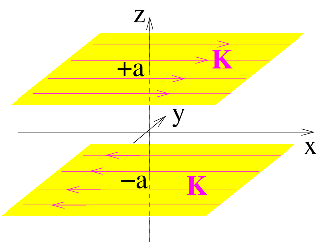
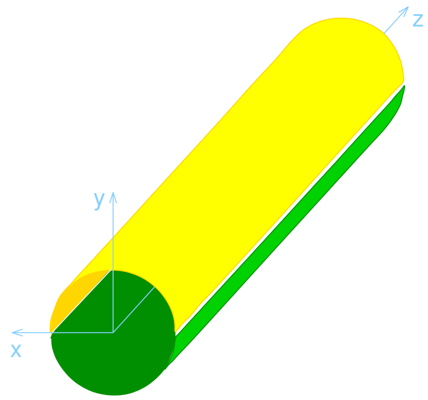
$\boxed{1}$: Θέμα 3ο από εξέταση της 4/9/2007:
(α) Βρείτε διανυσματικό δυναμικό για αγωγό απείρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I.
Υπόδειξη: Α′ τρόπος: Αφού βρείτε το ηλεκτροστατικό δυναμικό από γραμμική κατανομή φορτίου, χρησιμοποιήστε την αναλογία μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού με ηλεκτροστατικό δυναμικό. Β′ τρόπος: Λύστε την διαφορική εξίσωση $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. Γ′ τρόπος: Χρησιμοποιήστε την ισοδύναμη ολοκληρωτική σχέση $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{a}$.
(β) Δύο παράλληλοι ρευματοφόροι αγωγοί απείρου μήκους διαρρέονται από ρεύματα ίσης έντασης I και αντίθετης φοράς. Σε σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ οι αγωγοί είναι παράλληλοι στον άξονα $\hat{z}$ και περνούν από τα σημεία $(-\alpha, 0, 0)$ και $(\alpha, 0, 0)$ αντίστοιχα. Αν $\vec{A} \to \vec{0}$ για $|x|/\alpha \to \infty\,, |y|/\alpha \to \infty$, ποιο το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ σε σημείο (x, y, z); Ποια η προσεγγιστική έκφραση για το δυναμικό σε σημεία $|x|$ ή $|y| \gg \alpha$;

$\boxed{2}$: Θέμα 3ο από εξέταση της 7/5/2008:
Τα επίπεδα $z = +$a, $z = -$a (σε σύστημα $Oxyz$) διαρρέονται από επιφανειακά ρεύματα $K_0\hat{x}$, $-K_0\hat{x}$, αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Να βρεθεί διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ σε όλο το χώρο.



$\boxed{3}$: Θέμα 3ο από εξέταση της 25/5/2010:
(α) Από το νόμο Ampère βρείτε τη διανυσματική σχέση που συνδέει το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ με την πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$, δεχόμενοι τη συνθήκη Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.
Δείξτε ότι αν $\vec{J} = J_z(\vec{r})\ \hat{z}$, οπότε και $\vec{A} = A_z(\vec{r})\ \hat{z}$, προκύπτει σχέση μαθηματικά ισοδύναμη με το νόμο Poisson της ηλεκτροστατικής.
(β) Έστω τα ακόλουθα δυο προβλήματα:
Πρόβλημα I: Κυλινδρικό κέλυφος απείρου μήκους και ακτίνας R είναι φορτισμένο, το μισό με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ_0 και το υπόλοιπο με $-\sigma_0$ (βλέπε σχήμα). Συγκεκριμένα, σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\sigma(\phi) = \sigma_0$ αν $0 < \phi < \pi$ και $\sigma(\phi) = -\sigma_0$ αν $\pi < \phi < 2\pi$. Ζητούμενο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό.
Πρόβλημα II: Κυλινδρικό κέλυφος απείρου μήκους και ακτίνας R διαρρέεται από ρεύμα παράλληλο στον άξονά του, το μισό με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K}_0$ και το υπόλοιπο με $-\vec{K}_0$. Συγκεκριμένα, σε κυλινδρικές συντεταγμένες (βλέπε σχήμα) $\vec{K}(\phi) = K_0\hat{z}$ αν $0 < \phi < \pi$ και $\vec{K}(\phi) = -K_0\hat{z}$ αν $\pi < \phi < 2\pi$. Ζητούμενο είναι το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό.



Αν γνωρίζετε ότι η λύση του προβλήματος I είναι

$$V = \begin{cases} \dfrac{2R\sigma_0}{\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{n=1,3,5,\ldots} \dfrac{\sin(n\phi)}{n^2} \left(\dfrac{R}{\varpi}\right)^n, & \varpi \geq R \\ \dfrac{2R\sigma_0}{\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{n=1,3,5,\ldots} \dfrac{\sin(n\phi)}{n^2} \left(\dfrac{\varpi}{R}\right)^n, & \varpi \leq R \end{cases}$$

ποια η λύση του προβλήματος II;
Επίσης λύστε το πρόβλημα II άμεσα, χρησιμοποιώντας την γενική λύση της εξίσωσης Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες και τις οριακές συνθήκες στην επιφάνεια του κελύφους.

$\boxed{4}$: Θέμα 3ο από εξέταση της 9/9/2013:
Κυλινδρικός φλοιός απείρου μήκους και ακτίνας R διαρρέεται από επιφανειακό ρεύμα $\vec{K} = K(\phi)\hat{z}$, παράλληλο στον άξονά του. Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο φλοιός είναι $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial A(\varpi,\phi)}{\partial \phi}\hat{\varpi} - \dfrac{\partial A(\varpi,\phi)}{\partial \varpi}\hat{\phi}$, όπου $\vec{A} = A(\varpi,\phi)\hat{z}$ είναι το διανυσματικό δυναμικό, το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.
(α) Θεωρώντας γνωστές τις σχέσεις $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \Phi_{\varepsilon\gamma\kappa}$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} \Leftrightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\varepsilon\gamma\kappa}$ και επιλέγοντας κατάλληλους βρόχους, δείξτε ότι οι οριακές συνθήκες για το διανυσματικό δυναμικό είναι

$$A|_{\varpi=R^+} = A|_{\varpi=R^-} \text{ και } \left.\frac{\partial A}{\partial \varpi}\right|_{\varpi=R^+} - \left.\frac{\partial A}{\partial \varpi}\right|_{\varpi=R^-} = -\mu_0 K.$$

(β) Αν $K(\phi) = K_0 \sin(3\phi)$ να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο μέσα και έξω από το φλοιό.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι η συνάρτηση A είναι αρμονική μέσα και έξω από το φλοιό.

$\boxed{5}$: Θέμα 3ο από εξέταση της 8/2/2008:
Ηλεκτρικό ρεύμα διαρρέει άπειρο κυλινδρικό αγωγό ακτίνας R. Η χωρική πυκνότητα ρεύματος είναι $\vec{J} = \dfrac{a}{\varpi}\hat{z}$ (σε κυλινδρικές συντεταγμένες με z τον άξονα του αγωγού και $\varpi = \sqrt{x^2 + y^2}$).
Μια επιλογή για το διανυσματικό δυναμικό είναι:

$\vec{A} = \begin{cases} A_1(\varpi)\ \hat{z}\,,\varpi \le R \\ A_2(\varpi)\ \hat{z}\,,\varpi \ge R \end{cases}$, όπου $\vec{\nabla}^2 A_1 = -\mu_0 \frac{a}{\varpi}$ και $\vec{\nabla}^2 A_2 = 0$.

(α) Δείξτε ότι $A_1(\varpi) = -\mu_0 a \varpi$ και $A_2(\varpi) = C_1 \ln \varpi + C_2$.

(β) Από τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του αγωγού ($\varpi = R$) να βρεθεί η συνάρτηση $A_2(\varpi)$.

(γ) Ποιο το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε όλο το χώρο;

Βρείτε επίσης το διανυσματικό δυναμικό με τους ακόλουθους δύο τρόπους, αφού πρώτα βρείτε το μαγνητικό πεδίο χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικό νόμο Ampère:

(A) Λύστε την διαφορική $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$.

(B) Χρησιμοποιήστε την $\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{a}$.

$\boxed{6}$: Θέμα 3ο από εξέταση της 18/2/2010:

(α) Πως συνδέονται η κυκλοφορία του διανυσματικού δυναμικού $\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$ με τη μαγνητική ροή;

(β) Να βρεθεί διανυσματικό δυναμικό για το μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = 2e^{-x^2-y^2}\hat{z}$ (σε κατάλληλες μονάδες).

Υπόδειξη: Σε κυλινδρικές $\vec{B} = 2e^{-\varpi^2}\hat{z}$, $\vec{A} = A(\varpi)\hat{\phi}$.

$\boxed{7}$: Θέμα 4ο από εξέταση της 10/5/2006:

Στο χώρο υπάρχει μαγνητικό πεδίο με μορφή (σε κυλινδρικές συντεταγμένες)

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 a \left(\frac{\varpi}{R} - \frac{\varpi^2}{R^2} \right) \hat{\phi}\,, \text{ για } \varpi < R\,,\ 0 < z < h\,, \\ 0\,, \text{ αλλού,} \end{cases}$$

όπου $a\,, R\,, h$ θετικές σταθερές.

Ποια ρεύματα δημιουργούν αυτό το πεδίο; Σχεδιάστε τα ρεύματα στο επίπεδο ϖz.

$\boxed{8}$: Θέμα 3ο από εξέταση της 4/5/2011:

Σφαίρα ακτίνας R φέρει μόνιμη, ομοιόμορφη ηλεκτρική πόλωση $\vec{P} = P_0\hat{z}$ και περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z (που περνά από το κέντρο της) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega_0\hat{z}$.

(α) Δείξτε ότι το επιφανειακό ηλεκτρικό ρεύμα λόγω των φορτίων πόλωσης είναι $\vec{K} = P_0\omega_0 R \sin\theta\cos\theta\ \hat{\phi}$.

(β) Αν το διανυσματικό δυναμικό έχει μορφή $\vec{A} = A_\phi\hat{\phi}$ με $A_\phi = \begin{cases} a_2 r^2 \sin\theta\cos\theta\,, r < R \\ \frac{b_2}{r^3}\sin\theta\cos\theta\,, r > R \end{cases}$ εφαρμόστε συνοριακές συνθήκες για να βρείτε τους συντελεστές a_2 και b_2.

$\boxed{9}$: Θέμα 3ο από εξέταση της 1/10/2012:

Έστω μαγνητικό πεδίο με διανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = \lambda r^a \sin\theta\ \hat{\phi}$, σε σφαιρικές συντεταγμένες (λ και a είναι σταθερές).

(α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και το ρεύμα στο χώρο $0 < r < \infty$. Για ποιες τιμές του a το ρεύμα αυτό είναι μηδέν;

(β) Τι είδους πεδίο αντιστοιχεί στην περίπτωση $a = 1$ και τι στην $a = -2$;

(γ) Πως συνδέεται η κυκλοφορία του $\vec{A}$ με τη μαγνητική ροή; Ποια η μαγνητική ροή που περνά από το ημισφαίριο $r = 1$, $z > 0$;

$\boxed{10}$: Θέμα 4ο από εξέταση της 1/10/2012:

Το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας R είναι διπολικό, $\vec{B} = \frac{B_0 R^3}{2r^3}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right)$.

Αν γνωρίζουμε ότι το πεδίο μέσα στη σφαίρα είναι ομογενές, να βρεθεί αυτό το ομογενές πεδίο καθώς και τα ρεύματα σε όλο το χώρο.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $r = R$.

$\boxed{11}$: Θέμα 3ο από εξέταση της 10/6/2014:

Έστω διανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = \frac{\mu_0 K_0}{2} e^{-|z|} \sin x\ \hat{y}$.

(α) Σε τι μαγνητικό πεδίο αντιστοιχεί; Είναι παντού συνεχές;

(β) Ποια είναι τα ρεύματα (χωρικά και επιφανειακά) που δημιουργούν αυτό το πεδίο;

(γ) Πόση μαγνητική ροή περνά από μια φέτα του επιπέδου $x =$ σταθερό η οποία εκτείνεται από $z = 0$ ως $z = \infty$ στη διεύθυνση z ενώ στη διεύθυνση y έχει πάχος Δy;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x,y,z)	Κυλινδρικές (ϖ,ϕ,z) $\left\{\begin{array}{c} x=\varpi\cos\phi \\ y=\varpi\sin\phi \\ z=z \end{array}\right\}$	Σφαιρικές (r,θ,ϕ) $\left\{\begin{array}{c} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{array}\right\}$
$\vec{v}$	$v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+v_z\hat{z}$	$v_\varpi\hat{\varpi}+v_\phi\hat{\phi}+v_z\hat{z}$	$v_r\hat{r}+v_\theta\hat{\theta}+v_\phi\hat{\phi}$
$\vec{\nabla}f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \varpi}\hat{\varpi}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\left(\varpi v_\varpi\right)}{\partial \varpi}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 v_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(v_\theta\sin\theta\right)}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
$\vec{\nabla}\times\vec{v}$	$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x}+$ $\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y}+$ $\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z}$	$\left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}-\frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\varpi}+$ $\left(\frac{\partial v_\varpi}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial \varpi}\right)\hat{\phi}+$ $\frac{1}{\varpi}\left[\frac{\partial\left(\varpi v_\phi\right)}{\partial \varpi}-\frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi}\right]\hat{z}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(v_\phi\sin\theta\right)}{\partial \theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{r}+$ $\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{\partial\left(r v_\phi\right)}{\partial r}\right]\hat{\theta}+$ $\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(r v_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}$
$\vec{\nabla}^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial \varpi}\left(\varpi\frac{\partial f}{\partial \varpi}\right)+\frac{1}{\varpi^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$d\vec{l}$	$dx\hat{x}+dy\hat{y}+dz\hat{z}$	$d\varpi\hat{\varpi}+\varpi d\phi\hat{\phi}+dz\hat{z}$	$dr\hat{r}+rd\theta\hat{\theta}+r\sin\theta d\phi\hat{\phi}$
$d\vec{a}$	$dydz\hat{x}+dxdz\hat{y}+dxdy\hat{z}$	$\varpi d\phi dz\hat{\varpi}+d\varpi dz\hat{\phi}+\varpi d\varpi d\phi\hat{z}$	$r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{r}+r\sin\theta drd\phi\hat{\theta}+rdrd\theta\hat{\phi}$
$d\tau$	$dxdydz$	$\varpi d\varpi d\phi dz$	$r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

ΛΥΣΕΙΣ:

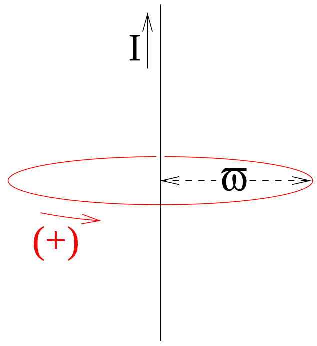
$\boxed{1}$: (α) Α′ τρόπος: Μία γραμμική κατανομή φορτίου με πυκνότητα λ δημιουργεί ακτινικό πεδίο $\vec{E} = E(\varpi)\hat{\varpi}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες με άξονα z πάνω στην κατανομή. Από νόμο Gauss σε κυλινδρική επιφάνεια $\varpi =$ σταθερό, ύψους ℓ, βρίσκουμε $E2\pi\varpi\ell = \dfrac{\lambda\ell}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varpi}\hat{\varpi}$. Το δυναμικό σε ακτίνα ϖ είναι $V(\varpi) - V(\varpi_0) = \displaystyle\int_{\varpi}^{\varpi_0} \vec{E}\cdot d\vec{r} \Leftrightarrow V = \int_{\varpi}^{\varpi_0} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varpi}d\varpi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\varpi}{\varpi_0}$, θεωρώντας ότι το δυναμικό μηδενίζεται στην ακτίνα ϖ_0. Αυτή είναι η λύση της εξίσωσης $\vec{\nabla}^2 V = -\dfrac{\lambda\delta(x)\delta(y)}{\varepsilon_0}$ διότι η πυκνότητα φορτίου ρ είναι μηδέν εκτός του άξονα z, σε σημεία $x = y = 0$ του άξονα z απειρίζεται με τρόπο ώστε το φορτίο ανά μήκος να είναι λ, δηλ. $\lambda = \dfrac{dq}{dz} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho dx dy$, οπότε $\rho = \lambda\delta(x)\delta(y)$.

Το δυναμικό μπορεί να βρεθεί και άμεσα από την εξίσωση Laplace που ισχύει για $\varpi > 0$. Η λύση εξαρτάται μόνο από την συντεταγμένη ϖ, οπότε $\vec{\nabla}^2 V(\varpi) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d}{d\varpi}\left(\varpi\dfrac{dV}{d\varpi}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dV}{d\varpi} = \dfrac{b_0}{\varpi} \Leftrightarrow V = a_0 + b_0\ln\varpi$, όπου a_0 και b_0 σταθερές. Το πεδίο είναι $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\dfrac{b_0}{\varpi}\hat{\varpi}$ και η σταθερά b_0 προσδιορίζεται από το νόμο Gauss σε κυλινδρική επιφάνεια $\varpi =$ σταθερό, ύψους ℓ: $E2\pi\varpi\ell = \dfrac{\lambda\ell}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow b_0 = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}$. Έτσι βρίσκουμε $V = a_0 - \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\varpi$. Η σταθερά a_0 είναι αυθαίρετη και καθορίζει τα σημεία όπου $V = 0$. Αυτά βρίσκονται σε απόσταση ϖ_0 από τον άξονα z, με $a_0 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\varpi_0$. Άρα το δυναμικό μπορεί να γραφεί και σαν $V = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\varpi}{\varpi_0}$.

Το διανυσματικό δυναμικό του ρεύματος, το οποίο έχει πυκνότητα $\vec{J} = I\delta(x)\delta(y)\hat{z}$, έχει διεύθυνση παράλληλη στο ρεύμα $\vec{A} = A(\varpi)\hat{z}$ και ικανοποιεί την $\vec{\nabla}^2 A = -\mu_0 I\delta(x)\delta(y)$, δηλ. εξίσωση όμοια με την εξίσωση Poisson $\vec{\nabla}^2 V = -\dfrac{\lambda\delta(x)\delta(y)}{\varepsilon_0}$ με $V \to A$ και $\dfrac{\lambda}{\varepsilon_0} \to \mu_0 I$. Κάνοντας τις ίδιες αντικαταστάσεις στη λύση $V = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\varpi}{\varpi_0}$ προκύπτει $\vec{A} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{\varpi}{\varpi_0}\hat{z}$.

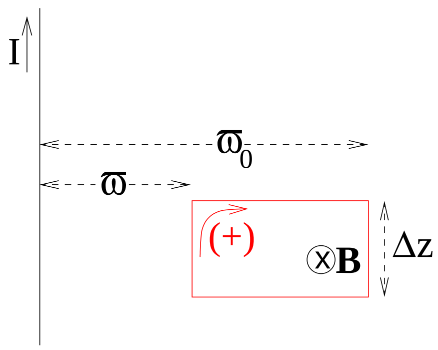
Μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι η λύση ικανοποιεί τη συνθήκη Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, η οποία πρέπει να ισχύει από τη στιγμή που γράψαμε το νόμο Ampère σαν $\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$.

Β′ τρόπος: Λόγω συμμετρίας το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{B} = B(\varpi)\hat{\phi}$. Από νόμο Ampère σε κυκλικό βρόχο γύρω από τον άξονα z, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\varepsilon\gamma\kappa}$ με $d\vec{\ell} = d\ell\hat{\phi}$ και $I_{\varepsilon\gamma\kappa} = I$, οπότε $B2\pi\varpi = \mu_0 I \Leftrightarrow \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\varpi}\hat{\phi}$.



Το διανυσματικό δυναμικό είναι παράλληλο στο ρεύμα και εξαρτάται μόνο από την απόσταση ϖ, δηλ. $\vec{A} = A(\varpi)\hat{z}$. Έτσι $\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\dfrac{dA}{d\varpi}\hat{\phi}$ και η εξίσωση $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$ δίνει $-\dfrac{dA}{d\varpi}\hat{\phi} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\varpi}\hat{\phi} \Leftrightarrow \displaystyle\int dA = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int\frac{d\varpi}{\varpi} \Leftrightarrow A = a_0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\varpi$, όπου a_0 αυθαίρετη σταθερά η οποία καθορίζει τα σημεία όπου $A = 0$. Αυτά βρίσκονται σε απόσταση ϖ_0 από τον άξονα z, με $a_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\varpi_0$. Άρα το δυναμικό μπορεί να γραφεί και σαν $\vec{A} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{\varpi}{\varpi_0}\hat{z}$.

Γ′ τρόπος: Λόγω συμμετρίας το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{B} = B(\varpi)\hat{\phi}$. Από νόμο Ampère σε κυκλικό βρόχο γύρω από τον άξονα z, $B2\pi\varpi = \mu_0 I \Leftrightarrow \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\varpi}\hat{\phi}$. Το διανυσματικό δυναμικό είναι παράλληλο στο ρεύμα και εξαρτάται μόνο από την απόσταση ϖ, δηλ. $\vec{A} = A(\varpi)\hat{z}$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε το $\vec{A}$ εφαρμόζοντας τη σχέση $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a}$ στον ορθογώνιο βρόχο του σχήματος.

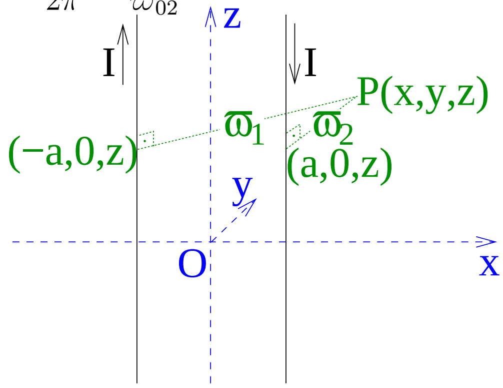


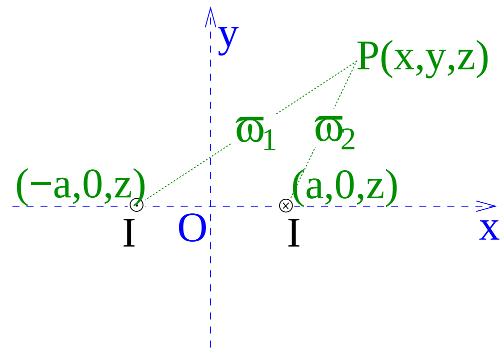
Με τη συγκεκριμένη φορά διαγραφής του βρόχου η στοιχειώδης επιφάνειά του είναι $d\vec{a} = d\varpi dz\hat{\phi}$ και η μαγνητική ροή που περνάει από μέσα του είναι $\displaystyle\iint \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_{z_0}^{z_0+\Delta z}\int_{\varpi}^{\varpi_0}\frac{\mu_0 I}{2\pi\varpi}\hat{\phi}\cdot d\varpi dz\hat{\phi} =$

$\frac{\mu_0 I}{2\pi}\Delta z \ln\frac{\varpi_0}{\varpi}$, όπου z_0 και $z_0+\Delta z$ είναι οι θέσεις της κάτω και πάνω βάσης του βρόχου, αντίστοιχα. Η κυκλοφορία του $\vec{A}$ είναι το άθροισμα των ολοκληρωμάτων $\int \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$ στις τέσσερις πλευρές του βρόχου. Ξεκινώντας από κάτω αριστερά έχουμε $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = A(\varpi)\hat{z}\cdot(\Delta z\hat{z})+\int_{\text{πάνω}} A(\varpi)\underbrace{\hat{z}\cdot d\vec{\ell}}_{0}+A(\varpi_0)\hat{z}\cdot(-\Delta z\hat{z})+\int_{\text{κάτω}} A(\varpi)\underbrace{\hat{z}\cdot d\vec{\ell}}_{0} = [A(\varpi)-A(\varpi_0)]\,\Delta z$. Έτσι η $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a}$ δίνει $A(\varpi)=A(\varpi_0)+\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\varpi_0}{\varpi}$. Θεωρώντας αυθαίρετα ότι στην ακτίνα ϖ_0 είναι $A(\varpi_0)=0$ βρίσκουμε $\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\varpi_0}{\varpi}\hat{z}$.
(Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που δίνουν οι άλλοι τρόποι διότι $\ln\frac{\varpi_0}{\varpi}=\ln\left(\frac{\varpi}{\varpi_0}\right)^{-1}=-\ln\frac{\varpi}{\varpi_0}$.)

Ένας τέταρτος τρόπος είναι να λύσουμε κατευθείαν την εξίσωση $\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$. Αφού το διανυσματικό δυναμικό είναι παράλληλο στο ρεύμα είναι $\vec{A}=A(\varpi)\hat{z}$ και $\vec{\nabla}^2 A=-\mu_0 J$. Σε σημεία εκτός του άξονα, $\varpi>0$, όπου $\vec{J}=0$, προκύπτει εξίσωση Laplace $\vec{\nabla}^2 A(\varpi)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}\left(\varpi\frac{dA}{d\varpi}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{dA}{d\varpi}=\frac{b_0}{\varpi} \Leftrightarrow A=a_0+b_0\ln\varpi$, όπου a_0 και b_0 σταθερές. Το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{B}=\vec{\nabla}\times(A\hat{z})=-\frac{b_0}{\varpi}\hat{\phi}$ και η σταθερά b_0 προσδιορίζεται από το νόμο Ampère σε κυκλικό βρόχο ακτίνας $\varpi=$ γύρω από τον άξονα z: $B2\pi\varpi=\mu_0 I \Leftrightarrow b_0=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}$. Έτσι βρίσκουμε $A=a_0-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\varpi$. Η σταθερά a_0 είναι αυθαίρετη και καθορίζει τα σημεία όπου $A=0$. Αυτά βρίσκονται σε απόσταση ϖ_0 από τον άξονα z, με $a_0=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\varpi_0$. Άρα το δυναμικό μπορεί να γραφεί και σαν $\vec{A}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\varpi}{\varpi_0}\hat{z}$.
Μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι η λύση ικανοποιεί τη συνθήκη Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, η οποία πρέπει να ισχύει από τη στιγμή που γράψαμε το νόμο Ampère σαν $\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$.

(β) Σε σημείο P το οποίο απέχει αποστάσεις ϖ_1 και ϖ_2 από τους αγωγούς (δες σχήμα) ο αγωγός που περνά από το $(-a,0,0)$ δημιουργεί διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}_1=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\varpi_1}{\varpi_{01}}\hat{z}$ και ο αγωγός που περνά από το $(a,0,0)$ δημιουργεί διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}_2=-\frac{\mu_0(-I)}{2\pi}\ln\frac{\varpi_2}{\varpi_{02}}\hat{z}$, όπου ϖ_{01} και ϖ_{02} αυθαίρετες σταθερές. Από επαλληλία βρίσκουμε $\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2=\left(C-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\varpi_1}{\varpi_2}\right)\hat{z}$, όπου C αυθαίρετη σταθερά (μετονομασία του συνδυασμού των σταθερών $\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\varpi_{01}}{\varpi_{02}}$).





Αντικαθιστώντας $\varpi_1=|(x+a)\hat{x}+y\hat{y}|=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$ και $\varpi_2=|(x-a)\hat{x}+y\hat{y}|=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ βρίσκουμε $\vec{A}=\left(C-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}}\right)\hat{z}$. Για να μηδενίζεται το δυναμικό σε μεγάλες αποστάσεις $|x|\gg a$, $|y|\gg a$ όπου ο όρος με τον λογάριθμο μηδενίζεται, πρέπει $C=0$. Η λύση είναι λοιπόν $\vec{A}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}}\,\hat{z}$.
Για να βρούμε την προσεγγιστική έκφραση σε μεγάλες αποστάσεις πρέπει να αναγνωρίσουμε ποιοι όροι είναι σημαντικοί και να κάνουμε ανάπτυγμα Taylor ως προς τις μικρές ποσότητες που θα δημιουργηθούν. Είναι $\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2+2ax+a^2}{x^2+y^2-2ax+a^2}=\left(1+\frac{2ax+a^2}{x^2+y^2}\right)\left(1-\frac{2ax-a^2}{x^2+y^2}\right)^{-1}\approx\left(1+\frac{2ax}{x^2+y^2}\right)\left(1+\frac{2ax}{x^2+y^2}\right)\approx 1+\frac{4ax}{x^2+y^2}$ και $\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}}\approx\ln\sqrt{1+\frac{4ax}{x^2+y^2}}\approx\ln\left(1+\frac{2ax}{x^2+y^2}\right)\approx\frac{2ax}{x^2+y^2}$, όπου χρησιμοποιήσαμε τα αναπτύγματα $(1+\epsilon)^n\approx 1+n\epsilon$, $\ln(1+\epsilon)\approx\epsilon$ που ισχύουν για $|\epsilon|\ll 1$. Τελικά $\vec{A}\approx-\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{ax}{x^2+y^2}\,\hat{z}$.

Αλλιώς: Μπορούμε να αναγνωρίσουμε την μικρή ποσότητα $\epsilon = \dfrac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}$ και αφού γράψουμε το δυναμικό σαν συνάρτηση του ϵ να κάνουμε ανάπτυγμα Taylor. Είναι $\vec{A} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\sqrt{\dfrac{(x+\epsilon\sqrt{x^2+y^2})^2+y^2}{(x-\epsilon\sqrt{x^2+y^2})^2+y^2}}\,\hat{z}$ και $\vec{A} \approx \vec{A}\Big|_{\epsilon=0} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\epsilon = 0 - \dfrac{\mu_0 I x}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}\epsilon\hat{z} = -\dfrac{\mu_0 I}{\pi}\dfrac{ax}{x^2+y^2}\,\hat{z}$ (η παράγωγος $\dfrac{\partial}{\partial \epsilon}$ γίνεται κρατώντας τα x και y σταθερά).

Η διαδικασία είναι ισοδύναμη με το να κάνουμε ανάπτυγμα ως προς a, παρότι δεν έχει νόημα να πούμε ότι το a είναι «μικρό» μιας που δεν είναι αδιάστατο. Πράγματι, αφού τα ϵ και a είναι ανάλογα, είναι $\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\epsilon = \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial a}\Big|_{a=0} a$, οπότε $\vec{A} \approx \vec{A}\Big|_{a=0} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial a}\Big|_{a=0} a$.

$\boxed{2}$: Το διανυσματικό δυναμικό θα έχει τη διεύθυνση του ρεύματος και θα εξαρτάται μόνο από το z, δηλ. $\vec{A} = A(z)\hat{x}$. Ο νόμος Ampère $\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J} \Leftrightarrow \vec{\nabla}^2 A = -\mu_0 J_x$ δίνει τη εξίσωση Laplace στους χώρους $z<-a$, $-a<z<a$, $z>a$ όπου δεν υπάρχει ρεύμα. Η λύση της Laplace είναι $\vec{\nabla}^2 A(z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d^2A(z)}{dz^2} = 0 \Leftrightarrow A(z) = bz + c$ όπου b και c σταθερές ολοκλήρωσης. Άρα

$$\vec{A} = \begin{cases} (b_2 z + c_2)\,\hat{x}\,, z > a \\ (bz+c)\,\hat{x}\,, -a<z<a \\ (b_1 z + c_1)\,\hat{x}\,, z<-a \end{cases}$$

και $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} =$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{dA}{dz}\hat{y} = \begin{cases} b_2\hat{y}\,, z>a \\ b\hat{y}\,, -a<z<a \\ b_1\hat{y}\,, z<-a \end{cases}$$

Σε μεγάλες αποστάσεις κάθετα από τα επίπεδα ρεύματα, δηλ. για $|z| \gg a$, το μαγνητικό πεδίο πρέπει να μηδενίζεται, διότι τα επίπεδα «φαίνονται» σαν ένα, με $\vec{K}_{o\lambda} = 0$. Άρα $b_1 = b_2 = 0$.

Πρέπει επίσης να ισχύουν οι οριακές συνθήκες $\vec{A}_{\text{πάνω}} = \vec{A}_{\text{κάτω}}$ και $\vec{B}_{\text{πάνω}} - \vec{B}_{\text{κάτω}} = \mu_0\vec{K}\times\hat{n}$ στις επιφάνειες $z=-a$ και $z=a$, οι οποίες δίνουν

$$\begin{cases} c_1 = -ba + c \\ b\hat{y} - 0 = \mu_0(-K_0\hat{x})\times\hat{z} \Leftrightarrow b = \mu_0 K_0 \\ c_2 = ba + c \\ 0 - b\hat{y} = \mu_0 K_0\hat{x}\times\hat{z} \Leftrightarrow b = \mu_0 K_0 \end{cases}$$

Επιλέγοντας την εναπομένουσα ελεύθερη προσθετική σταθερά $c = 0$ (ισοδύναμα επιλέγοντας $A = 0$ στο επίπεδο $z=0$), έχουμε

$$\vec{A} = \begin{cases} \mu_0 K_0 a\;\hat{x}\,, z\geq a \\ \mu_0 K_0 z\;\hat{x}\,, -a\leq z\leq a \\ -\mu_0 K_0 a\;\hat{x}\,, z\leq -a \end{cases}$$

Μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι η λύση ικανοποιεί τη συνθήκη Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, η οποία πρέπει να ισχύει από τη στιγμή που γράψαμε το νόμο Ampère σαν $\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$.

Υπάρχουν πλήθος άλλων τρόπων να λυθεί το πρόβλημα εύρεσης του διανυσματικού δυναμικού $\vec{A}$.

Θα μπορούσε να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό του κάθε επιπέδου ξεχωριστά (με έναν από τους τρόπους που λύσαμε αυτό το πρόβλημα στο μάθημα) και μετά να χρησιμοποιηθεί η αρχή της επαλληλίας. Μια επιλογή για το δυναμικό κάθε επιπέδου είναι η $\vec{A}_\pm = \mp\dfrac{\mu_0 K_0}{2}|z\mp a|\hat{x}$ (το πάνω πρόσημο για το πάνω επίπεδο και το κάτω για το κάτω επίπεδο), οπότε $\vec{A} = \vec{A}_+ + \vec{A}_- = \dfrac{\mu_0 K_0}{2}\left(|z+a| - |z-a|\right)\hat{x}$.

Αλλιώς, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η αρχή της επαλληλίας για να βρεθεί το ολικό $\vec{B}$ από τα δύο επίπεδα (προκύπτει $\vec{B} = \mu_0 K_0\hat{y}$ ανάμεσα στα επίπεδα και μηδέν αλλού) και στη συνέχεια να βρεθεί το $\vec{A}$ μέσω της $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ ή της $\oint\vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint\vec{B}\cdot d\vec{a}$.

Αλλιώς, θα μπορούσε να βρεθεί η λύση συγκρίνοντας με το αντίστοιχο πρόβλημα της ηλεκτροστατικής, δηλ. τον επίπεδο πυκνωτή με τις πλάκες στις θέσεις $z=\pm a$ με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\pm\sigma_0$. Το πρόβλημα αυτό περιγράφεται από την $\vec{\nabla}^2 V = -\dfrac{\sigma_0\delta(z-a) - \sigma_0\delta(z+a)}{\varepsilon_0}$, η οποία είναι όμοια με την $\vec{\nabla}^2 A = -\mu_0\left[K_0\delta(z-a) - K_0\delta(z+a)\right]$ που περιγράφει το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = A(z)\hat{x}$ του αρχικού προβλήματος. (Στο πρόβλημα ηλεκτροστατικής το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές $-\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{z}$ ανάμεσα στις πλάκες και μηδέν αλλού, οπότε το δυναμικό είναι $V = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}z +$σταθερά ανάμεσα στις πλάκες και σταθερό έξω, με τιμή που καθορίζεται από την συνέχεια του δυναμικού στις πλάκες. Επιλέγοντας αυθαίρετα $V=0$ στο επίπεδο $z=0$ προκύπτει $V = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}a\,, z\geq a \\ \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}z\,, -a\leq z\leq a \\ -\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}a\,, z\leq -a \end{cases}$ Η αντικατάσταση $V\to A$, $\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\to\mu_0 K_0$ δίνει τη λύση για το $\vec{A}$.)

$\boxed{3}$: (α) Αντικαθιστώντας $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ στο νόμο Ampère $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$ προκύπτει $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \mu_0\vec{J} \Leftrightarrow \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}$. Αν δεχθούμε τη

συνθήκη Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ ο νόμος Ampère δίνει $\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$.
Αν $\vec{J}=J_z(\vec{r})\hat{z}$ τότε και το διανυσματικό δυναμικό είναι παράλληλο στο ρεύμα, δηλ. $\vec{A}=A_z(\vec{r})\hat{z}$ και ο νόμος Ampère δίνει $\vec{\nabla}^2A_z=-\mu_0J_z$, σχέση μαθηματικά ισοδύναμη με το νόμο Poisson $\vec{\nabla}^2V=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ της ηλεκτροστατικής.
(β) Η συνάρτηση δυναμικού αντιστοιχεί στην $\hat{z}$ συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού $V\to A_z$ και η πυκνότητα φορτίου προς ε_0 στην πυκνότητα ρεύματος επί μ_0, δηλ. $\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\to\mu_0J_z$. Από την τελευταία προκύπτει και ότι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου προς ε_0 αντιστοιχεί στην επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος, δηλ. $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\to\mu_0K_z$.
Κάνοντας αυτές τις αντικαταστάσεις στη δοσμένη λύση του προβλήματος Ι βρίσκουμε τη λύση του προβλήματος ΙΙ

$$\vec{A}=\hat{z}\frac{2\mu_0RK_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{\sin(n\phi)}{n^2}\times\begin{cases}\left(\dfrac{R}{\varpi}\right)^n, & \varpi\geq R\\ \left(\dfrac{\varpi}{R}\right)^n, & \varpi\leq R\end{cases}$$

Το πρόβλημα ΙΙ μπορεί να λυθεί άμεσα, μέσω της εξίσωσης $\vec{\nabla}^2A_z=-\mu_0J_z$ η οποία οδηγεί στην εξίσωση Laplace στις περιοχές $\varpi<R$ και $\varpi>R$ όπου δεν υπάρχει ρεύμα. Η γενική λύση της εξίσωσης Laplace για προβλήματα με κυλινδρική συμμετρία σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $A_z(\varpi,\phi)=a_0+b_0\ln\varpi+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k\varpi^k+\dfrac{b_k}{\varpi^k}\right)\cos(k\phi)+\left(c_k\varpi^k+\dfrac{d_k}{\varpi^k}\right)\sin(k\phi)\right]$.
Πρέπει να γράψουμε λύσεις τέτοιας μορφής στις περιοχές $\varpi<R$ και $\varpi>R$ και να βρούμε τις σταθερές από τις οριακές συνθήκες. Για $\varpi<R$ διώχνουμε τους όρους με $\ln\varpi$ και $1/\varpi^k$ που απειρίζονται στο $\varpi=0$. Για $\varpi>R$ διώχνουμε τους όρους ϖ^k που απειρίζονται στο $\varpi\to\infty$.
Παρότι και ο όρος με το $\ln\varpi$ απειρίζεται, γενικά δεν τον διώχνουμε, γιατί σε μεγάλες αποστάσεις κάθε κατανομή με κυλινδρική συμμετρία «φαίνεται» σαν μια γραμμική κατανομή ρεύματος I στην οποία αντιστοιχεί δυναμικό $-\dfrac{\mu_0I}{2\pi}\ln\varpi+$ σταθερά. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα το συνολικό ρεύμα του κελύφους είναι $I=\int Kd\ell_\perp=\int_0^{2\pi}K(\phi)Rd\phi=0$, οπότε ο όρος με το λογάριθμο δεν θα υπάρχει. Δεν είναι απαραίτητο να κάνουμε αυτή τη σκέψη, μπορούμε να αφήσουμε τον όρο με το λογάριθμο και ο συντελεστής του θα προκύψει ούτως ή άλλως από τις οριακές συνθήκες.
Έτσι η λύση γράφεται (για να απλουστεύσουμε τις εκφράσεις του δυναμικού στην ακτίνα $\varpi=R$, οι οποίες θα χρειαστούν στις οριακές συνθήκες) δημιουργούμε παντού το λόγο ϖ/R μετονομάζοντας τις σταθερές (οι οποίες ούτως ή άλλως είναι άγνωστες) $A_z=$

$$\begin{cases}a_0+b_0\ln\dfrac{\varpi}{R}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k\cos(k\phi)+d_k\sin(k\phi)}{(\varpi/R)^k}, \varpi\geq R\\ A_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\phi)+c_k\sin(k\phi)\right]\left(\frac{\varpi}{R}\right)^k, \varpi\leq R\end{cases}$$

Η συνέχεια του δυναμικού για $\varpi=R$ δίνει αμέσως (τα δύο ίσα αναπτύγματα Fourier πρέπει να έχουν ίσους συντελεστές των ημιτόνων, συνημιτόνων και ίσους σταθερούς όρους):
$A_0=a_0$, $b_k=a_k$, $d_k=c_k$ για κάθε k.
Άρα $A_z=$

$$\begin{cases}a_0+b_0\ln\dfrac{\varpi}{R}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\cos(k\phi)+c_k\sin(k\phi)}{(\varpi/R)^k}, \varpi\geq R\\ a_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\phi)+c_k\sin(k\phi)\right]\left(\frac{\varpi}{R}\right)^k, \varpi\leq R\end{cases}$$

Το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{B}=\vec{\nabla}\times[A_z(\varpi,\phi)\hat{z}]=\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial A_z}{\partial\phi}\hat{\varpi}-\dfrac{\partial A_z}{\partial\varpi}\hat{\phi}$ και η οριακή συνθήκη $\vec{B}|_{\varpi=R^+}-\vec{B}|_{\varpi=R^-}=\mu_0\vec{K}\times\hat{\varpi}=\mu_0K(\phi)\hat{z}\times\hat{\varpi}=\mu_0K(\phi)\hat{\phi}$ αφενός δίνει ότι η κάθετη συνιστώσα B_ϖ είναι συνεχής (κάτι που ήδη ισχύει· προκύπτει από την συνέχεια του $A_z(\varpi=R^\pm,\phi)$ η οποία ήδη έχει απαιτηθεί) και αφετέρου συνδέει την ασυνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας B_ϕ με την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος: $B_\phi|_{\varpi=R^+}-B_\phi|_{\varpi=R^-}=\mu_0K(\phi)$.
Είναι $B_\phi=-\dfrac{\partial A_z}{\partial\varpi}=$

$$\begin{cases}-\dfrac{b_0}{\varpi}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\dfrac{ka_k}{R}\cos(k\phi)+\dfrac{kc_k}{R}\sin(k\phi)}{(\varpi/R)^{k+1}}, \varpi>R\\ -\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{ka_k}{R}\cos(k\phi)+\frac{kc_k}{R}\sin(k\phi)\right]\left(\frac{\varpi}{R}\right)^{k-1}, \varpi<R\end{cases}$$

οπότε η οριακή $B_\phi|_{\varpi=R^+}-B_\phi|_{\varpi=R^-}=\mu_0K(\phi)\Leftrightarrow$

$$-\frac{b_0}{R}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2ka_k}{R}\cos(k\phi)+\frac{2kc_k}{R}\sin(k\phi)\right]=\mu_0K(\phi)\circledast$$

Αφού στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν είναι τετριμμένο να γράψουμε το δεξί μέλος σαν επαλληλία των 1, $\cos(k\phi)$, $\sin(k\phi)$, με $k\in\mathbb{N}^\star$ θα χρησιμοποιήσουμε το τέχνασμα Fourier, δηλ. θα πολλαπλασιάσουμε διαδοχικά με 1, $\cos(n\phi)$, $\sin(n\phi)$, με $n\in\mathbb{N}^\star$ και θα ολοκληρώσουμε στο διάστημα $0<\phi<2\pi$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας. Τα ολοκληρώματα $\int_0^{2\pi}K(\phi)\ldots d\phi$ υπολογίζονται σαν $K_0\int_0^{\pi}\ldots d\phi+(-K_0)\int_{\pi}^{2\pi}\ldots d\phi$.

$$\int_0^{2\pi}\circledast\times1\,d\phi\leadsto-\frac{b_0}{R}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi}_{2\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2ka_k}{R}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(k\phi)\,d\phi}_{0}\right.$$

$$+\frac{2kc_k}{R}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(k\phi)\,d\phi}_{0}\Bigg] = \mu_0\underbrace{\int_0^{2\pi}K(\phi)\,d\phi}_{0} \Leftrightarrow$$

$b_0 = 0$.

$$\int_0^{2\pi}\circledast\times\cos(n\phi)d\phi \rightsquigarrow -\frac{b_0}{R}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(n\phi)d\phi}_{0\,\text{για}\,n\neq 0}+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\frac{2ka_k}{R}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(k\phi)\cos(n\phi)d\phi}_{\pi\delta_{kn}}+$$

$$\frac{2kc_k}{R}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(k\phi)\cos(n\phi)d\phi}_{0}\Bigg] = \mu_0\underbrace{\int_0^{2\pi}K(\phi)\cos(n\phi)d\phi}_{0}$$

$\Leftrightarrow a_n = 0$ για κάθε $n \neq 0$.

$$\int_0^{2\pi}\circledast\times\sin(n\phi)d\phi \rightsquigarrow -\frac{b_0}{R}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(n\phi)d\phi}_{0}+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\frac{2ka_k}{R}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(k\phi)\sin(n\phi)d\phi}_{0}+$$

$$\frac{2kc_k}{R}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(k\phi)\sin(n\phi)d\phi}_{\pi\delta_{kn}}\Bigg] = \mu_0\underbrace{\int_0^{2\pi}K(\phi)\sin(n\phi)d\phi}_{2K_0\frac{1-(-1)^n}{n}}$$

$$\Leftrightarrow c_n = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \text{ άρτιο} \\ \dfrac{2\mu_0 R K_0}{\pi}\dfrac{1}{n^2} & \text{αν } n \text{ περιττό} \end{cases}$$

Η τελική λύση είναι (αφού διώξουμε την αυθαίρετη προσθετική σταθερά a_0, κάτι που σημαίνει ότι θεωρούμε σημείο αναφοράς με μηδενικό δυναμικό το $\varpi = R, \phi = 0$)

$$A_z = \begin{cases} \dfrac{2\mu_0 R K_0}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{\sin(n\phi)}{n^2\left(\frac{\varpi}{R}\right)^n}, \varpi \geq R \\ \dfrac{2\mu_0 R K_0}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{\sin(n\phi)}{n^2}\left(\frac{\varpi}{R}\right)^n, \varpi \leq R \end{cases}$$

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης της $\circledast$ είναι να αναπτύξουμε το δεξί μέλος σε σειρά Fourier και στη συνέχεια να εξισώσουμε τους συντελεστές των αντίστοιχων όρων στα δύο μέλη της $\circledast$.

Από τη θεωρία Fourier για περιοδικές συναρτήσεις $f(x)$ με περίοδο T ξέρουμε ότι γράφονται σαν $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos\frac{2k\pi x}{T} + B_k\sin\frac{2k\pi x}{T}\right]$ με $A_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\frac{2k\pi x}{T}dx$ για $k \in \mathbb{N}$ και $B_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin\frac{2k\pi x}{T}dx$ για $k \in \mathbb{N}^\star$.

Η εφαρμογή για την $K(\phi)$ η οποία είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ δίνει το ανάπτυγμά της $K(\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(k\phi) + B_k\sin(k\phi)]$ με $A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K(\phi)\cos(k\phi)d\phi$ για $k \in \mathbb{N}$ και $B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K(\phi)\sin(k\phi)d\phi$ για $k \in \mathbb{N}^\star$.

Μάλιστα η συγκεκριμένη $K(\phi)$ είναι ένας τετραγωνικός παλμός, $K(\phi) = K_0\times\begin{cases} 1 & \text{αν } 0<\phi<\pi \\ -1 & \text{αν } -\pi<\phi<0 \end{cases}$ με ανάπτυγμα $K(\phi) = K_0\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{4}{k\pi}\sin(k\phi)$.

Αντικαθιστώντας στην $\circledast$, η εξίσωση των συντελεστών των 1, $\cos(k\phi)$ και $\sin(k\phi)$ στα δύο μέλη δίνει τα b_0, a_k, c_k.

$\boxed{4}$: (α) Σε ορθογώνιο βρόχο πάνω σε επίπεδο που περνά από τον άξονα, με εσωτερική κυλινδρική ακτίνα R^-, εξωτερική R^+ και βάσεις στα z_1, $z_2 = z_1 + \Delta z$ (δηλ. $R^- < \varpi < R^+$, $z_1 < z < z_2$) εφαρμόζουμε τη σχέση $\oint\vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \Phi_{\varepsilon\gamma\kappa}$ και παίρνουμε το όριο $R^- \to R^+$. Η μαγνητική ροή $\Phi_{\varepsilon\gamma\kappa} = \iint\vec{B}\cdot d\vec{a}$ μηδενίζεται (διότι το πεδίο δεν μπορεί να είναι άπειρο) και άρα έχουμε (έστω διαλέγουμε φορά διαγραφής $+\hat{z}$ στην πλευρά $\varpi = R^-$) $A|_{\varpi=R^-}\Delta z + A|_{\varpi=R^+}(-\Delta z) = 0$ (δεν υπάρχει συνεισφορά από τις πλευρές $z = z_{1,2}$ αφού σε αυτές $\vec{A}\perp d\vec{\ell}$). Άρα $A|_{\varpi=R^+} = A|_{\varpi=R^-}$.

Σε ορθογώνιο βρόχο πάνω σε επίπεδο $z =$ σταθερό, με πλευρές $\varpi = R^-$, $\varpi = R^+$, $\phi = \phi_1$, $\phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi$, (δηλ. τα μήκη των πλευρών είναι $R^+ - R^-$ και $R\Delta\phi$) εφαρμόζουμε τη σχέση $\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\varepsilon\gamma\kappa}$ και παίρνουμε το όριο $R^- \to R^+$. Έστω διαλέγουμε φορά διαγραφής $+\hat{\phi}$ στην πλευρά $\varpi = R^+$, οπότε το διάνυσμα της επιφάνειας έχει φορά $+\hat{z}$. Το ρεύμα που διαπερνά το βρόχο είναι $K(\phi)R\Delta\phi\hat{z}$ (έχουμε διαλέξει το $\Delta\phi$ αρκούντως μικρό ώστε η επιφανειακή πυκνότητα να μπορεί να θεωρηθεί σταθερή) ενώ η κυκλοφορία του μαγνητικού πεδίου είναι $B_\phi|_{\varpi=R^+}R\Delta\phi - B_\phi|_{\varpi=R^-}R\Delta\phi$ (η συνεισφορά από τις πλευρές $\phi = \phi_{1,2}$ όταν πάρουμε το όριο $R^- \to R^+$ μηδενίζεται γιατί το πεδίο δεν απειρίζεται). Έτσι βρίσκουμε $B_\phi|_{\varpi=R^+} - B_\phi|_{\varpi=R^-} = \mu_0 K$, ή, $\left.\frac{\partial A}{\partial\varpi}\right|_{\varpi=R^+} - \left.\frac{\partial A}{\partial\varpi}\right|_{\varpi=R^-} = -\mu_0 K$.

(β) Ο νόμος Ampére $\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$ στις περιοχές $\varpi < R$ και $\varpi > R$ όπου δεν υπάρχουν ρεύματα, και με $\vec{A} = A\hat{z}$, δίνει $\vec{\nabla}^2 A = 0$, δηλ. η συνάρτηση A είναι αρμονική μέσα και έξω από το φλοιό.

Λόγω της μορφής του $K(\phi)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι κατάλληλες λύσεις της Laplace είναι

$$A = \begin{cases} c_3\varpi^3\sin(3\phi), \varpi < R \\ d_3\varpi^{-3}\sin(3\phi), \varpi > R \end{cases}$$

Οι οριακές συνθήκες δίνουν $A|_{\varpi=R^+} = A|_{\varpi=R^-} \Leftrightarrow c_3R^3 = d_3R^{-3}$ και $\left.\frac{\partial A}{\partial\varpi}\right|_{\varpi=R^+} - \left.\frac{\partial A}{\partial\varpi}\right|_{\varpi=R^-} = -\mu_0 K \Leftrightarrow -3d_3R^{-4} - 3c_3R^2 = -\mu_0K_0$. Η λύση του συστήματος είναι $c_3 = \frac{\mu_0K_0}{6R^2}$, $d_3 = \frac{\mu_0K_0R^4}{6}$, επομένως $A = \begin{cases} \frac{\mu_0K_0}{6R^2}\varpi^3\sin(3\phi)\,, \varpi \le R \\ \frac{\mu_0K_0R^4}{6}\frac{1}{\varpi^3}\sin(3\phi)\,, \varpi \ge R \end{cases}$ και

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0K_0}{2}\frac{\varpi^2}{R^2}\left[\cos(3\phi)\hat{\varpi} - \sin(3\phi)\hat{\phi}\right]\,, \varpi < R \\ \frac{\mu_0K_0}{2}\frac{R^4}{\varpi^4}\left[\cos(3\phi)\hat{\varpi} + \sin(3\phi)\hat{\phi}\right]\,, \varpi > R \end{cases}$$

$\boxed{5}$: Αφού το ρεύμα έχει σταθερή διεύθυνση $\hat{z}$ και το δυναμικό θα έχει την ίδια διεύθυνση και λόγω της συμμετρίας του προβλήματος θα είναι συνάρτηση της κυλινδρικής ακτίνας μόνο, δηλ. $\vec{A} = A(\varpi)\hat{z}$. Ο νόμος Ampère δίνει $\vec{\nabla}^2 A = -\mu_0 J = \begin{cases} -\mu_0\frac{a}{\varpi}\,, \varpi < R \\ 0\,, \varpi > R \end{cases}$

Έτσι προκύπτει ότι $\vec{A} = \begin{cases} A_1(\varpi)\hat{z}\,, \varpi < R \\ A_2(\varpi)\hat{z}\,, \varpi > R \end{cases}$ με $\vec{\nabla}^2 A_1 = -\mu_0\frac{a}{\varpi}$ και $\vec{\nabla}^2 A_2 = 0$.

(α) Είναι $\vec{\nabla}^2 A(\varpi) = \frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}\left(\varpi\frac{dA}{d\varpi}\right)$, οπότε η $\vec{\nabla}^2 A_1 = -\mu_0\frac{a}{\varpi} \Leftrightarrow \frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}\left(\varpi\frac{dA_1}{d\varpi}\right) = -\mu_0\frac{a}{\varpi} \Leftrightarrow \int d\left(\varpi\frac{dA_1}{d\varpi}\right) = -\mu_0 a\int d\varpi \Leftrightarrow \varpi\frac{dA_1}{d\varpi} = -\mu_0 a\varpi + C \Leftrightarrow \int dA_1 = \int\left(-\mu_0 a + \frac{C}{\varpi}\right)d\varpi \Leftrightarrow A_1 = -\mu_0 a\varpi + C\ln\varpi + D$, όπου C και D σταθερές. Η σταθερά C πρέπει να μηδενίζεται ώστε να μην απειρίζεται το δυναμικό στον άξονα $\varpi = 0$, ενώ η σταθερά D μπορεί να μηδενιστεί (είναι μια αυθαίρετη προσθετική σταθερά και ο μηδενισμός της ισοδυναμεί με το να θεωρήσουμε ότι το δυναμικό μηδενίζεται στον άξονα $\varpi = 0$). Έτσι προκύπτει η λύση $A_1(\varpi) = \mu_0 a\varpi$ για το εσωτερικό του αγωγού. Όμοια στο εξωτερικό του αγωγού $\vec{\nabla}^2 A_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}\left(\varpi\frac{dA_2}{d\varpi}\right) = 0 \Leftrightarrow \varpi\frac{dA_2}{d\varpi} = C_1 \Leftrightarrow \int dA_2 = \int\frac{C_1}{\varpi}d\varpi \Leftrightarrow A_2 = C_1\ln\varpi + C_2$, όπου C_1 και C_2 σταθερές. Βρήκαμε λοιπόν ότι $\vec{A} = \begin{cases} -\mu_0 a\varpi\ \hat{z}\,, \varpi < R \\ (C_1\ln\varpi + C_2)\,\hat{z}\,, \varpi > R \end{cases}$

(β) Το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{B} = \vec{\nabla}\times[A(\varpi)\hat{z}] = -\frac{dA}{d\varpi}\hat{\phi} = \begin{cases} \mu_0 a\hat{\phi}\,, \varpi < R \\ -\frac{C_1}{\varpi}\hat{\phi}\,, \varpi > R \end{cases}$

Τόσο το μαγνητικό πεδίο όσο και το διανυσματικό δυναμικό πρέπει να είναι συνεχή στην επιφάνεια του αγωγού $\varpi = R$ (το $\vec{B}$ είναι συνεχές αφού δεν υπάρχει επιφανειακό ρεύμα). Άρα $\mu_0 a = -\frac{C_1}{R} \Leftrightarrow C_1 = -\mu_0 aR$ και $-\mu_0 aR = C_1\ln R + C_2 \Leftrightarrow C_2 = -\mu_0 aR - C_1\ln R \Leftrightarrow C_2 = -\mu_0 aR + \mu_0 aR\ln R$. Τελικά $A_2(\varpi) = -\mu_0 aR\left(1 + \ln\frac{\varpi}{R}\right)$ και

$$\vec{A} = \begin{cases} -\mu_0 a\varpi\ \hat{z}\,, \varpi \le R \\ -\mu_0 aR\left(1 + \ln\frac{\varpi}{R}\right)\hat{z}\,, \varpi \ge R \end{cases}$$

(γ) Αντικαθιστώντας τη σταθερά C_1 στην έκφραση του πεδίου που ήδη έχουμε βρει προκύπτει

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 a\hat{\phi}\,, \varpi \le R \\ \mu_0 a\frac{R}{\varpi}\hat{\phi}\,, \varpi \ge R \end{cases}$$

Το διανυσματικό δυναμικό μπορεί επίσης να βρεθεί μέσω της σχέσης του με το μαγνητικό πεδίο, αφού πρώτα βρεθεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα διότι λόγω συμμετρίας $\vec{B} = B(\varpi)\hat{\phi}$ και ο νόμος Ampère σε κυκλικό βρόχο ακτίνας ϖ γύρω από τον άξονα του αγωγού δίνει $B2\pi\varpi = \mu_0 I_{\varepsilon\gamma\kappa}$, όπου $I_{\varepsilon\gamma\kappa} = \iint\vec{J}\cdot d\vec{a} = \int_0^{\varpi}\frac{a}{\varpi}2\pi\varpi d\varpi = 2\pi a\varpi$ αν $\varpi < R$ και $I_{\varepsilon\gamma\kappa} = \iint\vec{J}\cdot d\vec{a} = \int_0^{R}\frac{a}{\varpi}2\pi\varpi d\varpi = 2\pi aR$ αν $\varpi > R$. Έτσι προκύπτει ότι $\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 a\hat{\phi}\,, \varpi \le R \\ \mu_0 a\frac{R}{\varpi}\hat{\phi}\,, \varpi \ge R \end{cases}$

(Α) Με $\vec{A} = A(\varpi)\hat{z}$ (παράλληλο στο ρεύμα) είναι $\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{dA}{d\varpi}\hat{\phi}$ οπότε στο εσωτερικό του αγωγού (για $\varpi < R$) είναι $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow -\frac{dA}{d\varpi} = \mu_0 a \Leftrightarrow A = -\mu_0 a\varpi + D$, όπου D σταθερά. Όμοια στο εξωτερικό του αγωγού (για $\varpi > R$) είναι $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow -\frac{dA}{d\varpi} = \mu_0 a\frac{R}{\varpi} \Leftrightarrow A = -\mu_0 aR\ln\varpi + C_2$, όπου C_2 σταθερά, η τιμή της οποίας βρίσκεται $C_2 = D - \mu_0 aR + \mu_0 aR\ln R$ από την συνέχεια της $A(\varpi)$ στην ακτίνα $\varpi = R$. Έτσι βρίσκουμε $A = \begin{cases} -\mu_0 a\varpi + D\,, \varpi \le R \\ -\mu_0 aR\left(1 + \ln\frac{\varpi}{R}\right) + D\,, \varpi \ge R \end{cases}$

Η D μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα. Οι «συνηθέστερες» επιλογές είναι $D = 0$ ώστε $A = 0$ στον άξονα $\varpi = 0$ ή $D = \mu_0 aR$ ώστε $A = 0$ στην επιφάνεια του αγωγού $\varpi = R$.

(Β) Έστω επιλέγουμε $A = 0$ στον άξονα $\varpi = 0$. Ο νόμος Ampère σε ορθογώνιο βρόχο με πλευρές $\varpi = 0$ (όπου $A = 0$), $\varpi \le R$, $z = z_0$ και $z = z_0 + \Delta z$ δίνει (επιλέγουμε φορά διαγραφής τέτοια ώστε το διάνυσμα επιφάνειας του βρόχου να είναι ομόρροπο με το $\hat{\phi}$) $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a} \Leftrightarrow \underbrace{A(\varpi=0)}_{0}\hat{z}\cdot\Delta z\hat{z} + 0 + A(\varpi)\hat{z}\cdot(-\Delta z\hat{z}) + 0 = \Delta z\int_0^{\varpi}\mu_0 a d\varpi \Leftrightarrow A = -\mu_0 a\varpi$ για $\varpi \le R$. Για να βρούμε το $A(\varpi)$ στο εξωτερικό του αγωγού μπορούμε να εφαρμόσουμε νόμο Ampère σε ορθογώνιο βρόχο με πλευρές $\varpi = R$ (ή οπουδήποτε αλλού που ξέρουμε ήδη το A· είναι βολικότερη όμως η επιλογή $\varpi = R$ ώστε να υπολογίσουμε ευκολότερα την μαγνητική ροή που διαπερνά τον βρόχο χωρίς να πρέπει να τον χωρίσουμε σε μέρη όπου η σχέση $B(\varpi)$ είναι διαφορετική), $\varpi > R$, $z = z_0$ και $z = z_0 + \Delta z$. Έχουμε $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a} \Leftrightarrow \underbrace{A(\varpi=R)}_{-\mu_0 aR}\hat{z}\cdot\Delta z\hat{z} + 0 + A(\varpi)\hat{z}\cdot(-\Delta z\hat{z}) + 0 = \Delta z\int_R^{\varpi}\mu_0 a\frac{R}{\varpi}d\varpi \Leftrightarrow A = -\mu_0 aR\left(1+\ln\frac{\varpi}{R}\right)$ για $\varpi \ge R$.

$\boxed{6}$: (α) Είναι ίσες, όπως προκύπτει από $\underbrace{\iint \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{a}}_{\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell}} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a}$.

(β) Αφού $\vec{A} = A(\varpi)\hat{\phi}$, σε κυκλικό βρόχο ακτίνας ϖ γύρω από τον άξονα z είναι $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \oint A(\varpi)\hat{\phi}\cdot d\ell\hat{\phi} = A(\varpi)2\pi\varpi$.

Το ότι το $\vec{A} = A(\varpi)\hat{\phi}$ μπορεί να βρεθεί από την αναλογία της σχέσης μεταξύ $\vec{B}$–$\vec{A}$ με τη σχέση μεταξύ $\vec{J}$–$\vec{B}$:

Για το $\vec{A}$ ισχύουν $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ και $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$, σε πλήρη αναλογία με τις $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ και $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$. Όπως λοιπόν ένα ρεύμα $\mu_0\vec{J} = \mu_0 J(\varpi)\hat{z}$ αντιστοιχεί σε ένα αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B(\varpi)\hat{\phi}$, έτσι και ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B(\varpi)\hat{z}$ αντιστοιχεί σε ένα αζιμουθιακό διανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = A(\varpi)\hat{\phi}$. Θα μπορούσαμε μάλιστα να λύσουμε το πρόβλημα βασιζόμενοι σε αυτή την αναλογία, δηλ. να βρούμε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ που αντιστοιχεί στο ρεύμα $\mu_0\vec{J} = 2e^{-\varpi^2}\hat{z}$ και μετά κάνοντας την αντικατάσταση $B \to A$ (και $\mu_0 J \to B$) να βρούμε το διανυσματικό δυναμικό που αντιστοιχεί στο πεδίο $\vec{B} = 2e^{-\varpi^2}\hat{z}$.

Η μαγνητική ροή που περνάει από το βρόχο είναι (για φορά διαγραφής ομόρροπη στο $\hat{\phi}$ το διάνυσμα της επιφάνειας του βρόχου είναι ομόρροπο με το $\hat{z}$ οπότε $\vec{B}\cdot d\vec{a} = B\varpi d\phi d\varpi$): $\iint \vec{B}\cdot d\vec{a} = 2\pi\int_0^{\varpi}2e^{-\varpi^2}\varpi d\varpi = 2\pi\left[-e^{-\varpi^2}\right]_0^{\varpi} = 2\pi\left(1-e^{-\varpi^2}\right)$. Επομένως $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a} \Leftrightarrow A(\varpi) = \frac{1}{\varpi}\left(1-e^{-\varpi^2}\right)$ και $\vec{A} = \frac{1}{\varpi}\left(1-e^{-\varpi^2}\right)\hat{\phi}$.

Αλλιώς: Μπορούμε να βρούμε το $\vec{A}$ λύνοντας την

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\varpi}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\varpi} = 0 \\ \frac{1}{\varpi}\left[\frac{\partial(\varpi A_\phi)}{\partial\varpi} - \frac{\partial A_\varpi}{\partial\phi}\right] = 2e^{-\varpi^2} \end{cases}$$

Μια λύση[1] αντιστοιχεί σε $\vec{A} = A(\varpi)\hat{\phi}$ με $\frac{1}{\varpi}\frac{d(\varpi A)}{d\varpi} = 2e^{-\varpi^2} \Leftrightarrow \varpi A = \int 2\varpi e^{-\varpi^2}d\varpi = -e^{-\varpi^2} + C \Leftrightarrow \vec{A} = \frac{1}{\varpi}\left(C - e^{-\varpi^2}\right)\hat{\phi}$. Η σταθερά ολοκλήρωσης C πρέπει να είναι $C = 1$ ώστε η κυκλοφορία του $\vec{A}$ σε κύκλο ακτίνας ϖ γύρω από τον άξονα z να μηδενίζεται για $\varpi \to 0$ (αυτό απαιτείται διότι $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a}$ και η μαγνητική ροή μηδενίζεται για $\varpi \to 0$).

$\boxed{7}$: Χωρικό ρεύμα με πυκνότητα $\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}(\varpi B_\phi)\hat{z} = \frac{3a}{R}\left(\frac{2}{3} - \frac{\varpi}{R}\right)\hat{z}$ στο εσωτερικό του κυλίνδρου $\varpi < R$, $0 < z < h$.

Για $\varpi < \frac{2}{3}R$ το $\vec{J}$ είναι ομόρροπο με το $\hat{z}$ ενώ για $\frac{2}{3}R < \varpi < R$ είναι αντίρροπο με το $\hat{z}$.

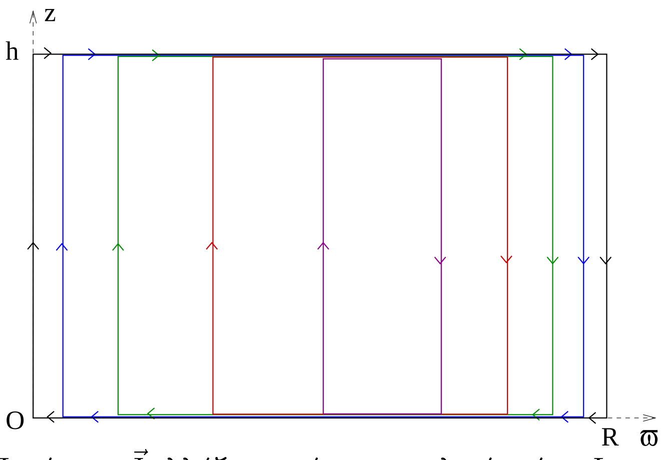
Στην επιφάνεια $z = 0$ το πεδίο είναι ασυνεχές, οπότε υπάρχει επιφανειακό ρεύμα με πυκνότητα $\vec{K}|_{z=0} = K_\varpi|_{z=0}\hat{\varpi} + K_\phi|_{z=0}\hat{\phi}$. Είναι $\vec{B}|_{z=0^+} - \vec{B}|_{z=0^-} = \mu_0\left(K_\varpi|_{z=0}\hat{\varpi} + K_\phi|_{z=0}\hat{\phi}\right)\times\hat{z} \Leftrightarrow \mu_0 a\left(\frac{\varpi}{R} - \frac{\varpi^2}{R^2}\right)\hat{\phi} - 0 = -\mu_0 K_\varpi|_{z=0}\hat{\phi} + \mu_0 K_\phi|_{z=0}\hat{\varpi} \Leftrightarrow \vec{K} = -a\left(\frac{\varpi}{R} - \frac{\varpi^2}{R^2}\right)\hat{\varpi}$ στην βάση του κυλίνδρου $z = 0$, $\varpi < R$ (αντίρροπο του $\hat{\varpi}$).

Όμοια στην επιφάνεια $z = h$ το πεδίο είναι ασυνεχές, οπότε υπάρχει επιφανειακό ρεύμα με πυκνότητα $\vec{K}|_{z=h} = K_\varpi|_{z=h}\hat{\varpi} + K_\phi|_{z=h}\hat{\phi}$. Είναι $\vec{B}|_{z=h^+} - \vec{B}|_{z=h^-} = \mu_0\left(K_\varpi|_{z=h}\hat{\varpi} + K_\phi|_{z=h}\hat{\phi}\right)\times\hat{z} \Leftrightarrow 0 - \mu_0 a\left(\frac{\varpi}{R} - \frac{\varpi^2}{R^2}\right)\hat{\phi} = -\mu_0 K_\varpi|_{z=h}\hat{\phi} + \mu_0 K_\phi|_{z=h}\hat{\varpi} \Leftrightarrow \vec{K} = a\left(\frac{\varpi}{R} - \frac{\varpi^2}{R^2}\right)\hat{\varpi}$ στην βάση του κυλίνδρου $z = h$, $\varpi < R$ (ομόρροπο του $\hat{\varpi}$).

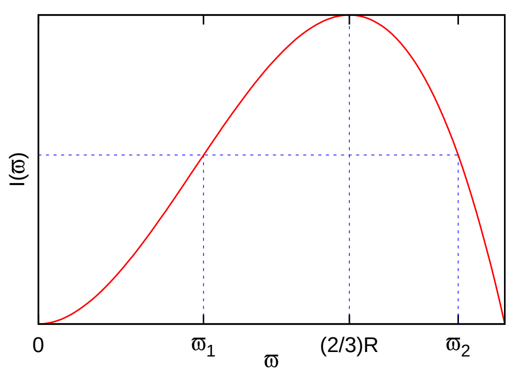
Στην παράπλευρη επιφάνεια $\varpi = R$ το πεδίο είναι συνεχές (μηδέν και μέσα και έξω από τον κύλινδρο)

[1] Μας ενδιαφέρει να βρούμε μια λύση $\vec{A}$ που να ικανοποιεί την $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$ για το δεδομένο $\vec{B}$. Αν θέλουμε όλες τις λύσεις, αυτές προκύπτουν αν αθροίσουμε την κλίση οποιασδήποτε συνάρτησης στην μια λύση που θα βρούμε.

οπότε δεν υπάρχει επιφανειακό ρεύμα.
Οι γραμμές ρεύματος είναι κλειστές και ακολουθούν την εξής πορεία: Κάθε γραμμή ανεβαίνει από το τμήμα της βάσης $z = 0$, $\varpi < \frac{2}{3}R$ προς τη βάση $z = h$ (οι γραμμές είναι πυκνότερες κοντά στον άξονα και αραιότερες προς τα έξω, αφού το J ελαττώνεται όσο το ϖ αυξάνεται και μηδενίζεται για $\varpi = \frac{2}{3}R$). Στη συνέχεια γίνεται ομόρροπη του $\hat{\varpi}$ στην πάνω βάση $z = h$ και κινείται πάνω στη βάση αυτή (αποτελώντας μέρος του επιφανειακού ρεύματος $\vec{K}$) μέχρι να κατέβει σε κάποιο $\varpi \in \left(\frac{2}{3}R, R\right)$. Μετά κινείται πάνω στην κάτω βάση μέχρι την «αφετηρία» της.



Παρότι το $\vec{J}$ αλλάζει φορά, το συνολικό ρεύμα I μεταξύ του άξονα z και κάποιας ακτίνας ϖ είναι θετικό (μηδενίζεται μόνο στον άξονα και στην ακτίνα $\varpi = R$). Αυτά φαίνονται από τη σχέση $I(\varpi) = \frac{1}{\mu_0}\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$ ολοκληρώνοντας πάνω στον κύκλο ακτίνας ϖ γύρω από τον άξονα z, οπότε προκύπτει $I(\varpi) = 2\pi a\varpi\left(\frac{\varpi}{R} - \frac{\varpi^2}{R^2}\right)$.
Οι γραμμές ρεύματος, όπως προκύπτει από την $I = \iint \vec{J}\cdot d\vec{a}$, έχουν εξίσωση $I =$ σταθερό. Επομένως, μια γραμμή που ξεκινά από ένα σημείο της βάσης $z = 0$ και κινείται προς τη βάση $z = h$ πάνω στην ευθεία $\varpi = \varpi_1 < \frac{2}{3}R$, επιστρέφει από την βάση $z = h$ προς τη βάση $z = 0$ πάνω στην ευθεία $\varpi = \varpi_2$ με $I(\varpi_1) = I(\varpi_2)$.



$\boxed{8}$: (α) Τα δέσμια επιφανειακά φορτία είναι $\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{r} = P_0\cos\theta$ στην επιφάνεια της σφαίρας. (Δεν υπάρχουν χωρικά δέσμια φορτία, αφού $\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$.)
Λόγω της περιστροφής τα επιφανειακά φορτία έχουν ταχύτητα $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \omega_0 R\sin\theta\hat{\phi}$, οπότε το αντίστοιχο επιφανειακό ρεύμα είναι $\vec{K} = \sigma_b\vec{v}$, δηλ. $\vec{K} = P_0\omega_0 R\sin\theta\cos\theta\ \hat{\phi}$.
(β) Η εφαπτομενική συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού είναι πάντα συνεχής (όπως προκύπτει με εφαρμογή της $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a}$ σε βρόχο με πλευρές εκατέρωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, αφού η ροή τείνει στο μηδέν όταν η επιφάνεια τείνει στο μηδέν).
Η κάθετη συνιστώσα – η οποία τώρα δεν υπάρχει – είναι συνεχής μόνο όταν ισχύει η συνθήκη Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$.
Άρα $A|_{r=R^+} = A|_{r=R^-} \Leftrightarrow a_2R^2 = \frac{b_2}{R^3}$.
Η κάθετη παράγωγος είναι ασυνεχής, με $\left.\frac{\partial A}{\partial r}\right|_{r=R^+} - \left.\frac{\partial A}{\partial r}\right|_{r=R^-} = -\mu_0 K \Leftrightarrow -3\frac{b_2}{R^4} - 2a_2R = -\mu_0P_0\omega_0R$.
Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την οριακή $\vec{B}|_{r=R^+} - \vec{B}|_{r=R^-} = \mu_0\vec{K}\times\hat{r}$ με $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\left(A_\phi\hat{\phi}\right) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\hat{\theta} = \begin{cases} a_2r(3\cos^2\theta - 1)\hat{r} - 3a_2r\sin\theta\cos\theta\ \hat{\theta}, r < R \\ \frac{b_2}{r^4}(3\cos^2\theta - 1)\hat{r} + \frac{2b_2}{r^4}\sin\theta\cos\theta\ \hat{\theta}, r > R \end{cases}$
η οποία δίνει $a_2R^2 = \frac{b_2}{R^3}$ και $2\frac{b_2}{R^4} + 3a_2R = \mu_0P_0\omega_0R$.
Το σύστημα δίνει $a_2 = \frac{\mu_0P_0\omega_0}{5}$ και $b_2 = \frac{\mu_0P_0\omega_0R^5}{5}$.

$\boxed{9}$: (α) $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\left[A(r,\theta)\hat{\phi}\right] = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A\sin\theta)}{\partial\theta}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA)}{\partial r}\hat{\theta} = 2\lambda r^{a-1}\cos\theta\hat{r} - \lambda(a+1)r^{a-1}\sin\theta\hat{\theta}$.
Για πεδίο $\vec{B} = B_r(r,\theta)\hat{r} + B_\theta(r,\theta)\hat{\theta}$ το ρεύμα είναι $\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$. Η αντικατάσταση δίνει $\vec{J} = -\frac{\lambda}{\mu_0}(a^2 + a - 2)r^{a-2}\sin\theta\hat{\phi}$.
Το ρεύμα αυτό είναι μηδέν αν $a^2 + a - 2 = 0$, δηλ. αν $a = 1$ ή $a = -2$.
(β) Αν $a = 1$ (η μία περίπτωση όπου το ρεύμα μηδενίζεται) το πεδίο είναι $\vec{B} = 2\lambda\left(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}\right)$, δηλ. ομογενές $\vec{B} = 2\lambda\hat{z}$.
Αν $a = -2$ (η άλλη περίπτωση όπου το ρεύμα μηδενίζεται) το πεδίο είναι $\vec{B} = \frac{\lambda}{r^3}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right)$, δηλ.

πεδίο διπόλου διπολικής ροπής $\frac{4\pi\lambda}{\mu_0}\hat{z}$.

(γ) Η κυκλοφορία του $\vec{A}$ είναι ίση με τη μαγνητική ροή, αφού $\oint \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{a} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a} = \Phi$. Η μαγνητική ροή που περνά από το ημισφαίριο $r=1$, $z>0$ είναι ίση με την κυκλοφορία του $\vec{A}$ στο όριο του ημισφαιρίου, δηλ. στον κύκλο $r=1$, $\theta=\pi/2$. Στον κύκλο αυτό το $\vec{A}=\lambda\hat{\phi}$ έχει τη φορά του $d\vec{\ell}$ και σταθερή αλγεβρική τιμή $A=\lambda$, άρα $\Phi=\oint Ad\ell = 2\pi\lambda$.

Η ροή μπορεί να υπολογιστεί και άμεσα, μέσω του ορισμού της $\Phi = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a}$. Με $d\vec{a} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{r}$ και ολοκληρώνοντας στην επιφάνεια του ημισφαιρίου βρίσκουμε $\Phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \left[B_r r^2\right]_{r=1} = 2\lambda\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta\sin\theta\cos\theta = 2\pi\lambda\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\pi\lambda$.

$\boxed{10}$: Η κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου είναι πάντα συνεχής. Αν το ομογενές πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας είναι $\vec{B}_{\text{ομ}}$, εφαρμόζοντας την συνέχεια του B_r στον «πόλο» $\theta=0$ βρίσκουμε ότι η προβολή του $\vec{B}_{\text{ομ}}$ στον άξονα $\hat{z}$ είναι B_0, ενώ εφαρμόζοντας σε σημεία του «ισημερινού» $\theta=\pi/2$ βρίσκουμε ότι δεν έχει προβολή πάνω στον ισημερινό. Άρα $\vec{B}_{\text{ομ}} = B_0\hat{z}$.

Αν το ομογενές πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας είναι $\vec{B}_{\text{ομ}} = B_{\text{ομ},x}\hat{x} + B_{\text{ομ},y}\hat{y} + B_{\text{ομ},z}\hat{z}$ τότε η συνέχεια του B_r σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας δίνει $(B_{\text{ομ},x}\hat{x} + B_{\text{ομ},y}\hat{y} + B_{\text{ομ},z}\hat{z})\cdot\hat{r} = B_0\cos\theta$.

Μπορούμε να βρούμε τα σταθερά $B_{\text{ομ},x}$, $B_{\text{ομ},y}$, $B_{\text{ομ},z}$ εφαρμόζοντας την σχέση αυτή σε συγκεκριμένα σημεία: στον «πόλο» $\theta=0$ βρίσκουμε $B_{\text{ομ},z}=B_0$, ενώ σε σημεία του «ισημερινού» $\theta=\pi/2$ βρίσκουμε $B_{\text{ομ},x} = B_{\text{ομ},y} = 0$.

Εναλλακτικά, με $\vec{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$ η σχέση γράφεται $B_{\text{ομ},x}\sin\theta\cos\phi + B_{\text{ομ},y}\sin\theta\sin\phi + B_{\text{ομ},z}\cos\theta = B_0\cos\theta$ και πρέπει να ισχύει σε κάθε θ και ϕ, οπότε προκύπτουν $B_{\text{ομ},x} = B_{\text{ομ},y} = 0$, $B_{\text{ομ},z} = B_0$.

Χωρικά ρεύματα δεν υπάρχουν στην περιοχή $r<R$ όπου το πεδίο είναι ομογενές ($\mu_0\vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$). Δεν υπάρχουν ούτε στην περιοχή $r>R$ όπου το πεδίο είναι πεδίο διπόλου (αυτό προκύπτει με αντικατάσταση στη σχέση $\mu_0\vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{B}$, αλλά είναι αναμενόμενο και από το κλασικό πρόβλημα του ιδανικού διπόλου όπου τα μόνα ρεύματα που δημιουργούν ένα τέτοιο πεδίο είναι σε ένα στοιχειώδη βρόχο).

Υπάρχει όμως επιφανειακό ρεύμα στην επιφάνεια της σφαίρας $r=R$, το οποίο σχετίζεται με την ασυνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου. Γράφοντας $\vec{K} = K_\theta\hat{\theta} + K_\phi\hat{\phi}$ και το ομογενές πεδίο $\vec{B}_0 = B_0\hat{z} = B_0\left(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}\right)$ προκύπτει $\mu_0\vec{K} = \vec{B}|_{r=R^+} - \vec{B}|_{r=R^-} \Leftrightarrow \mu_0\left(K_\theta\hat{\theta} + K_\phi\hat{\phi}\right)\times\hat{r} = \frac{B_0}{2}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right) - B_0\left(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}\right) \Leftrightarrow -\mu_0K_\theta\hat{\phi} + \mu_0K_\phi\hat{\theta} = \frac{3}{2}B_0\sin\theta\hat{\theta}$, δηλ. $K_\theta = 0$ και $K_\phi = \frac{3B_0}{2\mu_0}\sin\theta$. Άρα $\vec{K} = \frac{3B_0}{2\mu_0}\sin\theta\hat{\phi}$ στην επιφάνεια της σφαίρας.

$\boxed{11}$: (α) $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0K_0}{2}e^{\mp z}\left(\pm\sin x\ \hat{x} + \cos x\ \hat{z}\right)$. Το πεδίο είναι ασυνεχές στο $z=0$.

(β) Το χωρικό ρεύμα είναι $\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$.

Στο επίπεδο $z=0$ όπου το πεδίο είναι ασυνεχές υπάρχει επιφανειακό ρεύμα που δίνεται από $\vec{B}|_{z=0^+} - \vec{B}|_{z=0^-} = \mu_0\vec{K}\times\hat{z} \Leftrightarrow K_0\sin x\ \hat{x} = \vec{K}\times\hat{z}$, άρα $\vec{K} = K\hat{y}$ με $K = K_0\sin x$.

(γ) $\iint\vec{B}\cdot d\vec{a} = \oint\vec{A}\cdot d\vec{\ell} = A(x,z=0)\Delta y = \frac{\mu_0K_0}{2}\sin x\ \Delta y$.

(Το ίδιο προκύπτει άμεσα από $\iint\vec{B}\cdot d\vec{a} = \iint B_x dy\ \ dz = \Delta y\int_0^\infty dz\frac{\mu_0K_0}{2}e^{-z}\sin x = \frac{\mu_0K_0}{2}\sin x\ \Delta y$.)