\varpi \sin\phi \,, \varpi < R \\ D\varpi^{-1} \sin\phi \,, \varpi > R \end{cases}$
Βρείτε τις σταθερές C και D χρησιμοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη $\vec{B}_{\text{έξω}} - \vec{B}_{\text{μέσα}} = \mu_0 \vec{K} \times \hat{n}$.
(δ) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο.

$\boxed{9}$: Θέμα 3$^{\text{ο}}$ από εξέταση της 5/6/2015:
Η γενική λύση της εξίσωσης $\nabla^2 \vec{A} = 0$ με $\vec{A} = A(r\,,\theta)\,\hat{\phi}$ είναι $\vec{A} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_\ell r^\ell + \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} \right) \frac{dP_\ell(\cos\theta)}{d\theta}\,\hat{\phi}$.
Οι συναρτήσεις $\frac{dP_\ell(\cos\theta)}{d\theta}$ είναι ανεξάρτητες (λέγονται προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre $P_\ell^1(\cos\theta)$ και ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνιότητας $\int_0^\pi \frac{dP_\ell(\cos\theta)}{d\theta} \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \sin\theta \; d\theta = \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1}\delta_{\ell n}$).
Οι πρώτες τέτοιες συναρτήσεις είναι $\frac{dP_0(\cos\theta)}{d\theta} = 0$, $\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta} = -\sin\theta$, $\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta} = -3\sin\theta\,\cos\theta$.
Με τη βοήθεια των παραπάνω βρείτε διανυσματικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο για μια ομογενώς μαγνητισμένη σφαίρα ακτίνας R με μαγνήτιση $\vec{M}$, ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:
(α) Βρείτε τα δέσμια ρεύματα και δείξτε ότι υπάρχει μόνο επιφανειακό $\vec{K}_b = -M\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}\hat{\phi}$ για $r = R$.
(β) Αφού αιτιολογήσετε γιατί $\vec{A} = A(r\,,\theta)\,\hat{\phi}$ και στους χώρους $r > R$, $r < R$ ισχύει $\nabla^2\vec{A} = 0$, γράψτε τη μορφή του δυναμικού χρησιμοποιώντας τη γενική λύση που δόθηκε παραπάνω και κρατώντας μόνο όρους με $\ell = 1$.
(γ) Προσδιορίστε τις σταθερές από την απαίτηση να μην απειρίζεται το διανυσματικό δυναμικό, τη συνέχεια του $\vec{A}$ και την ασυνέχεια της παραγώγου του.
(δ) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο μέσα και έξω από τη σφαίρα.

$\boxed{10}$: Θέμα 4$^{\text{ο}}$ από εξέταση της 9/9/2013:
Ένα κυλινδρικό καλώδιο απείρου μήκους και ακτίνας R αποτελείται από γραμμικό, μη-ομογενές μαγνητικό υλικό του οποίου η διαπερατότητα είναι συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα $\mu = \mu_0 + 2\mu_0\varpi/R$. Το καλώδιο διαρρέεται από ελεύθερο ρεύμα σταθερής πυκνότητας $\vec{J}_f$ παράλληλης στον άξονά του.
(α) Ποιο το πεδίο $\vec{H}$;
(β) Ποια η μαγνήτιση που αποκτά το καλώδιο;
(γ) Ποια τα δέσμια ρεύματα (χωρικά και επιφανειακά);

$\boxed{11}$: Θέμα 3$^{\text{ο}}$ από εξέταση της 22/5/2013:
Μια πλάκα μεγάλων διαστάσεων και πάχους $2a$ είναι παράλληλη στο επίπεδο xy και έχει τις βάσεις τις στα $z = +a$ και $z = -a$. Η πλάκα είναι ομογενώς μαγνητισμένη με μαγνήτιση $\vec{M} = M\hat{y}$.
(α) Βρείτε τα δέσμια ρεύματα και τα πεδία $\vec{B}$, $\vec{H}$ μέσα και έξω από την πλάκα.
(β) Βρείτε σε όλο το χώρο το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ που μηδενίζεται στο $z = 0$ και ικανοποιεί τη βαθμίδα Coulomb ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$).

$\boxed{12}$: Θέμα 3$^{\text{ο}}$ από εξέταση της 5/5/2014:
Έστω μαγνητικό πεδίο με μορφή σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0\rho\omega}{15}\Big[\big(5R^2 - 3r^2\big)\cos\theta\,\hat{r} + \big(6r^2 - 5R^2\big)\sin\theta\,\hat{\theta}\Big], r \le R \\ \frac{\mu_0\rho\omega R^5}{15r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right), r \ge R \end{cases}$$

όπου ρ, ω, R σταθερές.
(α) Βρείτε τα ρεύματα που δημιουργούν το πεδίο, χωρικά και επιφανειακά, και δείξτε ότι αντιστοιχούν σε μία ομογενώς φορτισμένη σφαίρα που περιστρέφεται γύρω από μία διάμετρό της.
(β) Βρείτε διανυσματικό δυναμικό για το δοσμένο πεδίο, της μορφής $\vec{A} = A(r,\theta)\;\hat{\phi}$.
(γ) Δείξτε ότι μια μαγνητισμένη σφαίρα θα μπορούσε να δημιουργήσει το ίδιο πεδίο για συγκεκριμένη μαγνήτιση της μορφής $\vec{M} = M(r,\theta)\;\hat{r}$ την οποία και να βρείτε.
(δ) Χρησιμοποιώντας το δοσμένο πεδίο μιας ομογενώς φορτισμένης σφαίρας που περιστρέφεται γύρω από μία διάμετρό της βρείτε το πεδίο σφαιρικού φλοιού φορτισμένου με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ, ο οποίος περιστρέφεται γύρω από μία διάμετρό του.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x, y, z)	Κυλινδρικές (ϖ, ϕ, z) $\left\{\begin{array}{c} x=\varpi\cos\phi \\ y=\varpi\sin\phi \\ z=z \end{array}\right\}$	Σφαιρικές (r, θ, ϕ) $\left\{\begin{array}{c} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{array}\right\}$
$\vec{v}$	$v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+v_z\hat{z}$	$v_\varpi\hat{\varpi}+v_\phi\hat{\phi}+v_z\hat{z}$	$v_r\hat{r}+v_\theta\hat{\theta}+v_\phi\hat{\phi}$
$\vec{\nabla}f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \varpi}\hat{\varpi}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\left(\varpi v_\varpi\right)}{\partial\varpi}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 v_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$
$\vec{\nabla}\times\vec{v}$	$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x}+$ $\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y}+$ $\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z}$	$\left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial v_z}{\partial\phi}-\frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\varpi}+$ $\left(\frac{\partial v_\varpi}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial\varpi}\right)\hat{\phi}+$ $\frac{1}{\varpi}\left[\frac{\partial\left(\varpi v_\phi\right)}{\partial\varpi}-\frac{\partial v_\varpi}{\partial\phi}\right]\hat{z}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(v_\phi\sin\theta\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r}+$ $\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-\frac{\partial\left(rv_\phi\right)}{\partial r}\right]\hat{\theta}+$ $\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rv_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$
$\vec{\nabla}^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\varpi\frac{\partial f}{\partial\varpi}\right)+\frac{1}{\varpi^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
$d\vec{l}$	$dx\hat{x}+dy\hat{y}+dz\hat{z}$	$d\varpi\hat{\varpi}+\varpi d\phi\hat{\phi}+dz\hat{z}$	$dr\hat{r}+rd\theta\hat{\theta}+r\sin\theta d\phi\hat{\phi}$
$d\vec{a}$	$dydz\hat{x}+dxdz\hat{y}+dxdy\hat{z}$	$\varpi d\phi dz\hat{\varpi}+d\varpi dz\hat{\phi}+\varpi d\varpi d\phi\hat{z}$	$r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{r}+r\sin\theta drd\phi\hat{\theta}+rdrd\theta\hat{\phi}$
$d\tau$	$dxdydz$	$\varpi d\varpi d\phi dz$	$r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$: (α) Η κατανομή μαγνήτισης του φλοιού μπορεί να θεωρηθεί επαλληλία μιας ομογενώς μαγνητισμένης σφαίρας ακτίνας b και μαγνήτισης $\vec{M}_b = \vec{M}$ με μια ομογενώς μαγνητισμένη σφαίρα ακτίνας a και μαγνήτισης $\vec{M}_a = -\vec{M}$.

Το πεδίο που προκαλεί η πρώτη σφαίρα είναι $\vec{B}_b = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_b = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$ στο εσωτερικό της και $\vec{B}_b = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\left(\vec{m}_b\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{m}_b\right] = \frac{\mu_0 b^3}{3r^3}\left[3\left(\vec{M}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{M}\right]$ στο εξωτερικό της (πεδίο διπόλου με διπολική ροπή ίση με τη συνολική ροπή της σφαίρας, δηλ. $\vec{m}_b = \frac{4\pi b^3}{3}\vec{M}$).

Το πεδίο που προκαλεί η δεύτερη σφαίρα είναι $\vec{B}_a = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_a = -\frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$ στο εσωτερικό της και $\vec{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\left(\vec{m}_a\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{m}_a\right] = -\frac{\mu_0 a^3}{3r^3}\left[3\left(\vec{M}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{M}\right]$ στο εξωτερικό της (πεδίο διπόλου με διπολική ροπή ίση με τη συνολική ροπή της σφαίρας, δηλ. $\vec{m}_a = -\frac{4\pi a^3}{3}\vec{M}$).

Είναι λοιπόν $\vec{B}_b = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}\,, r<b \\ \frac{\mu_0 b^3}{3r^3}\left[3\left(\vec{M}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{M}\right]\,, r>b \end{cases}$

και $\vec{B}_a = \begin{cases} -\frac{2}{3}\mu_0\vec{M}\,, r<a \\ -\frac{\mu_0 a^3}{3r^3}\left[3\left(\vec{M}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{M}\right]\,, r>a \end{cases}$

Το ολικό πεδίο είναι $\vec{B} = \vec{B}_b + \vec{B}_a = \begin{cases} 0\,, r<a \\ \frac{2}{3}\mu_0\vec{M} - \frac{\mu_0 a^3}{3r^3}\left[3\left(\vec{M}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{M}\right]\,, a<r<b \\ \frac{\mu_0(b^3-a^3)}{3r^3}\left[3\left(\vec{M}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{M}\right]\,, r>b \end{cases}$

Αν εκφράζαμε τα πεδία σε σφαιρικές συντεταγμένες με $\vec{M} = M\hat{z}$, ακολουθώντας τα ίδια βήματα θα βρίσκαμε $\vec{B} = \begin{cases} 0\,, r<a \\ \frac{2}{3}\mu_0 M\hat{z} - \frac{\mu_0 M a^3}{3r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)\,, a<r<b \\ \frac{\mu_0 M(b^3-a^3)}{3r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)\,, r>b \end{cases}$

Το πεδίο $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Leftrightarrow \vec{H} = \begin{cases} 0\,, r<a \\ -\frac{1}{3}\vec{M} - \frac{a^3}{3r^3}\left[3\left(\vec{M}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{M}\right]\,, a<r<b \\ \frac{b^3-a^3}{3r^3}\left[3\left(\vec{M}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{M}\right]\,, r>b \end{cases}$

(β) Στην περιοχή $r<a$ δεν υπάρχει πεδίο.

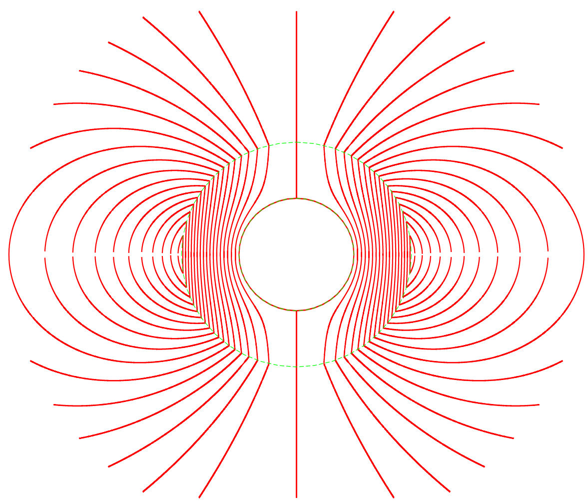
Στην περιοχή $a<r<b$ το πεδίο γράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες (με άξονα z ομόρροπο της $\vec{M}$) $\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0 M\hat{z} - \frac{\mu_0 M a^3}{3r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$ ή αντικαθιστώντας το $\hat{z} = (\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\hat{z}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$, $\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0 M\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{r} - \frac{2}{3}\mu_0 M\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)\sin\theta\,\hat{\theta}$. Το πεδίο είναι επαλληλία ομογενούς πεδίου ομόρροπου της $\vec{M}$ με πεδίο διπόλου ροπής αντίρροπης του ομογενούς πεδίου. Το αποτέλεσμα «κυριαρχείται» από το ομογενές πεδίο, διότι ακόμα και πάνω στον άξονα συμμετρίας ($\sin\theta = 0$) όπου το διπολικό πεδίο είναι μέγιστο, το συνολικό πεδίο $\frac{2}{3}\mu_0 M\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\hat{z}$ είναι ομόρροπο του ομογενούς.

Στην περιοχή $r>b$ το πεδίο είναι διπολικό, ροπής ομόρροπης της $\vec{M}$.

Οι δυναμικές γραμμές του $\vec{B}$ είναι κλειστές, αλλά το πεδίο δεν είναι παντού συνεχές (οπότε ίσως οι γραμμές «διαθλώνται»).

Στην ακτίνα $r=a$ το πεδίο αλλάζει από 0 για $r=a^-$ σε εφαπτομενικό για $r=a^+$ (δεν υπάρχει κάθετη συνιστώσα για $r=a^+$, όπως και για $r=a^-$, λόγω της συνέχειάς της).

Στην ακτίνα $r=b$ οι γραμμές του $\vec{B}$ διαθλώνται (ενώ η κάθετη συνιστώσα του πεδίου B_r είναι συνεχής, η εφαπτομενική B_θ είναι ασυνεχής, λόγω της ύπαρξης επιφανειακού δέσμιου ρεύματος).



Οι εξισώσεις των δυναμικών γραμμών μπορούν να βρεθούν όπως στην άσκηση $\boxed{5}$ του 3ου σετ. Για το μέρος $r>b$ όπου το πεδίο είναι διπολικό προκύπτει $\frac{\sin^2\theta}{r} = \frac{3}{2\pi\mu_0 M(b^3-a^3)}\Phi$, ενώ για το μέρος $a<r<b$ προκύπτει $\frac{\frac{r^3}{a^3}-1}{r}\sin^2\theta = \frac{3}{2\pi\mu_0 M a^3}\Phi$.

$\boxed{2}$: (α) $\vec{B}_0 = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$, $\vec{H}_0 = \dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0}$.

(β) Αφού η σφαίρα είναι μικρή σε σχέση με την απόσταση r, το πρόβλημα είναι ίδιο με την τοποθέτηση σφαίρας από γραμμικό μαγνητικό υλικό μέσα σε ομογενές πεδίο, το οποίο έχουμε λύσει.

Ένας τρόπος λύσης ακολουθεί (δεύτερο τρόπο αποτελεί η επίλυση της εξίσωσης Laplace για το βαθμωτό δυναμικό που συνδέεται με το πεδίο $\vec{H}$· ένας τρίτος τρόπος βασίζεται στο να βρούμε το πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας με μια σειρά από διαδοχικές προσεγγίσεις).

Αν $\vec{M}_\sigma$ η μαγνήτιση της σφαίρας, αυτή δημιουργεί στο εσωτερικό της πεδία $\vec{B}_\sigma = \dfrac{2}{3}\mu_0\vec{M}_\sigma$ και $\vec{H}_\sigma = \dfrac{\vec{B}_\sigma}{\mu_0} - \vec{M}_\sigma = -\dfrac{\vec{M}_\sigma}{3}$. Άρα τα ολικά πεδία (από αρχή επαλληλίας) είναι $\vec{B} = \vec{B}_0 + \dfrac{2}{3}\mu_0\vec{M}_\sigma$, $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \dfrac{\vec{M}_\sigma}{3}$.

Αφού το υλικό της σφαίρας είναι γραμμικό ισχύει για τα ολικά πεδία $\vec{B} = \mu_0(1+\chi)\vec{H} \Leftrightarrow \vec{B}_0 + \dfrac{2}{3}\mu_0\vec{M}_\sigma = \mu_0(1+\chi)\left(\dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \dfrac{\vec{M}_\sigma}{3}\right) \Leftrightarrow \vec{M}_\sigma = \dfrac{3\chi}{3+\chi}\dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0}$, οπότε $\vec{H} = \dfrac{\vec{M}_\sigma}{\chi} = \dfrac{3}{3+\chi}\dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0}$ και $\vec{B} = \mu_0(1+\chi)\vec{H} = \dfrac{3+3\chi}{3+\chi}\vec{B}_0$.

$\boxed{3}$: (α) $\vec{J}_b = \vec{\nabla}\times\vec{M} = 0$.

$\vec{K}_b = \vec{M}\times\hat{n} = \lambda\sin(2\pi z/a)\,\hat{z}\times\hat{n}$.

Στις επιφάνειες $z = \pm a/2$ όπου $\hat{n} = \pm\hat{z}$, είναι $\vec{K}_b = 0$.

Στην επιφάνεια $x = a/2$ όπου $\hat{n} = \hat{x}$, είναι $\vec{K}_b = \lambda\sin(2\pi z/a)\,\hat{y}$. Η φορά του επιφανειακού ρεύματος είναι ομόρροπη του $\hat{y}$ στα θετικά z όπου $2\pi z/a \in (0,\pi) \Leftrightarrow \sin(2\pi z/a) > 0$ και αντίρροπη του $\hat{y}$ στα αρνητικά z (το ρεύμα μηδενίζεται για $z=0$ και $z = \pm a/2$).

Στην επιφάνεια $x = -a/2$ όπου $\hat{n} = -\hat{x}$, είναι $\vec{K}_b = -\lambda\sin(2\pi z/a)\,\hat{y}$.

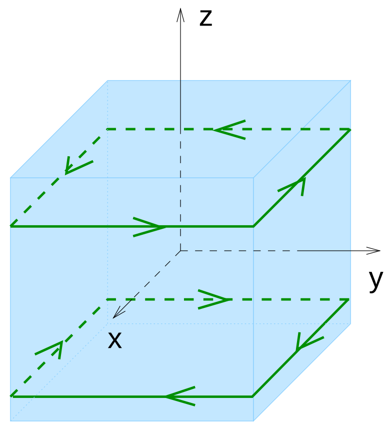
Στην επιφάνεια $y = a/2$ όπου $\hat{n} = \hat{y}$, είναι $\vec{K}_b = -\lambda\sin(2\pi z/a)\,\hat{x}$.

Στην επιφάνεια $y = -a/2$ όπου $\hat{n} = -\hat{y}$, είναι $\vec{K}_b = \lambda\sin(2\pi z/a)\,\hat{x}$.

Γενικά λοιπόν, κοιτώντας από μεγάλες αποστάσεις πάνω στον άξονα z προς τον κύβο, το επιφανειακό ρεύμα κινείται αριστερόστροφα στα θετικά z και δεξιόστροφα στα αρνητικά z, όπως στο παρακάτω σχήμα.

(β) $\vec{m} = \iiint \vec{M}\,d\tau = \iiint \vec{M}\,dx\,dy\,dz = \lambda\hat{z}\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-a/2}^{a/2}dy\int_{-a/2}^{a/2}\sin(2\pi z/a)\,dz = 0.$

Το ίδιο από $\vec{m} = \hat{z}\displaystyle\int a^2 dI$ με $dI = K_b d\ell_\perp = M dz$.



(γ) Αφού $\vec{m} = 0$ ο διπολικός όρος, ο οποίος μειώνεται σαν $B \propto z^{-3}$, δεν υπάρχει. Άρα το πεδίο είναι $B \propto z^{-4}$ (λόγω του επόμενου όρου στο πολυπολικό ανάπτυγμα).

Μπορούμε να βρούμε και τη φορά του $\vec{B}$ σε θετικά $z \gg a$: Τα επιφανειακά ρεύματα του κύβου ισοδυναμούν με δύο δίπολα, ένα με ροπή $\vec{m}_1 = m\hat{z}$ με φορά ομόρροπη του $\hat{z}$ που αντιστοιχεί στο ρεύμα του πάνω μέρους του κυλίνδρου ($0 < z < a/2$) και ένα δεύτερο με ροπή $\vec{m}_2 = -m\hat{z}$ με φορά αντίρροπη του $\hat{z}$ που αντιστοιχεί στο ρεύμα του κάτω μέρους του κυλίνδρου ($-a/2 < z < 0$). Το $\vec{m}_1$ δημιουργεί πεδίο ομόρροπο του $\hat{z}$ σε σημεία με θετικά $z \gg a$, ενώ το $\vec{m}_2$ δημιουργεί πεδίο αντίρροπο του $\hat{z}$. Επειδή όμως το $\vec{m}_1$ είναι πιο κοντά απ' ότι το $\vec{m}_2$ τελικά το $\vec{B}$ είναι ομόρροπο του $\hat{z}$.

$\boxed{4}$: Μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα επαλληλία κυλίνδρου απείρου μήκους με ομογενή μαγνήτιση $\vec{M}_\kappa$ παράλληλη στον άξονά του και μιας ομογενώς μαγνητισμένης σφαίρας με μαγνήτιση $\vec{M}_{\sigma\phi} = \vec{M} - \vec{M}_\kappa$ στη θέση της κοιλότητας. Το πεδίο της πρώτης κατανομής είναι $\vec{B}_\kappa = \mu_0\vec{M}_\kappa$, ενώ της δεύτερης, στο εσωτερικό της σφαίρας, είναι $\vec{B}_{\sigma\phi} = (2/3)\mu_0\vec{M}_{\sigma\phi}$. Άρα το πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας είναι $\vec{B}_\kappa + \vec{B}_{\sigma\phi} = \mu_0\vec{M}_\kappa + \dfrac{2\mu_0}{3}\left(\vec{M} - \vec{M}_\kappa\right) = \dfrac{\mu_0}{3}\left(2\vec{M} + \vec{M}_\kappa\right)$.

Για να είναι μηδέν πρέπει $\vec{M} = -\dfrac{1}{2}\vec{M}_\kappa$.

$\boxed{5}$: Η δοσμένη κατανομή μαγνήτισης είναι επαλληλία κυλίνδρου ακτίνας R_1 με μαγνήτιση $\vec{M}_1$ και κυλινδρικού φλοιού εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής ακτίνας R_2 με μαγνήτιση $\vec{M}_2$. Χρησιμοποιώντας την αρχή επαλληλίας θα βρούμε το πεδίο $\vec{H}$ προσθέτοντας το πεδίο $\vec{H}_1$ του κυλίνδρου με μαγνήτιση $\vec{M}_1$ και το πεδίο $\vec{H}_2$ από τον κυλινδρικό φλοιό με μαγνήτιση $\vec{M}_2$.[1]

Για τον κύλινδρο με μαγνήτιση $\vec{M}_1 = M_0\hat{z}$ τα δέσμια ρεύματα είναι $\vec{J}_{b1} = \vec{\nabla}\times\vec{M}_1 = 0$ και $\vec{K}_{b1} = \vec{M}_1\times\hat{n} = M_0\hat{z}\times\hat{\varpi} = M_0\hat{\phi}$ στην επιφάνειά του $\varpi = R_1$, οπότε το πεδίο $\vec{B}_1$ είναι της μορφής $B_1(\varpi)\hat{z}$. Αφού $\vec{H}_1 = \dfrac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{M}_1$ και το πεδίο $\vec{H}_1 = H_1(\varpi)\hat{z}$. Εφαρμόζοντας ολοκληρωτικό νόμο Ampère $\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{f,\varepsilon\gamma\kappa}$ σε ορθογώνιο βρόχο με πλευρές ϖ, $\varpi=\infty$, $z=z_0$, $z=z_0+\Delta z$ καταλήγουμε στην $H_1(\varpi)\Delta z + 0 + \underbrace{H_1(\varpi\to\infty)}_{0}(-\Delta z) + 0 = 0$ διότι δεν υπάρχει ελεύθερο ρεύμα να διαπερνά το βρόχο. Το αποτέλεσμα είναι ίδιο είτε $\varpi \geq R_1$ είτε $\varpi < R_1$. Βρίσκουμε λοιπόν ότι παντού $\vec{H}_1 = 0$.

Αλλιώς: Δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία, οπότε παντού ισχύει $\vec{\nabla}\times\vec{H}_1 = 0$. Επίσης η απόκλιση $\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_1 = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}_1 = -\vec{\nabla}\cdot(M_1\hat{z}) = -\dfrac{\partial M_1}{\partial z}$ είναι μη μηδενική μόνο στις βάσεις του κυλίνδρου (όπου η $\vec{M}_1$ μεταβάλλεται από $M_0\hat{z}$ στο εσωτερικό σε 0 στο εξωτερικό και άρα η $\vec{\nabla}\cdot\vec{M}_1 = \dfrac{\partial M_1}{\partial z}\hat{z}$ είναι δυνάρτηση δ). Αφού όμως τα «φορτία» $-\vec{\nabla}\cdot\vec{M}_1$ βρίσκονται σε άπειρη απόσταση το πεδίο που δημιουργούν είναι μηδενικό. (Το πρόβλημα είναι ανάλογο με ένα κυλινδρικό πυκνωτή στον οποία η απόσταση μεταξύ των πλακών είναι άπειρη – η αναλογία είναι πλήρης, αφού και εκεί $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ και η απόκλιση $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ είναι συνάρτηση δ στις βάσεις.)

Για τον φλοιό με μαγνήτιση $\vec{M}_2 = M_0\dfrac{R_2}{\varpi}\hat{\phi}$ τα δέσμια ρεύματα είναι $\vec{J}_{b2} = \vec{\nabla}\times\vec{M}_2 = 0$, $\vec{K}_{b2} = \vec{M}_2\times\hat{n} = M_0\dfrac{R_2}{R_1}\hat{\phi}\times(-\hat{\varpi}) = M_0\dfrac{R_2}{R_1}\hat{z}$ στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού $\varpi = R_1$ και $\vec{K}_{b2} = \vec{M}_2\times\hat{n} = M_0\hat{\phi}\times\hat{\varpi} = -M_0\hat{z}$ στην εξωτερική επιφάνεια του φλοιού $\varpi = R_2$, οπότε το πεδίο $\vec{B}_2$ είναι της μορφής $B_2(\varpi)\hat{\phi}$. Αφού $\vec{H}_2 = \dfrac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{M}_2$ και το πεδίο $\vec{H}_2 = H_2(\varpi)\hat{\phi}$. Εφαρμόζοντας ολοκληρωτικό νόμο Ampère $\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{f,\varepsilon\gamma\kappa}$ σε κυκλικό βρόχο ακτίνας ϖ, καταλήγουμε στην $H_2 2\pi\varpi = 0$ διότι δεν υπάρχει ελεύθερο ρεύμα να διαπερνά το βρόχο. Το αποτέλεσμα είναι ίδιο είτε $\varpi \geq R_2$, είτε $R_1 \leq \varpi < R_2$, είτε $\varpi < R_1$. Βρίσκουμε λοιπόν ότι παντού $\vec{H}_2 = 0$.

Αλλιώς: Δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία, οπότε παντού ισχύει $\vec{\nabla}\times\vec{H}_2 = 0$. Επίσης η απόκλιση $\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_2 = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}_2 = -\vec{\nabla}\cdot\left(M_2\hat{\phi}\right) = -\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial M_2}{\partial \phi} = 0$ παντού, ακόμα και πάνω στις κυλινδρικές επιφάνειες ακτίνων R_1 και R_2 όπου η $\vec{M}_2$ είναι ασυνεχής (στις επιφάνειες αυτές απειρίζεται η $\dfrac{\partial M_2}{\partial \varpi}$ η οποία δεν επηρεάζει την $\vec{\nabla}\cdot\vec{M}_2$), αλλά και στις βάσεις του φλοιού (στις οποίες απειρίζεται η $\dfrac{\partial M_2}{\partial z}$ κάτι που επίσης δεν επηρεάζει την $\vec{\nabla}\cdot\vec{M}_2$). Αφού λοιπόν και ο στροβιλισμός και η απόκλιση του $\vec{H}_2$ είναι μηδέν παντού, το πεδίο είναι $\vec{H}_2 = 0$ παντού.

Είναι $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = 0$ σε όλο το χώρο και από τη σχέση $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ προκύπτει $\vec{B} = \mu_0\vec{M} =$

$$\begin{cases} M_0\hat{z}\,, \varpi < R_1 \\ M_0\dfrac{R_2}{\varpi}\hat{\phi}\,, R_1 < \varpi < R_2 \\ 0\,, \varpi > R_2 \end{cases}$$

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα βρίσκοντας πρώτα το πεδίο $\vec{B}$ σαν επαλληλία των πεδίων $\vec{B}_1$ από τον κύλινδρο μαγνήτισης $\vec{M}_1$ και $\vec{B}_2$ από τον φλοιό μαγνήτισης $\vec{M}_2$.

Για τον κύλινδρο με μαγνήτιση $\vec{M}_1 = M_0\hat{z}$ τα δέσμια ρεύματα είναι $\vec{J}_{b1} = \vec{\nabla}\times\vec{M}_1 = 0$ και $\vec{K}_{b1} = \vec{M}_1\times\hat{n} = M_0\hat{z}\times\hat{\varpi} = M_0\hat{\phi}$ στην επιφάνειά του $\varpi = R_1$, οπότε το πεδίο $\vec{B}_1$ είναι της μορφής $B_1(\varpi)\hat{z}$. Εφαρμόζοντας ολοκληρωτικό νόμο Ampère $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\varepsilon\gamma\kappa}$ σε ορθογώνιο βρόχο με πλευρές ϖ, $\varpi=\infty$, $z=z_0$, $z=z_0+\Delta z$, έχουμε $B_1(\varpi)\Delta z + 0 + \underbrace{B_1(\varpi\to\infty)}_{0}(-\Delta z) + 0 = \begin{cases} \mu_0 M_0\Delta z\,, \varpi < R_1 \\ 0\,, \varpi > R_1 \end{cases}$ διότι το επιφανειακό ρεύμα $\vec{K}_{b1}$ στην ακτίνα R_1 διαπερνά το βρόχο μόνο αν $\varpi < R_1$. Έτσι βρίσκουμε $\vec{B}_1 = \begin{cases} M_0\hat{z}\,, \varpi < R_1 \\ 0\,, \varpi > R_1 \end{cases}$

Για τον φλοιό με μαγνήτιση $\vec{M}_2 = M_0\dfrac{R_2}{\varpi}\hat{\phi}$ τα δέσμια ρεύματα είναι $\vec{J}_{b2} = \vec{\nabla}\times\vec{M}_2 = 0$, $\vec{K}_{b2} = \vec{M}_2\times\hat{n} = M_0\dfrac{R_2}{R_1}\hat{\phi}\times(-\hat{\varpi}) = M_0\dfrac{R_2}{R_1}\hat{z}$ στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού $\varpi = R_1$ και $\vec{K}_{b2} = \vec{M}_2\times\hat{n} = M_0\hat{\phi}\times\hat{\varpi} = -M_0\hat{z}$ στην εξωτερική επιφάνεια του φλοιού $\varpi = R_2$, οπότε το πεδίο $\vec{B}_2$ είναι της μορφής $B_2(\varpi)\hat{\phi}$. Εφαρμόζοντας ολοκληρωτικό νόμο Ampère $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\varepsilon\gamma\kappa}$ σε κυκλικό βρόχο ακτίνας

[1] Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την δοσμένη κατανομή σαν επαλληλία τριών κυλίνδρων, ενός ακτίνας R_1 με μαγνήτιση $\vec{M}_1$, δεύτερου ακτίνας R_2 με μαγνήτιση $\vec{M}_2$, και τρίτου ακτίνας R_1 με μαγνήτιση $-\vec{M}_2$.

ϖ και λαμβάνοντας υπόψη ποια ρεύματα διαπερνούν το βρόχο ανάλογα με το αν $\varpi < R_1$, $R_1 < \varpi < R_2$ ή $\varpi > R_2$, έχουμε

$$B_2 2\pi\varpi = \begin{cases} 0\,, \varpi < R_1 \\ \mu_0 M_0 \dfrac{R_2}{R_1} 2\pi R_1\,, R_1 < \varpi < R_2 \\ \mu_0 \left[M_0 \dfrac{R_2}{R_1} 2\pi R_1 + (-M_0) 2\pi R_2 \right]\,, \varpi > R_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{B}_2 = \begin{cases} 0\,, \varpi < R_1 \\ \mu_0 M_0 \dfrac{R_2}{\varpi} \hat{\phi}\,, R_1 < \varpi < R_2 \\ 0\,, \varpi > R_2 \end{cases}$$

Το ολικό μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \begin{cases} \mu_0 M_0 \hat{z}\,, \varpi < R_1 \\ \mu_0 M_0 \dfrac{R_2}{\varpi} \hat{\phi}\,, R_1 < \varpi < R_2 \\ 0\,, \varpi > R_2 \end{cases}$$

και το πεδίο $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = 0$ παντού.

$\boxed{6}$: (α) $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = -\dfrac{\partial M_z}{\partial \varpi} \hat{\phi} = \dfrac{k}{\varpi^2} \hat{\phi}$, $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = \dfrac{k}{b} \hat{z} \times \hat{\varpi} = \dfrac{k}{b} \hat{\phi}$ στην εξωτερική επιφάνεια $r = b$ και $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = \dfrac{k}{a} \hat{z} \times (-\hat{\varpi}) = -\dfrac{k}{a} \hat{\phi}$ στην εσωτερική επιφάνεια $r = a$.

(β) Λόγω συμμετρίας $\vec{B} = B(\varpi)\hat{z}$ και $\vec{H} = H(\varpi)\hat{z}$. Το πεδίο $\vec{H}$ έχει μηδενικό στροβιλισμό (αφού δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα) και μηδενική απόκλιση (οι δυναμικές γραμμές του είναι ευθείες από το $z = -\infty$ στο $z = \infty$, οπότε δεν υπάρχουν πηγές $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$, όπως άλλωστε φαίνεται και από την απόκλιση σε κυλινδρικές $\vec{\nabla} \cdot (H\hat{z}) = \dfrac{\partial H}{\partial z} = 0$). Άρα είναι μηδέν παντού $\vec{H} = 0$. Το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H}) = \mu_0 \vec{M}$, δηλ. $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 k}{\varpi} \hat{z}$ στο εσωτερικό του φλοιού και μηδέν εκτός.

Θα μπορούσαμε να βρούμε το $\vec{H}$ από νόμο Ampére σε ορθογώνιο βρόχο από κυλινδρική ακτίνα ϖ ως $\varpi = \infty$ και από z_1 σε $z_2 = z_1 + \Delta z$. Αφού $H(\varpi = \infty) = 0$ και ο βρόχος δεν διαπερνάται από ελεύθερα ρεύματα, προκύπτει $H(\varpi) = 0$ για κάθε ακτίνα ϖ.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να βρούμε το $\vec{B}$ από νόμο Ampére σε ορθογώνιο βρόχο από κυλινδρική ακτίνα ϖ ως $\varpi = \infty$, όπου $B(\varpi = \infty) = 0$, και από z_1 σε z_2. Επιλέγοντας φορά διαγραφής $+\hat{z}$ στην μικρότερη ακτίνα ϖ, το διάνυσμα της επιφάνειας έχει φορά $+\hat{\phi}$ (δηλ. υπολογίζουμε θετικά τα ρεύματα με αυτή τη φορά και αρνητικά αυτά που έχουν φορά $-\hat{\phi}$). Εδώ πρέπει να πάρουμε περιπτώσεις.

Αν $\varpi > b$ ο βρόχος δεν διαπερνάται από ρεύματα, οπότε προκύπτει $B(\varpi) = 0$.

Αν $a < \varpi < b$ ο βρόχος διαπερνάται από επιφανειακό ρεύμα στην ακτίνα b, ίσο με $\dfrac{k}{b}\Delta z$ και χωρικό ρεύμα $\iint \vec{J} \cdot d\vec{a} = \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} dz \int_{\varpi}^{b} d\varpi \frac{k}{\varpi^2} = \left(-\dfrac{k}{b} + \dfrac{k}{\varpi}\right) \Delta z$, οπότε προκύπτει $B(\varpi)\Delta z - 0 = \mu_0 \left(\dfrac{k}{b} - \dfrac{k}{b} + \dfrac{k}{\varpi}\right) \Delta z \Leftrightarrow B(\varpi) = \mu_0 \dfrac{k}{\varpi}$.

Αν $\varpi < a$ ο βρόχος διαπερνάται από επιφανειακό ρεύμα $\dfrac{k}{b}\Delta z$ στην ακτίνα b, επιφανειακό ρεύμα $-\dfrac{k}{a}\Delta z$ στην ακτίνα a και χωρικό ρεύμα $\iint \vec{J} \cdot d\vec{a} = \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} dz \int_{a}^{b} d\varpi \frac{k}{\varpi^2} = \left(-\dfrac{k}{b} + \dfrac{k}{a}\right) \Delta z$, το άθροισμα των οποίων είναι μηδενικό, οπότε προκύπτει $B(\varpi) = 0$.

$\boxed{7}$: Αφού η μαγνήτιση $\vec{M}$ είναι σταθερή υπάρχει μόνο επιφανειακό ρεύμα $\vec{K} = M\hat{z} \times \hat{\varpi} = M\hat{\phi}$, οπότε ο κύλινδρος είναι ισοδύναμος με σωληνοειδές απείρου μήκους. Λόγω συμμετρίας $\vec{B} = B(\varpi)\hat{z}$ και μέσω ολοκληρωτικού νόμου Ampére προκύπτει $\vec{B} = \mu_0 M \hat{z}$ εντός και 0 εκτός.

Θα μπορούσαμε να δείξουμε πρώτα ότι $\vec{H} = 0$ παντού (είτε χρησιμοποιώντας νόμο Ampére σε ορθογώνιους βρόχους, με $\vec{H} = H(\varpi)\hat{z}$, είτε μέσω της $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$, η οποία ισχύει σε όλο το χώρο, ακόμα και στην επιφάνεια του κυλίνδρου όπου η $\vec{M}$ είναι ασυνεχής).

Το διανυσματικό δυναμικό έχει μορφή $\vec{A} = A(\varpi)\hat{\phi}$ και μπορεί να βρεθεί μέσω της $\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{a}$ σε κυκλικό βρόχο ακτίνας ϖ γύρω από τον άξονα του κυλίνδρου.

Στο εσωτερικό του κυλίνδρου, δηλ. για $\varpi < R$, είναι $A(\varpi) 2\pi\varpi = \mu_0 M \pi \varpi^2 \Leftrightarrow A(\varpi) = \dfrac{\mu_0 M}{2} \varpi$.

Στο εξωτερικό είναι $A(\varpi) 2\pi\varpi = \mu_0 M \pi R^2 \Leftrightarrow A(\varpi) = \dfrac{\mu_0 M R^2}{2\varpi}$.

Ένας δεύτερος τρόπος θα ήταν να επιλύσουμε την $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, η οποία με $\vec{A} = A(\varpi)\hat{\phi}$ και $\vec{B} = B(\varpi)\hat{z}$ γράφεται $B = \dfrac{1}{\varpi} \dfrac{d}{d\varpi}(\varpi A)$. Για $\varpi < R$ δίνει $\dfrac{d}{d\varpi}(\varpi A) = \mu_0 M \varpi \Leftrightarrow A = \dfrac{\mu_0 M}{2} \varpi + \dfrac{C}{\varpi}$. Για να είναι ομαλό το δυναμικό στον άξονα $\varpi = 0$ πρέπει $C = 0$, οπότε $\vec{A} = \dfrac{\mu_0 M}{2} \varpi \hat{\phi}$ για $\varpi < R$.

Για $\varpi > R$ είναι $B = 0$, οπότε $\varpi A =$ σταθερά, με την τιμή της σταθεράς να προκύπτει από την συνέχεια του A, οπότε $\vec{A} = \dfrac{\mu_0 M R^2}{2\varpi} \hat{\phi}$ για $\varpi \geq R$.

Το παραπάνω διανυσματικό δυναμικό δεν είναι η μοναδική λύση στο ερώτημα (κάθε άλλο δυναμικό ου προκύπτει αν αθροίσουμε στο παραπάνω την κλίση μιας οποιασδήποτε βαθμωτής συνάρτησης είναι επίσης λύση). Είναι όμως η μόνη λύση που ικανοποιεί την $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ και μηδενίζεται στο $\varpi=\infty$.

$\boxed{8}$: (α) $\vec{J}=\vec{\nabla}\times\vec{M}=0$, $\vec{K}=\vec{M}\times\hat{n}=M\hat{x}\times\hat{\varpi}=M\sin\phi\hat{z}$ στην επιφάνεια του κυλίνδρου $\varpi=R$.

(β) Από την μορφή του $\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\iint\dfrac{\vec{K}}{\imath}da$ (η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$) προκύπτει ότι το διανυσματικό δυναμικό έχει τη φορά του ρεύματος, δηλ. $\vec{A}=A\hat{z}$.
Αφού ο κύλινδρος είναι απείρου μήκους το A δεν εξαρτάται από το z, είναι λοιπόν $\vec{A}=A(\varpi,\phi)\hat{z}$.
Ο νόμος Ampére για το διανυσματικό δυναμικό $\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$ δίνει $\vec{\nabla}^2A=0$ στις περιοχές $\varpi<R$ και $\varpi>R$ όπου δεν υπάρχουν ρεύματα.
(γ) Το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{B}=\vec{\nabla}\times[A(\varpi,\phi)\hat{z}]=\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial A}{\partial\phi}\hat{\varpi}-\dfrac{\partial A}{\partial\varpi}\hat{\phi}$. Αντικαθιστώντας το διανυσματικό δυναμικό $A(\varpi,\phi)=\begin{cases}C\varpi\sin\phi\,,\varpi<R\\ D\varpi^{-1}\sin\phi\,,\varpi>R\end{cases}$ είναι

$$\vec{B}=\begin{cases}C\left(\cos\phi\hat{\varpi}-\sin\phi\hat{\phi}\right)\,,\varpi<R\\ \dfrac{D}{\varpi^2}\left(\cos\phi\hat{\varpi}+\sin\phi\hat{\phi}\right)\,,\varpi>R\end{cases}$$

Η οριακή συνθήκη $\vec{B}|_{\varpi=R^+}-\vec{B}|_{\varpi=R^-}=\mu_0\vec{K}\times\hat{\varpi}\Leftrightarrow$ $\left(\dfrac{D}{R^2}-C\right)\cos\phi\hat{\varpi}+\left(\dfrac{D}{R^2}+C\right)\sin\phi\hat{\phi}=\mu_0M\sin\phi\hat{\phi}$ δίνει $\dfrac{D}{R^2}-C=0$ και $\dfrac{D}{R^2}+C=\mu_0M$. Η λύση του συστήματος δίνει $C=\dfrac{\mu_0M}{2}$ και $D=\dfrac{\mu_0MR^2}{2}$.
Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε οριακές συνθήκες για το $\vec{A}$. Η συνέχεια του $\vec{A}_\parallel$ είναι ισοδύναμη με την συνέχεια του $\vec{B}_\perp$ και η σχέση της ασυνέχειας της κάθετης παραγώγου $\partial\vec{A}/\partial n$ με το επιφανειακό ρεύμα είναι ισοδύναμη με τη σχέση της ασυνέχειας του $\vec{B}_\parallel$ με το επιφανειακό ρεύμα.

$$\text{(δ) }\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0M}{2}\left(\cos\phi\hat{\varpi}-\sin\phi\hat{\phi}\right)=\dfrac{\mu_0\vec{M}}{2}\,,\varpi<R\\ \dfrac{\mu_0MR^2}{2\varpi^2}\left(\cos\phi\hat{\varpi}+\sin\phi\hat{\phi}\right)\,,\varpi>R\end{cases}$$

$\boxed{9}$: (α) $\vec{J}_b=\vec{\nabla}\times\vec{M}=0$ αφού $\vec{M}=$ σταθερό, $\vec{K}_b=\vec{M}\times\hat{n}=M\hat{z}\times\hat{r}=M\sin\theta\hat{\phi}=-M\dfrac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}\hat{\phi}$ για $r=R$.
(β) Αφού το ρεύμα είναι αζιμουθιακό και με αξισυμμετρική αλγεβρική τιμή και το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\dfrac{\vec{K}_b\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ είναι αζιμουθιακό και με αξισυμμετρική αλγεβρική τιμή, δηλ. $\vec{A}=A(r\,,\theta)\,\hat{\phi}$. (Η απόδειξη έχει γίνει υπολογίζοντας το $\vec{A}$ σε σημεία του ημιεπιπέδου $\phi=0$, οπότε το άθροισμα των συνεισφορών στο ολοκλήρωμα από τα σημεία $\pm\phi'$ προκύπτει στη διεύθυνση $\hat{y}$.) Στους χώρους $\varpi<R$, $\varpi>R$ δεν υπάρχουν ρεύματα, άρα ο νόμος Ampére για το $\vec{A}$ δίνει $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0\Leftrightarrow\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=0$. Το δυναμικό της μορφής $\vec{A}=A(r\,,\theta)\,\hat{\phi}$ ικανοποιεί την συνθήκη Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, οπότε καταλήγουμε στην $\nabla^2\vec{A}=0$.
Η κατάλληλη λύση είναι λοιπόν (κρατώντας μόνο όρους με $\ell=1$ και διώχνοντας τους όρους που απειρίζονται στο $r=0$ ή στο $r=\infty$)

$$\vec{A}=\begin{cases}a_1r\dfrac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}\,\hat{\phi}\,,r\le R\\ \dfrac{b_1}{r^2}\dfrac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}\,\hat{\phi}\,,r\ge R\end{cases}$$

(γ) Συνέχεια του $\vec{A}$: $a_1R=\dfrac{b_1}{R^2}$. Ασυνέχεια της παραγώγου: $\left.\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial r}\right|_{r=R^+}-\left.\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial r}\right|_{r=R^-}=-\mu_0\vec{K}_b\Leftrightarrow$ $-2\dfrac{b_1}{R^3}-a_1=\mu_0M$. Η λύση του συστήματος δίνει $a_1=-\dfrac{\mu_0M}{3}$, $b_1=-\dfrac{\mu_0MR^3}{3}$, επομένως

$$\vec{A}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0M}{3}r\sin\theta\,\hat{\phi}\,,r\le R\\ \dfrac{\mu_0MR^3}{3}\dfrac{\sin\theta}{r^2}\,\hat{\phi}\,,r\ge R\end{cases}$$

Η μορφή του $\vec{K}_b$ «επιλέγει» τους όρους που μένουν στην έκφραση του $\vec{A}$. Αν κρατήσουμε στη λύση και τους όρους $\ell\neq1$ τότε οι οριακές συνθήκες αποδεικνύουν ότι αυτοί μηδενίζονται. Πράγματι θα είχαμε τότε (διώχνοντας τους όρους που απειρίζονται στο $r=0$ ή στο $r=\infty$)

$$\vec{A}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}a_\ell r^\ell\dfrac{dP_\ell(\cos\theta)}{d\theta}\,\hat{\phi}\,,r\le R\\ \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}\dfrac{b_\ell}{r^{\ell+1}}\dfrac{dP_\ell(\cos\theta)}{d\theta}\,\hat{\phi}\,,r\ge R\end{cases}$$

Η συνέχεια του $\vec{A}$ θα έδινε $a_\ell R^\ell=\dfrac{b_\ell}{R^{\ell+1}}$ και η ασυνέχεια της παραγώγου θα έδινε $-\dfrac{\ell+1}{R^{\ell+2}}b_\ell-\ell a_\ell R^{\ell-1}=\mu_0M\delta_{\ell1}$. Η λύση του συστήματος θα έδινε $a_\ell=-\dfrac{\mu_0M}{3}\delta_{\ell1}$, $b_\ell=-\dfrac{\mu_0MR^3}{3}\delta_{\ell1}$.

(δ) $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\left[A(r\,,\theta)\,\hat{\phi}\right]=\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(A\sin\theta)}{\partial\theta}\hat{r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA)}{\partial r}\hat{\theta}=\begin{cases}\dfrac{2\mu_0M}{3}\left(\cos\theta\;\hat{r}-\sin\theta\;\hat{\phi}\right)\,,r\le R\\ \dfrac{\mu_0MR^3}{3r^3}\left(2\cos\theta\;\hat{r}+\sin\theta\;\hat{\phi}\right)\hat{\phi}\,,r\ge R\end{cases}$

$\boxed{10}$: (α) Λόγω συμμετρίας $\vec{H} = H(\varpi)\hat{\phi}$. Από νόμο Ampére $\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{f,\varepsilon\gamma\kappa} = \iint \vec{J}\cdot d\vec{a}$ σε κυκλικό βρόχο ακτίνας $\varpi < R$ (με φορά διαγραφής την $+\hat{\phi}$) προκύπτει $H(\varpi)\,2\pi\varpi = J_f\pi\varpi^2 \Leftrightarrow H(\varpi) = \dfrac{J_f\varpi}{2}$. Όμοια σε κυκλικό βρόχο ακτίνας $\varpi > R$ προκύπτει $H(\varpi)\,2\pi\varpi = J_f\pi R^2 \Leftrightarrow H(\varpi) = \dfrac{J_f R^2}{2\varpi}$.

Άρα $\vec{H} = \begin{cases} \dfrac{J_f\varpi}{2}\hat{\phi}\,, \varpi \le R \\ \dfrac{J_f R^2}{2\varpi}\hat{\phi}\,, \varpi \ge R \end{cases}$

(β) $\vec{M} = \chi\vec{H}$ με $\chi = \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu_0} = 2\dfrac{\varpi}{R}$ εντός του καλωδίου (για $\varpi < R$) και $\chi = 0$ εκτός του καλωδίου. Άρα $\vec{M} = \dfrac{J_f\varpi^2}{R}\hat{\phi}$ για $\varpi < R$.

(γ) Το χωρικό δέσμιο ρεύμα είναι $\vec{J}_b = \vec{\nabla}\times\vec{M} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(\varpi M)}{d\varpi}\hat{z} = 3\dfrac{\varpi}{R}\vec{J}_f$ για $\varpi < R$, και το επιφανειακό είναι $\vec{K}_b = \vec{M}\times\hat{\varpi} = J_f R\hat{\phi}\times\hat{\varpi} = -R\vec{J}_f$ (για $\varpi = R$).

(Το συνολικό δέσμιο ρεύμα είναι $\iint \vec{J}_b da + \oint \vec{K}_b d\ell = \int_{\varpi=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi} 3\dfrac{\varpi}{R}\vec{J}_f\varpi d\varpi d\phi + \oint(-R\vec{J}_f)d\ell = 0$ όπως αναμέναμε.)

Λόγω του ότι το υλικό δεν είναι ομογενές το δέσμιο χωρικό ρεύμα δεν προέκυψε ανάλογο του ελεύθερου. Είναι γενικά $\vec{J}_b = \vec{\nabla}\times\vec{M} = \vec{\nabla}\times(\chi\vec{H}) = \vec{\nabla}\chi\times\vec{H} + \chi\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{\nabla}\chi\times\vec{H} + \chi\vec{J}_f$.

$\boxed{11}$: (α) Χωρικά επιφανειακά ρεύματα δεν υπάρχουν (αφού $\vec{M}$ = σταθερό). Επιφανειακά υπάρχουν $\vec{K}_\pm = M\hat{y}\times(\pm\hat{z}) = \pm M\hat{x}$ στις βάσεις $z = \pm a$, αντίστοιχα.

Λόγω συμμετρίας τα δύο φύλλα ρεύματος δημιουργούν πεδία $\vec{B} = B(z)\hat{y}$, $\vec{H} = H(z)\hat{y}$.

Αυτό προκύπτει και από την $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ με διανυσματικό δυναμικό παράλληλο στο ρεύμα, $\vec{A} = A(z)\hat{x}$.

Το πεδίο $\vec{H}$ έχει παντού μηδενικό στροβιλισμό (δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα) και μηδενική απόκλιση (διότι $\vec{\nabla}\cdot[H(z)\hat{y}] = 0$, ακόμα και σε σημεία που η $H(z)$ είναι ασυνεχής). Αφού μηδενίζεται στο $z = \pm\infty$ είναι παντού μηδέν. Άρα $\vec{H} = 0$ παντού και $\vec{B} = \mu_0\vec{M}$, δηλ. $\vec{B} = \mu_0 M\hat{y}$ μέσα στην πλάκα και $\vec{B} = 0$ έξω.

Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι $\vec{H} = 0$ εφαρμόζοντας την $\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{f,\varepsilon\gamma\kappa} = 0$ σε Αμπεριανούς ορθογώνιους βρόχους και μετά να βρούμε το $\vec{B} = \mu_0\vec{M}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να βρούμε το $\vec{B}$ εφαρμόζοντας την $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\varepsilon\gamma\kappa}$ σε Αμπεριανούς ορθογώνιους βρόχους.

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης βασίζεται στην χρήση βαθμωτού δυναμικού. Αφού δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα μπορούμε να γράψουμε $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_m$ και να χρησιμοποιήσουμε την αναλογία με το ηλεκτρικό πεδίο σε διηλεκτρικά (το $\vec{H}$ αντιστοιχεί στο $\varepsilon_0\vec{E}$ και η μαγνήτιση $\vec{M}$ στην πόλωση). Τα «φορτία» έχουν χωρική πυκνότητα $\rho_m = \vec{\nabla}\cdot\vec{M} = 0$ και επιφανειακή πυκνότητα $\sigma_m = \vec{M}\cdot\hat{n} = M\hat{y}\cdot(\pm\hat{z}) = 0$. Αφού δεν υπάρχουν πουθενά «φορτία» είναι $\vec{H} = 0$.

(β) Το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ που ικανοποιεί τη βαθμίδα Coulomb είναι παράλληλο στα ρεύματα, δηλ. $\vec{A} = A(z)\hat{x}$.

Ένας τρόπος να το βρούμε είναι να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a}$ σε ορθογώνιο βρόχο πάνω στο επίπεδο xz, μεταξύ των $z = 0$, $z = z$, $x = x_1$ και $x = x_2$. Επιλέγουμε φορά διαγραφής τέτοια ώστε το διάνυσμα της επιφάνειας να έχει τη φορά του $\hat{y}$. Έτσι έχουμε για $|z| < a$, $A(z)(x_2 - x_1) - A(z = 0)(x_2 - x_1) = \mu_0 M(z - 0)(x_2 - x_1) \Leftrightarrow A(z) = \mu_0 M z$ (δίνεται ότι $A(z = 0) = 0$). Όμοια για $z > a$, $A(z)(x_2 - x_1) - 0 = \mu_0 M a(x_2 - x_1) \Leftrightarrow A(z) = \mu_0 M a$ και για $z < -a$, $0 - A(z)(x_2 - x_1) = \mu_0 M a(x_2 - x_1) \Leftrightarrow A(z) = -\mu_0 M a$.

Μπορούμε να βρούμε το $\vec{A}$ με πολλούς άλλους τρόπους.

Β′ τρόπος: Μέσω της $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{\nabla}\times[A(z)\hat{x}] = B(z)\hat{y} \Leftrightarrow \dfrac{dA}{dz} = B$. Για $|z| < a$ όπου $B = \mu_0 M$ δίνει $A = \mu_0 M z$ (μηδενίσαμε την σταθερά ολοκλήρωσης ώστε το A να μηδενίζεται στο $z = 0$). Για $z > a$ όπου $B = 0$ το A προκύπτει σταθερό και ίσο με την τιμή του στο $z = a$, δηλ. $A = \mu_0 M a$ και όμοια για $z < -a$ είναι $A = -\mu_0 M a$.

Γ′ τρόπος: Μέσω της Laplace $\vec{\nabla}^2 A = \dfrac{d^2 A}{dz^2} = 0$ η οποία ισχύει στους χώρους $|z| < a$, $z > a$, $z < -a$, απαιτώντας το μαγνητικό πεδίο να μηδενίζεται σε μεγάλες αποστάσεις $z = \pm\infty$ (σε μακρινές αποστάσεις τα ρεύματα από τα δύο φύλλα ρεύματος εξουδετερώνονται και άρα τα πεδία τους έχουν μηδενική συνιστάμενη) και εφαρμόζοντας οριακές συνθήκες (συνέχεια του A και ασυνέχεια της κάθετης παραγώγου).

Δ′ τρόπος: Μέσω επαλληλίας των A από κάθε φύλλο ρεύματος ξεχωριστά. (Θα μπορούσαμε να βρούμε και τα πεδία $\vec{B}$, $\vec{H}$ μέσω αυτής της επαλληλίας.)

$\boxed{12}$: (α) $\vec{J} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \rho\omega r\sin\theta\hat{\phi}$ για $r < R$.

Το πεδίο είναι συνεχές για $r = R$, άρα $\vec{K} = 0$.
Είναι $\vec{J} = \rho\vec{\omega} \times \vec{r}$ για $r < R$, ρεύμα που αντιστοιχεί σε μία φορτισμένη σφαίρα με σταθερή πυκνότητα ρ που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτατα $\vec{\omega}$ γύρω από μία διάμετρό της.
(β) Για $r > R$ είναι προφανές ότι έχουμε πεδίο διπόλου. Εξισώνοντας με $\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$ βρίσκουμε τη διπολική ροπή $m = \frac{4\pi\rho\omega R^5}{15}$. Άρα $\vec{A} = \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi r^2}\hat{\phi} = \frac{\mu_0\rho\omega R^5\sin\theta}{15r^2}\hat{\phi}$ για $r > R$.
Για $r < R$ μπορούμε να ολοκληρώσουμε την $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ θέτοντας $\vec{A} = A(r,\theta)\hat{\phi}$, οπότε προκύπτει $\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A\sin\theta)}{\partial\theta}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA)}{\partial r}\hat{\theta} = B_r\hat{r} + B_\theta\hat{\theta}$.
Η $\hat{r}$ συνιστώσα δίνει $\frac{\partial(A\sin\theta)}{\partial\theta} = \frac{\mu_0\rho\omega}{15}\left(5R^2r - 3r^3\right)\sin\theta\cos\theta \Leftrightarrow A = \frac{\mu_0\rho\omega}{30}\left(5R^2r - 3r^3\right)\sin\theta + \frac{C_r(r)}{\sin\theta}$. Για να μην απειρίζεται το δυναμικό στα σημεία $\sin\theta = 0$ πρέπει $C_r(r) = 0$, δηλ. $A = \frac{\mu_0\rho\omega}{30}\left(5R^2r - 3r^3\right)\sin\theta$.
Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν ολοκληρώσουμε την $\hat{\theta}$ συνιστώσα της $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, η οποία δίνει $-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA)}{\partial r} = \frac{\mu_0\rho\omega}{15}\left(6r^2 - 5R^2\right)\sin\theta \Leftrightarrow A = \frac{\mu_0\rho\omega}{30}\left(5R^2r - 3r^3\right)\sin\theta + \frac{C_\theta(\theta)}{r}$. Για να μην απειρίζεται το δυναμικό στο κέντρο $r = 0$ πρέπει $C_\theta(\theta) = 0$, δηλ. $A = \frac{\mu_0\rho\omega}{30}\left(5R^2r - 3r^3\right)\sin\theta$.
Το διανυσματικό δυναμικό είναι λοιπόν

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0\rho\omega}{30}\left(5R^2 - 3r^2\right)r\sin\theta\,\hat{\phi}, r \le R \\ \frac{\mu_0\rho\omega R^5\sin\theta}{15r^2}\hat{\phi}, r \ge R \end{cases}$$

Θα μπορούσαμε να βρούμε το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = A(r,\theta)\hat{\phi}$ μέσω της κυκλοφορίας του σε κύκλο γύρω από τον άξονα z, δηλ. σε $r =$ σταθερό, $\theta =$ σταθερό, υπολογίζοντας τη μαγνητική ροή σε τμήμα σφαίρας ακτίνας r μεταξύ του άξονα και του κώνου $\theta =$ σταθερό: $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a} \Leftrightarrow 2\pi r\sin\theta A = \int_0^\theta B_r 2\pi r^2\sin\theta' d\theta'$. Αφού ο λόγος $B_r/\cos\theta$ δεν εξαρτάται από το θ, το τελευταίο ολοκλήρωμα γράφεται $= \frac{\pi r^2 B_r}{\cos\theta}\int_0^\theta 2\sin\theta'\cos\theta' d\theta' = \frac{\pi r^2 B_r}{\cos\theta}\sin^2\theta$, οπότε $\vec{A} = \frac{1}{2}B_r r\tan\theta\,\hat{\phi}$.
Γενικά αν $\vec{A} = f(r)\sin\theta\,\hat{\phi}$ τότε το πεδίο έχει μορφή $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = 2\frac{f}{r}\cos\theta\,\hat{r} - \frac{rf' + f}{r}\sin\theta\,\hat{\theta}$ και το ρεύμα είναι $\mu_0\vec{J} = -\frac{r^2f'' + 2rf' - 2f}{r^2}\sin\theta\,\hat{\phi}$.
Ισοδύναμα, αν $\mu_0\vec{J} = g(r)\sin\theta\,\hat{\phi}$ τότε $\vec{A} = f(r)\sin\theta\,\hat{\phi}$ με $r^2f'' + 2rf' - 2f = -r^2g$, ή, θέτοντας $x = \ln r$, $\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{df}{dx} - 2f = -e^{2x}g$. Η λύση είναι $f = C_1r + \frac{C_2}{r^2} + f_{\text{μερ}}$. (Το μέρος C_1r αντιστοιχεί σε ομογενές πεδίο $2C_1\hat{z}$, ενώ το $\frac{C_2}{r^2}$ σε πεδίο διπόλου στην θέση $r = 0$ με ροπή $\frac{4\pi C_2}{\mu_0}\hat{z}$.)
Στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι $g(r) = \mu_0\rho\omega r$ για $0 \le r < R$, οπότε η ομαλή λύση είναι $f = C_1r - \frac{\mu_0\rho\omega}{10}r^3 \Leftrightarrow A = (C_1r - \frac{\mu_0\rho\omega}{10}r^3)\sin\theta$, ενώ $g(r) = 0$ για $r > R$, οπότε η ομαλή λύση είναι $f = \frac{C_2}{r^2} \Leftrightarrow A = \frac{C_2}{r^2}\sin\theta$. Από τη συνέχεια του A και της παραγώγου $\frac{\partial A}{\partial r}$ (δεν υπάρχει επιφανειακό ρεύμα) βρίσκουμε τις σταθερές $C_1 = \frac{\mu_0\rho\omega R^2}{6}$ και $C_2 = \frac{\mu_0\rho\omega R^5}{15}$.
(γ) $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{r} = 0$.
Πρέπει $\vec{J}_b = \rho\omega r\sin\theta\hat{\phi} \Leftrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{M} = \rho\omega r\sin\theta\hat{\phi} \Leftrightarrow -\frac{1}{r}\frac{\partial M}{\partial\theta} = \rho\omega r\sin\theta \Leftrightarrow M = \rho\omega r^2\cos\theta + h(r)$.
Η συνολική διπολική ροπή είναι (το μέρος $h(r)\hat{r}$ δεν συνεισφέρει λόγω συμμετρίας, ενώ το μέρος $\rho\omega r^2\cos\theta\hat{r}$ δίνει ροπή μόνο στην $\hat{z}$ διεύθυνση $\vec{m} = \iiint M\cos\theta r^2\sin\theta dr d\theta d\phi\hat{z} = \frac{4\pi\rho\omega R^5}{15}\hat{z}$, όπως άλλωστε προκύπτει και από $\int \pi(r\sin\theta)^2 dI\hat{z}$ με $dI = Jrdrd\theta$. Αυτή ή ροπή συμφωνεί με το διπολικό πεδίο για $r > R$.
(δ) Ένας φορτισμένος φλοιός μπορεί να θεωρηθεί διαφορά δύο σφαιρών με ακτίνες $R + dR$ και R όπου $dR = \frac{\sigma}{\rho}$. Άρα το πεδίο του είναι $\frac{d\vec{B}}{dR}dR = \frac{d\vec{B}}{dR}\frac{\sigma}{\rho}$.
Αντικαθιστώντας το δοσμένο πεδίο $\vec{B}(R)$, θεωρούμενο συνάρτηση του R, βρίσκουμε για το φλοιό

$$\frac{d\vec{B}}{dR}\frac{\sigma}{\rho} = \begin{cases} \frac{2\mu_0\sigma\omega R}{3}\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right), & r < R \\ \frac{\mu_0\sigma\omega R^4}{3r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right), & r > R \end{cases}$$

Και το αντίστροφο είναι δυνατό: Θεωρώντας τη συμπαγή σφαίρα επαλληλία φλοιών και γνωρίζοντας το πεδίο ενός φλοιού, μπορούμε να βρούμε το πεδίο της σφαίρας.