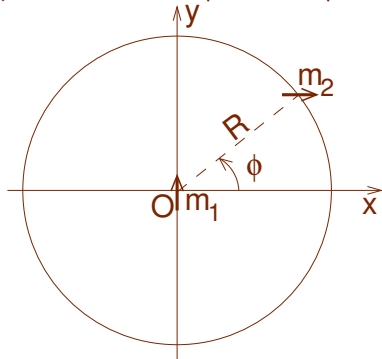


[1]: Θέμα 4^ο από εξέταση της 20/2/2004:

(α) Ποια η γενική μορφή (δηλ. ανεξαρτήτως συστήματος συντεταγμένων) του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ που δημιουργεί μαγνητικό δίπολο ροπής $\vec{m}$ σε σημείο P τέτοιο ώστε το διάνυσμα από το δίπολο ως το P να είναι $\vec{r}$; (Αναφέρετε τον τύπο χωρίς απόδειξη).

(β) Μαγνητικό δίπολο $\vec{m}_1 = m_1 \hat{y}$ είναι στερεωμένο στο κέντρο συστήματος $Oxyz$. Ένα άλλο μαγνητικό δίπολο $\vec{m}_2 = m_2 \hat{x}$ είναι ελεύθερο να κινείται πάνω σε περιφέρεια κύκλου $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} = R$, $z = 0$ (βλέπε σχήμα), χωρίς να αλλάζει η διπολική του ροπή.



(β1) Ποια η ενέργεια αλληλεπίδρασης των δύο διπόλων ($U = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1$) σαν συνάρτηση της γωνίας ϕ ; Σε ποιες θέσεις η ενέργεια γίνεται μέγιστη και σε ποιες ελάχιστη;

(β2) Ποια η δύναμη που ασκείται στο $\vec{m}_2$ σε τυχούσα γωνία ϕ ; Ποια τα σημεία ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας;

[2]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 22/9/2005:

Μικρή σφαίρα μάζας m_g και ακτίνας a είναι ομογενώς μαγνητισμένη με μαγνήτιση $\vec{M}$. Η σφαίρα αφήνεται σε χώρο με βαρυτικό πεδίο $\vec{g} = -g\hat{z}$ και μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = kz^{1/2}\hat{x}$, όπου g και k θετικές σταθερές.

(α) Ποια η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης της σφαίρας με το μαγνητικό πεδίο αν η σφαίρα βρίσκεται στη θέση z και η γωνία μεταξύ $\vec{M}$ και $\hat{x}$ είναι θ ;

(β) Σε ποιο ύψος z_0 και με ποιο προσανατολισμό της $\vec{M}$ θα ισορροπήσει η σφαίρα;

Μπορείτε να θεωρήσετε τη σφαίρα σημειακό δίπολο ($a \ll z$)

[3]: Θέμα 3^ο από εξέταση της 18/9/2009:

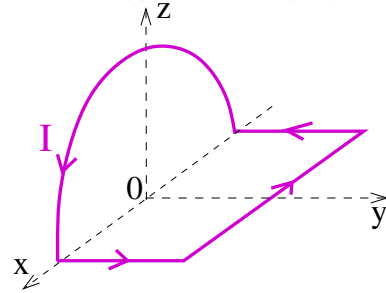
Επίπεδος μεταλλικός δακτύλιος ακτίνων α, β ($\alpha < \beta$) έχει ως άξονα τον άξονα z και κέντρο την αρχή των αξόνων. Ο δακτύλιος διαρρέεται από επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K} = K_0 \hat{\phi}$, $K_0 = \text{σταθερά}$.

(α) Βρείτε τη μαγνητική ροπή του δακτυλίου $\vec{m}$ συναρτήσει της ολικής έντασης ρεύματος I και των ακτίνων α, β .

(β) Ποιο το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(\vec{r})$ σε μεγάλες αποστάσεις από το δακτύλιο ($r \gg \beta$);

[4]: Θέμα 3^ο από εξέταση της 17/9/2010:

Ο ρευματοφόρος βρόχος του σχήματος αποτελείται από ένα ημικύκλιο εμβαδού $\mathcal{E}$, ένα ορθογώνιο εμβαδού επίσης $\mathcal{E}$ και διαρρέεται από ρεύμα I .



(α) Ποια η διπολική ροπή $\vec{m}$ του βρόχου;

Σε σημεία $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ που βρίσκονται πολύ μακριά από το βρόχο ($|\vec{r}| \gg \sqrt{\mathcal{E}}$) να βρεθούν:

(β) το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ και

(γ) το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.

[5]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 19/6/2012:

Ραβδόμορφος μαγνήτης ροπής $\vec{m}$ με κατακόρυφη διεύθυνση κρατείται σταθερός. Στην κατακόρυφη που περνά από το μαγνήτη και σε απόσταση r κάτω από αυτόν, αφήνουμε ρευματοφόρο δακτύλιο ακτίνας R που διαρρέεται από ρεύμα I , όπως στο σχήμα.

Αν το r είναι πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις τόσο του μαγνήτη όσο και του δακτυλίου, βρείτε τη δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης μαγνήτη-δακτυλίου.

Σε ποια απόσταση r ισορροπεί ο δακτύλιος αν το βάρος του είναι $m_g g$;



[6]: Θέμα 4^ο από εξέταση της 2/3/2015:

Δακτύλιος εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2 είναι φορτισμένος με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ . Ο δακτύλιος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Τι μαγνητικό πεδίο δημιουργεί σε μεγάλες αποστάσεις σε σχέση με τις διαστάσεις του;

[7]: Θέμα 4^ο από εξέταση της 22/5/2013:

Δακτύλιος ακτίνας R διαρρέεται από ρεύμα I . Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί πάνω στον άξονά του, σε απόσταση z από το κέντρο του, έχει τη διεύθυνση του άξονα και μέτρο $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$.

Πάνω στον άξονα του δακτυλίου μπορεί να κινείται μαγνητικό δίπολο με ροπή $\vec{m}$ παράλληλη στον άξονα. Ποια η δύναμη που ασκείται στο δίπολο; Σε ποια απόσταση είναι μέγιστη και ποια η μέγιστη τιμή της;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x, y, z)	Κυλινδρικές (ϖ, ϕ, z)	Σφαιρικές (r, θ, ϕ)
		$\begin{cases} x = \varpi \cos \phi \\ y = \varpi \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
$\vec{v}$	$v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$	$v_\varpi \hat{\varpi} + v_\phi \hat{\phi} + v_z \hat{z}$	$v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \varpi} \hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial (\varpi v_\varpi)}{\partial \varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
$\vec{\nabla} \times \vec{v}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{x} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{y} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{z}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi} \end{pmatrix} \hat{\varpi} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi} \end{pmatrix} \hat{\phi} +$ $\frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial (\varpi v_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} \right] \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$
$\vec{\nabla}^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial f}{\partial \varpi} \right) + \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$d\vec{l}$	$dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\varpi \hat{\varpi} + \varpi d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
$d\vec{a}$	$dydz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$	$\varpi d\phi dz \hat{\varpi} + d\varpi dz \hat{\phi} + \varpi d\varpi d\phi \hat{z}$	$r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$
$d\tau$	$dx dy dz$	$\varpi d\varpi d\phi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

ΛΥΣΕΙΣ:

$$\boxed{1}: (\alpha) \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}] \text{ ή}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{m}].$$

$$(\beta_1) U = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1 = -\vec{m}_2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}_1] = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r}) - \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2] \text{ (το ίδιο προκύπτει και από } U = -\vec{m}_1 \cdot \vec{B}_2).$$

Αντικαθιστώντας $\vec{m}_1 \cdot \hat{r} = m_1 \sin \phi$ (αφού η γωνία μεταξύ $\vec{m}_1$ και $\hat{r}$ είναι $\frac{\pi}{2} - \phi$), $\vec{m}_2 \cdot \hat{r} = m_2 \cos \phi$ (αφού η γωνία μεταξύ $\vec{m}_2$ και $\hat{r}$ είναι ϕ), $\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = 0$ (αφού τα $\vec{m}_1$ και $\vec{m}_2$ είναι κάθετα) και $r = R$ βρίσκουμε

$$U = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{4\pi R^3} \sin \phi \cos \phi.$$

Αλλιώς: Αντικαθιστούμε $\hat{r} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$, $\vec{r} = R\hat{r}$, $\vec{m}_1 = m_1 \hat{y}$ και $\vec{m}_2 = m_2 \hat{x}$ στην U .

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $2 \sin \phi \cos \phi = \sin(2\phi)$ γράφουμε τη δυναμική ενέργεια σαν $U = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{8\pi R^3} \sin(2\phi)$ και βλέπουμε αμέσως τότε γίνεται ελάχιστη ή μέγιστη.

Τα ελάχιστα αντιστοιχούν στις γωνίες με $\sin(2\phi) = 1 \Leftrightarrow 2\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ (στο διάστημα $0 \leq \phi < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\phi < 4\pi$), δηλ. τις $\phi = \frac{\pi}{4}$ και $\frac{5\pi}{4}$.

Τα μέγιστα αντιστοιχούν στις γωνίες με $\sin(2\phi) = -1 \Leftrightarrow 2\phi = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ (στο διάστημα $0 \leq \phi < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\phi < 4\pi$), δηλ. τις $\phi = \frac{3\pi}{4}$ και $\frac{7\pi}{4}$.

Αν δεν σκεφτούμε την ταυτότητα μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα από το μηδενισμό της $\frac{dU}{d\phi}$ και το

είδος τους από το πρόσημο της $\frac{d^2 U}{d\phi^2}$.

(β₂) Η δύναμη που ασκείται στο $\vec{m}_2$ στη διεύθυνση της κίνησής του (που είναι η $\hat{\phi}$ των πολικών - ή των κυλινδρικών - συντεταγμένων) είναι (χρησιμοποιώντας τον δοσμένο τύπο της κλίσης)

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{1}{R} \frac{dU}{d\phi} \hat{\phi} = \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{4\pi R^4} \cos(2\phi) \hat{\phi}.$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα όπου δεν υπάρχουν ρεύματα στη γειτονιά του διπόλου $\vec{m}_2$, δηλ. $\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = 0$, ισχύει $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1) = (\vec{m}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1$. Αντικαθιστώντας $\vec{m}_2 = m_2 \hat{x}$ και $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3(\vec{m}_1 \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{m}_1]$ με $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $\vec{m}_1 = m_1 \hat{y}$, δηλ.

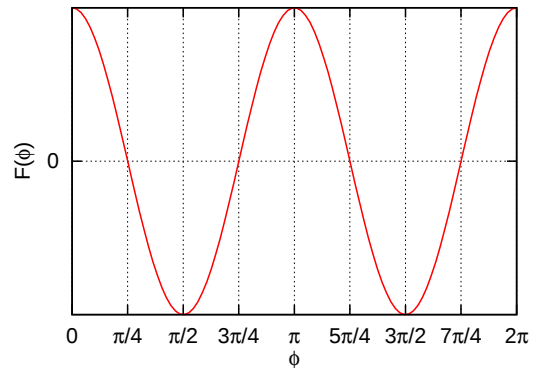
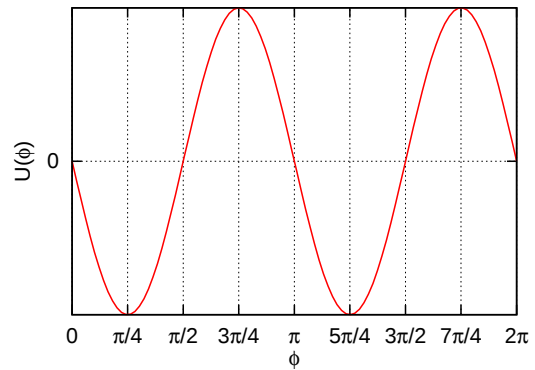
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{3xy\hat{x} + (2y^2 - x^2 - z^2)\hat{y} + 3yz\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

$$\text{βρίσκουμε } \vec{F} = m_2 \left. \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial x} \right|_{x=R \cos \phi, y=R \sin \phi, z=0} =$$

$$\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi R^4} [\sin \phi (3 - 15 \cos^2 \phi) \hat{x} + \cos \phi (-2 + 5 \cos^2 \phi - 10 \sin^2 \phi) \hat{y}].$$

Η προβολή της τελευταίας πάνω στο $\hat{\phi} = \sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$ δίνει $\vec{F} \cdot \hat{\phi} = \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{4\pi R^4} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)$.

Τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν σε ελάχιστα της δυναμικής ενέργειας, δηλ. είναι τα $\phi = \frac{\pi}{4}$ και $\frac{5\pi}{4}$. Τα σημεία ασταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν σε μέγιστα της δυναμικής ενέργειας, δηλ. είναι τα $\phi = \frac{3\pi}{4}$ και $\frac{7\pi}{4}$.



Μπορούμε να βρούμε τα σημεία ισορροπίας σαν τα σημεία μηδενισμού της δύναμης και να μελετήσουμε την ευστάθειά τους διερευνώντας αν η δύναμη είναι δύναμη επαναφοράς γύρω από αυτά. Βλέπουμε για παράδειγμα από το διάγραμμα της $F(\phi)$ ότι $F(\pi/4) = 0$ οπότε το σημείο $\phi = \pi/4$ είναι σημείο ισορροπίας. Για γωνίες ϕ λίγο μεγαλύτερες από $\pi/4$ η δύναμη είναι αρνητική (αντίρροπη του $\hat{\phi}$), δηλ. προσπαθεί να επαναφέρει το δίπολο στη θέση ισορροπίας (το ίδιο συμβαίνει σε γωνίες ϕ λίγο μικρότερες από $\pi/4$ όπου η δύναμη είναι θετική - ομόρροπη του $\hat{\phi}$ - και άρα προσπαθεί να επαναφέρει το δίπολο στη θέση ισορροπίας). Έτσι συμπεραίνουμε ότι το σημείο $\phi = \pi/4$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας. Όμοια μελετούμε τα υπόλοιπα σημεία μηδενισμού της δύναμης $\phi = 3\pi/4$ (προκύπτει ασταθές σημείο ισορροπίας), $\phi = 5\pi/4$ (προκύπτει ευσταθές σημείο ισορροπίας) και $\phi = 7\pi/4$ (προκύπτει ασταθές σημείο ισορροπίας).

[2]: (α) $U_B = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -\iiint \vec{B} \cdot \vec{M} d\tau = -\iiint kz^{1/2} \hat{x} \cdot \vec{M} d\tau$. Αφού $a \ll z$ το πεδίο είναι ομογενές στον όγκο της σφαίρας και άρα (αντικαθιστώντας επίσης $\hat{x} \cdot \vec{M} = M \cos \theta$ και $\iiint d\tau = \frac{4\pi a^3}{3}$) η ενέργεια αλληλεπίδρασης διπόλου-μαγνητικού πεδίου είναι $U_B = -\frac{4\pi a^3}{3} M k z^{1/2} \cos \theta$.

Το ίδιο βέβαια προκύπτει αν η σφαίρα θεωρηθεί σημειακό δίπολο με ροπή $\vec{m} = \iiint \vec{M} d\tau = \vec{M} \frac{4\pi a^3}{3}$.

(β) Η ροπή $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$ θα περιστρέφει τη σφαίρα ώστε η $\vec{M}$ να γίνει ομόροπη του μαγνητικού πεδίου, δηλ. να γίνει $\theta = \theta_0 = 0$. Η δύναμη από το μαγνητικό πεδίο θα είναι $\vec{F}_B = -\nabla U_B = -\frac{\partial U_B}{\partial z} \hat{z} = \frac{2\pi a^3 M k}{3z^{1/2}} \cos \theta \hat{z}$, η οποία για $\theta = 0$ γίνεται $\vec{F}_B = \frac{2\pi a^3 M k}{3z^{1/2}} \hat{z}$ και εξουδετερώνει το βάρος $\vec{F}_g = -m_g g \hat{z}$ στο ύψος z_0 για το οποίο $\frac{2\pi a^3 M k}{3z_0^{1/2}} = m_g g \Leftrightarrow z_0 = \left(\frac{2\pi a^3 M k}{3m_g g} \right)^2$.

Αλλιώς: Προσθέτοντας στην U_B την βαρυτική δυναμική ενέργεια $m_g g z$ βρίσκουμε $U = m_g g z - \frac{4\pi a^3}{3} M k z^{1/2} \cos \theta$. Αυτή η (ολική) δυναμική ενέργεια πρέπει να ελαχιστοποιηθεί για να βρεθεί η συνθήκη ευσταθούς ισορροπίας. Οι συνθήκες $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$ και $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$ δίνουν $\theta = \theta_0 = 0$ και $z = z_0 = \left(\frac{2\pi a^3 M k}{3m_g g} \right)^2$. Το σημείο αυτό αντι-

στοιχεί σε ελάχιστο της U , διότι ο επόμενος όρος του αναπτύγματος Taylor είναι θετικός, $U(z, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^{n+m} U}{\partial z^n \partial \theta^m} \Big|_{z=z_0, \theta=\theta_0} \frac{(z-z_0)^n (\theta-\theta_0)^m}{n! m!} \approx U|_{z=z_0, \theta=0} + \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=z_0, \theta=0} (z-z_0) + \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{z=z_0, \theta=0} \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \Big|_{z=z_0, \theta=0} (z-z_0)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \theta} \Big|_{z=z_0, \theta=0} (z-z_0) \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \Big|_{z=z_0, \theta=0} \theta^2 = m_g g z_0 \left[-1 + \left(\frac{z-z_0}{2z_0} \right)^2 + \theta^2 \right]$.

[3]: (α) Κάθε δακτύλιος ακτίνας r και πάχους dr διαρρέεται από ρεύμα $dI = K d\ell_{\perp} = K_0 dr$, οπότε η μαγνητική διπολική ροπή του είναι $d\vec{m} = \pi r^2 dI = K_0 \pi r^2 dr \hat{z}$. Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε την ολική διπολική ροπή $\vec{m} = \int_{\alpha}^{\beta} K_0 \pi r^2 dr \hat{z} = K_0 \pi \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} \hat{z}$. Το ολικό ρεύμα είναι $I = \int dI =$

$\int_{\alpha}^{\beta} K_0 dr = K_0 (\beta - \alpha) \Leftrightarrow K_0 = \frac{I}{\beta - \alpha}$, οπότε η ζητούμενη έκφραση της μαγνητικής ροπής είναι $\vec{m} = I \frac{\pi}{3} \frac{\beta^3 - \alpha^3}{\beta - \alpha} \hat{z} = I \frac{\pi}{3} (\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) \hat{z}$.

(β) Σε μεγάλες αποστάσεις μένει ο διπολικός όρος $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{12} (\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{12} (\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$.

[4]: (α) Η μαγνητική διπολική ροπή του ημικυκλίου είναι $\vec{m}_1 = I \mathcal{E} \hat{y}$ και του ορθογωνίου $\vec{m}_2 = I \mathcal{E} \hat{z}$, οπότε η ολική ροπή του βρόχου είναι $\vec{m} = I \mathcal{E} \hat{y} + I \mathcal{E} \hat{z}$.

(β) Σε μεγάλες αποστάσεις μένει ο διπολικός όρος $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}$ και αντικαθιστώντας $\vec{m} = I \mathcal{E} (\hat{y} + \hat{z})$, $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)$ και

$\vec{m} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & I\mathcal{E} & I\mathcal{E} \\ x & y & z \end{vmatrix} = I\mathcal{E} [(z-y)\hat{x} + x\hat{y} - x\hat{z}]$, βρίσκουμε $\vec{A} = \frac{\mu_0 I \mathcal{E}}{4\pi} \frac{(z-y)\hat{x} + x\hat{y} - x\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$.

(γ) Το μαγνητικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις είναι το διπολικό πεδίο $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{m}]$. Μετά τις αντικαταστάσεις προκύπτει

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \mathcal{E}}{4\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} [3x(y+z)\hat{x} + (2y^2 + 3yz - x^2 - z^2)\hat{y} + (3yz - x^2 - y^2 + 2z^2)\hat{z}]$. Το ίδιο προκύπτει από $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ χρησιμοποιώντας την έκφραση του $\vec{A}$ που βρέθηκε στο ερώτημα (β).

[5]: Αφού το r είναι πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις τόσο του μαγνήτη όσο και του δακτυλίου μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τόσο το μαγνήτη όσο και το δακτύλιο σαν ιδανικά μαγνητικά δίπολα.

Αν θεωρήσουμε άξονα z με αρχή στον μαγνήτη και φορά προς τα πάνω, είναι $\vec{m} = m\hat{z}$. Ο δακτύλιος βρίσκεται σε θέση $z = -r$ και η διπολική του ροπή είναι $\vec{m}_{\delta} = I \pi R^2 \hat{z}$.

Αφού οι διπολικές ροπές είναι ομόροπες η δύναμη μεταξύ μαγνήτη και δακτυλίου είναι ελκτική («βόρειος» με «νότιο» πόλο είναι κοντά).

Η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης του δακτυλίου με το μαγνήτη είναι $U = -\vec{m}_{\delta} \cdot \vec{B}_m = -\frac{\mu_0 m I R^2}{2r^3}$, διότι το πεδίο που δημιουργεί ο μαγνήτης στη θέση του δακτυλίου είναι $\vec{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}] = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi r^3}$ ($\hat{r} = -\hat{z}$ είναι το μοναδιαίο από τον μαγνήτη προς το δακτύλιο).

Η δυναμική ενέργεια σε σημείο $z < 0$ στη γειτονιά

της θέσης του δακτυλίου είναι $U = \frac{\mu_0 m I R^2}{2z^3}$. Η ελκτική δύναμη που ασκεί ο μαγνήτης στο δακτύλιο είναι $[-\vec{\nabla} U]_{z=-r} = \left[-\frac{dU}{dz}\hat{z}\right]_{z=-r} = \frac{3\mu_0 m I R^2}{2r^4}\hat{z}$. Ο δακτύλιος ισορροπεί όταν αυτή η δύναμη εξουδετερώνει το βάρος, δηλ. σε απόσταση $\frac{3\mu_0 m I R^2}{2r^4} = m_g g \Leftrightarrow r = \left(\frac{3\mu_0 m I R^2}{2m_g g}\right)^{1/4}$.

Μπορούμε να βρούμε την ολική δυναμική ενέργεια του δακτυλίου σαν άθροισμα της U με την βαρυτική $m_g g z$, δηλ. $U_{ολ} = -\frac{\mu_0 m I R^2}{2|z|^3} + m_g g z$ και να βρούμε τη θέση ισορροπίας εκεί όπου η $U_{ολ}$ γίνεται ακρότατη.

Είναι $\frac{dU_{ολ}}{dz} = \frac{z}{|z|} \frac{3\mu_0 m I R^2}{2z^4} + m_g g$ και άρα το σημείο

ισορροπίας είναι το $z = -\left(\frac{3\mu_0 m I R^2}{2m_g g}\right)^{1/4}$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική στη θέση ισορροπίας, οπότε η ισορροπία είναι ασταθής.

[6]: $\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r} = \sigma \omega \hat{\phi}$, άρα κάθε δακτύλιος ακτίνας ϖ και πάχους $d\varpi$ διαρρέεται από ρεύμα $dI = K d\varpi$ και έχει διπολική ροπή $d\vec{m} = \hat{z} \pi \varpi^2 dI$. Η συνολική διπολική ροπή είναι $\vec{m} = \hat{z} \int \pi \varpi^2 dI = \hat{z} \int_{R_1}^{R_2} \pi \varpi^2 K d\varpi =$

$$\hat{z} \pi \sigma \omega \int_{R_1}^{R_2} \varpi^3 d\varpi = \hat{z} \pi \sigma \omega \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}.$$

Σε μεγάλες αποστάσεις έχουμε πεδίο διπόλου

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 \pi \sigma \omega (R_2^4 - R_1^4)}{16\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}).$$

[7]: Η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης διπόλου-δακτυλίου είναι $U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -\frac{\mu_0 I R^2 m}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$, όπου z η θέση του διπόλου. Η δύναμη που ασκεί ο δακτύλιος στο δίπολο είναι $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{dU}{dz}\hat{z} = -\frac{3}{2}\mu_0 I R^2 m \frac{z}{(z^2 + R^2)^{5/2}}\hat{z}$.

Η δύναμη είναι περιττή λόγω συμμετρίας (ελκτική αν $m > 0$ και απωστική αν $m < 0$), οπότε αρκεί να μελετήσουμε την περιοχή $z \geq 0$. Το μέτρο της δύναμης

για θετικά z είναι $f(z) = \frac{3}{2}\mu_0 I R^2 |m| \frac{z}{(z^2 + R^2)^{5/2}}$.

Αφού μηδενίζεται σε $z = 0$ και $z = \infty$ κάπου γίνεται μέγιστη. Είναι $\frac{df}{dz} = \frac{3}{2}\mu_0 I R^2 |m| \frac{R^2 - 4z^2}{(z^2 + R^2)^{7/2}}$,

θετική για $z < R/2$ και αρνητική για $z > R/2$. Επομένως η $f(z)$ αυξάνεται από μηδέν στο κέντρο του

δακτυλίου $z = 0$ σε $f(R/2) = \frac{24\mu_0 I |m|}{25\sqrt{5}R^2}$ στην από-

σταση $|z| = R/2$ και στην συνέχεια φθίνει μέχρι το μηδέν σε άπειρη απόσταση.