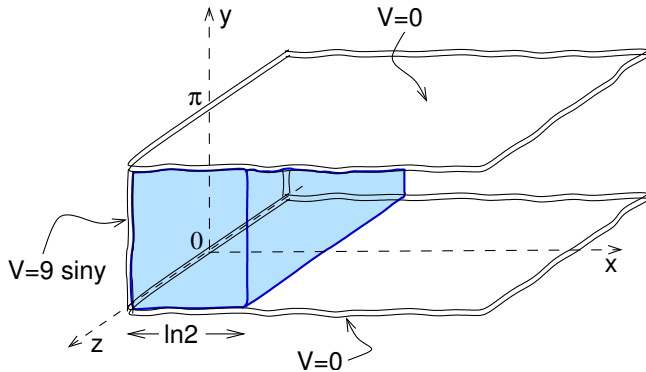


[1]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 18/2/2010:

Δύο ημιάπειρες γειωμένες μεταλλικές πλάκες εκτείνονται παράλληλα στο επίπεδο xz , η μία στη θέση $y = 0$ και η άλλη στη θέση $y = \pi$. Το αριστερό άκρο στο $x = 0$, είναι κλεισμένο με μια άπειρη ταινία που διατηρείται σε δυναμικό $V|_{x=0} = 9 \sin y$. Ο χώρος μεταξύ των πλακών από $x = 0$ μέχρι $x = \ln 2$ είναι γεμάτος με γραμμικό διηλεκτρικό διαπερατότητας $\epsilon = 3\epsilon_0$, ενώ για $x > \ln 2$ είναι κενός.



(α) Δείξτε ότι στους χώρους $\{0 < x < \ln 2, 0 < y < \pi\}$ και $\{\ln 2 < x < \infty, 0 < y < \pi\}$ ισχύει $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ και άρα το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.
(β) Αφού γράψτε όλες τις οριακές συνθήκες δείξτε ότι λύση της Laplace με τη μορφή

$$V(x, y) = \begin{cases} (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) \sin y, & \text{αν } \begin{cases} 0 < x < \ln 2 \\ 0 < y < \pi \end{cases} \\ c_3 e^{-x} \sin y, & \text{αν } \begin{cases} x > \ln 2 \\ 0 < y < \pi \end{cases} \end{cases}$$

τις ικανοποιεί, προσδιορίζοντας ταυτόχρονα τις σταθερές c_1, c_2 και c_3 .

[2]: Πρόβλημα 4.22 από Griffiths:

Ένας κύλινδρος από γραμμικό διηλεκτρικό υλικό, άπειρου μήκους, τοποθετείται σ' ένα αρχικά ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_0$. Βρείτε το πεδίο που δημιουργείται μέσα στον κύλινδρο. (Η ακτίνα του είναι a , η επιδεκτικότητά του χ_e , και ο άξονάς του κάθετος στο $\vec{E}_0$.)

[3]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 5/6/2015:

Διηλεκτρική σφαίρα ακτίνας R και σταθεράς ϵ_1 είναι πλήρως βυθισμένη μέσα σε διηλεκτρικό λάδι σταθεράς $\epsilon_2 \neq \epsilon_1$. Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ εφαρμόζεται σε όλο το σύστημα.

(α) Να βρεθούν τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{D}$ σε όλο το χώρο, θεωρώντας ότι το δυναμικό περιέχει μόνο όρους ανάλογους του $\cos \theta$.

(β) Εάν $\epsilon_1 = 4\epsilon_2$ να σχεδιάσετε τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. Που οφείλεται ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στη σφαίρα είναι μικρότερο του E_0 ;

[4]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 28/2/2011:

Διηλεκτρική σφαίρα ακτίνας R έχει αποκτήσει μια μόνιμη ομοιόμορφη πόλωση $\vec{P}_0 = P_0 \hat{z}$. Η σφαίρα περιβάλλεται από γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό σταθεράς ϵ , μέχρι ακτίνα $R' \gg R$ (πρακτικά $R' = \infty$).

(α) Δείξτε ότι το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace τόσο στο εσωτερικό της σφαίρας, όσο και μέσα στο γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό.

(β) Ποιο το δυναμικό και τα πεδία $\vec{E}, \vec{D}$ σε όλο το χώρο;

Δίνεται η κατάλληλη λύση της εξίσωσης Laplace:

$$V = \begin{cases} c r \cos \theta & \text{αν } r \leq R \\ c R^3 \frac{\cos \theta}{r^2} & \text{αν } r \geq R \end{cases}$$

(γ) Ποια τα φορτία πόλωσης των δυο διηλεκτρικών;

[5]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 20/10/2014:

Στοιχειώδες δίπολο ροπής $\vec{p} = p \hat{z}$ τοποθετείται στο κέντρο σφαίρας ακτίνας R από γραμμικό διηλεκτρικό σταθεράς ϵ .

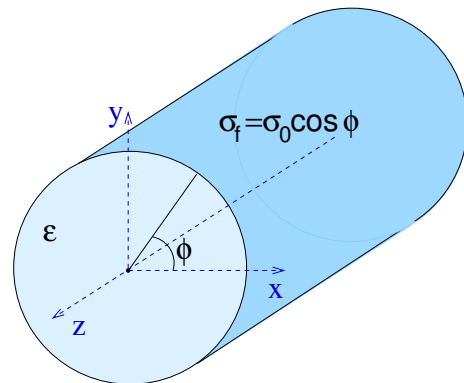
(α) Βρείτε το ηλεκτροστατικό δυναμικό μέσα και έξω από τη σφαίρα.

$$\text{Θεωρήστε } V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} + a_1 r \cos \theta, & r \leq R \\ b_1 \frac{\cos \theta}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

(β) Πως πρέπει να κατανεμηθεί ελεύθερο φορτίο στην επιφάνεια της σφαίρας ώστε το ηλεκτρικό πεδίο εκτός της σφαίρας να μηδενίζεται;

[6]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 5/5/2014:

Συμπαγής κύλινδρος ακτίνας R και απείρου μήκους αποτελείται από ομογενές γραμμικό διηλεκτρικό υλικό διαπερατότητας ϵ . Στην επιφάνεια του κυλίνδρου έχουμε τοποθετήσει κατάλληλα ελεύθερο φορτίο επιφανειακής πυκνότητας $\sigma_f = \sigma_0 \cos \phi$, ενώ για $\varpi > R$ ο χώρος είναι κενός.



(α) Δείξτε ότι το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι $V = \frac{\sigma_0}{\epsilon + \epsilon_0} x$, θεωρώντας $V|_{r=0} = 0$.

(β) Ποιο το ηλεκτρικό πεδίο και η πόλωση για $\varpi < R$;

(γ) Ποια η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου στην επιφάνεια του κυλίνδρου;

[7]: Πρόβλημα 4.25 από Griffiths:

Υποθέστε ότι οι χώροι πάνω και κάτω από το επίπεδο $z = 0$ είναι γεμάτοι από ομογενή γραμμικά διηλεκτρικά υλικά με διαφορετικές διαπερατότητες. Στον πάνω χώρο και σε απόσταση d από το επίπεδο $z = 0$ διατηρείται ακίνητο σημειακό φορτίο q . Ποιο είναι το δυναμικό σε όλο το χώρο;

[8]: Σφαίρα ακτίνας R αποτελείται από γραμμικό διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_r . Σημειακό φορτίο q βρίσκεται σε απόσταση $d > R$ από το κέντρο της σφαίρας.

(α) Ποιο το δυναμικό σε όλο το χώρο;

Υπόδειξη: Είναι $V = V_q + V_{\sigma\phi}$ όπου V_q το δυναμικό του πεδίου που δημιουργεί το φορτίο και $V_{\sigma\phi}$ το δυναμικό του πεδίου που δημιουργούν τα δέσμια φορτία της σφαίρας, τα οποία βρίσκονται μόνο στην επιφάνειά της. Σε σύστημα με αρχή το κέντρο της σφαίρας και άξονα z προς το φορτίο q , τα δυναμικά αυτά γράφονται

$$V_{\sigma\phi} = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & r \leq R \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta), & r \geq R \end{cases}$$

και

$$V_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - d\hat{z}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 - 2rd\cos\theta + d^2}} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos\theta), & r \leq d \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell}(\cos\theta), & r \geq d \end{cases}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \text{ για } |t|, |x| \leq 1.$$

(β) Ποια τα δέσμια φορτία στη σφαίρα;

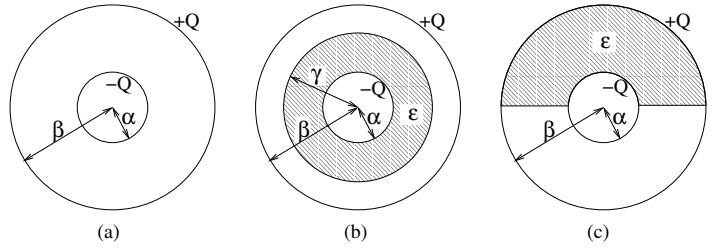
(γ) Ποια η δύναμη μεταξύ φορτίου και σφαίρας;

(δ) Ποια η ενέργεια αλληλεπίδρασης φορτίου και σφαίρας;

(ε) Ποια μορφή παίρνουν τα προηγούμενα αποτελέσματα για $\epsilon_r \rightarrow \infty$;

[9]: Θέμα 3^ο από εξέταση της 23/9/2004:

Έχουμε ένα σφαιρικό πυκνωτή που αποτελείται από ομόκεντρες αγωγίμες σφαίρες οι οποίες είναι φορτισμένες με φορτίο $\pm Q$. Ποια η αποθηκευμένη ενέργεια σε κάθε μια από τις τρεις περιπτώσεις του παρακάτω σχήματος;



Η γραμμοσκιασμένη περιοχή υποδηλώνει γραμμικό διηλεκτρικό. Οι ακτίνες α , β , γ και οι ηλεκτρικές διαπερατότητες του διηλεκτρικού (ϵ) και του κενού (ϵ_0) θεωρούνται γνωστά.

[10]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 1/10/2007:

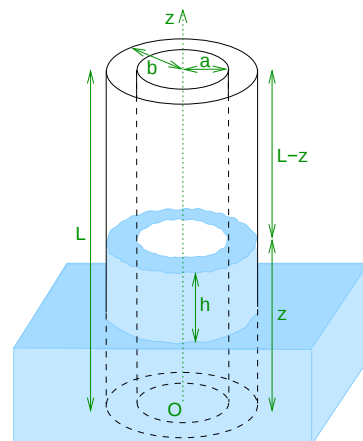
Έχουμε ένα πυκνωτή με παράλληλες πλάκες εμβαδού A που βρίσκονται σε απόσταση d , στον οποίο μπορεί να εισαχθεί διηλεκτρικό με διηλεκτρική σταθερά ϵ .

(α) Βρείτε το λόγο ενέργειας με διηλεκτρικό προς ενέργεια χωρίς διηλεκτρικό όταν το φορτίο $\pm Q$ παραμένει σταθερό πριν και μετά την είσοδο του διηλεκτρικού.

(β) Επαναλάβετε για την περίπτωση που το δυναμικό V μεταξύ των πλακών παραμένει ίδιο πριν και μετά.

(γ) Τι συμπέρασμα βγάζετε από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων στις ερωτήσεις (α) και (β);

[11]: Δύο ομοαξονικοί, αγωγίμοι κύλινδροι ακτίνων a και b σχηματίζουν ένα πυκνωτή «απείρου» μήκους L (με $L \gg b > a$). Συνδέουμε τον πυκνωτή σε μπαταρία τάσης V και κατόπιν τον βυθίζουμε σε ένα διηλεκτρικό υγρό (γραμμικό), όπως στο σχήμα. Αν η στάθμη του υγρού στο χώρο μεταξύ των κυλίνδρων ανυψώνεται κατά h σε σχέση με τη στάθμη έξω από τον πυκνωτή, δείξτε ότι η επιδεκτικότητα του υγρού διηλεκτρικού είναι $\chi_e = \frac{(b^2 - a^2)\rho gh}{\epsilon_0 V^2} \ln \frac{b}{a}$, όπου ρ η πυκνότητα του υγρού και g η επιτάχυνση βαρύτητας.



ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x, y, z)	Κυλινδρικές (ϖ, ϕ, z)	Σφαιρικές (r, θ, ϕ)
		$\begin{cases} x = \varpi \cos \phi \\ y = \varpi \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
$\vec{v}$	$v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$	$v_\varpi \hat{\varpi} + v_\phi \hat{\phi} + v_z \hat{z}$	$v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \varpi} \hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial (\varpi v_\varpi)}{\partial \varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
$\vec{\nabla} \times \vec{v}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{x} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \end{pmatrix} \hat{y} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{z}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi} \\ \frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial (\varpi v_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix} \hat{\varpi} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_\phi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial \varpi} \\ \frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial (\varpi v_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix} \hat{\phi} +$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial (\varpi v_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} \right] \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial \varpi} \end{pmatrix} \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$
$\vec{\nabla}^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial f}{\partial \varpi} \right) + \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$d\vec{l}$	$dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\varpi \hat{\varpi} + \varpi d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
$d\vec{a}$	$dydz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$	$\varpi d\phi dz \hat{\varpi} + d\varpi dz \hat{\phi} + \varpi d\varpi d\phi \hat{z}$	$r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$
$d\tau$	$dx dy dz$	$\varpi d\varpi d\phi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

ΛΥΣΕΙΣ:

$$[1]: (\alpha) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon} \right) \stackrel{\varepsilon = \sigma_{\text{ταθ}}}{=} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}}{\varepsilon} = 0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(a_k \varpi^k + \frac{b_k}{\varpi^k} \right) \cos(k\phi) + \left(c_k \varpi^k + \frac{d_k}{\varpi^k} \right) \sin(k\phi) \right]$$

αφού στους χώρους $\{0 < x < \ln 2, 0 < y < \pi\}$ και $\{\ln 2 < x < \infty, 0 < y < \pi\}$ δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία (στην επιφάνεια $x = \ln 2$ το ε δεν μπορεί να θεωρηθεί σταθερό - αλλάζει απότομα από $3\varepsilon_0$ σε ε_0 - και άρα $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \neq 0$).

Αλλιώς: Στο εσωτερικό γραμμικών και ομογενών διηλεκτρικών η πυκνότητα δέσμιων φορτίων είναι ανάλογη της πυκνότητας των ελεύθερων φορτίων: $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{D} \right) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \rho_f$. Η συνολική πυκνότητα είναι επίσης ανάλογη της πυκνότητας των ελεύθερων φορτίων: $\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \rho_f = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \rho_f$. Αν $\rho_f = 0$, κάτι που ισχύει στους χώρους $\{0 < x < \ln 2, 0 < y < \pi\}$ και $\{\ln 2 < x < \infty, 0 < y < \pi\}$, η συνολική πυκνότητα ρ μηδενίζεται, δηλ. (από νόμο Gauss) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

(β) Οριακές συνθήκες:

- $V|_{y=0} = 0$ ✓
- $V|_{y=\pi} = 0$ ✓
- $V|_{x=0} = 9 \sin y \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 9$ ①
- $V|_{x \rightarrow +\infty} = 0$ ✓
- $V|_{x=\ln 2^-} = V|_{x=\ln 2^+} \Leftrightarrow c_1 e^{\ln 2} + c_2 e^{-\ln 2} = c_3 e^{-\ln 2} \Leftrightarrow 2c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}c_3$ ②
- $D_x|_{x=\ln 2^-} = D_x|_{x=\ln 2^+} \Leftrightarrow -3\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=\ln 2^-} = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=\ln 2^+} \Leftrightarrow -3c_1 e^{\ln 2} + 3c_2 e^{-\ln 2} = c_3 e^{-\ln 2} \Leftrightarrow -6c_1 + \frac{3}{2}c_2 = \frac{1}{2}c_3$ ③
- ①, ②, ③ $\leadsto c_1 = 1, c_2 = 8, c_3 = 12$.

[2]: Ισχύει η εξίσωση Laplace τόσο στο εσωτερικό του κυλίνδρου (όπου $\rho_f = 0$ και αφού $\chi_e = \text{σταθερό}$ είναι και $\rho_b = 0$ και $\rho = 0$), όσο και στο εξωτερικό του (όπου δεν υπάρχουν φορτία). Άρα έχουμε να λύσουμε τη Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες με οριακή σε μεγάλες αποστάσεις από τον κύλινδρο (κάθετα στον άξονά του) το πεδίο να προσεγγίζει το ομογενές πεδίο $\vec{E}_0$, δηλ. $V \approx -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + C$. Επιλέγοντας άξονα z τον άξονα του κυλίνδρου, άξονα x παράλληλο στο πεδίο $\vec{E}_0$ και την αυθαίρετη προσθετική σταθερά του δυναμικού $C = 0$, η τελευταία οριακή γράφεται $V|_{\varpi \gg a} \approx -E_0 \varpi \cos \phi$.

Αυτή είναι η οριακή που «επιλέγει» τη λύση της Laplace, οπότε από τη γενική λύση $V = a_0 + b_0 \ln \varpi +$

πρέπει να διώξουμε τους όρους με $\ln \varpi$ και $\frac{1}{\varpi}$ που απειρίζονται στον άξονα $\varpi = 0$. Επίσης στο εξωτερικό $\varpi \geq a$ πρέπει να διώξουμε τον όρο με $\ln \varpi$ ο οποίος αντιστοιχεί σε δυναμικό γραμμικής πυκνότητας φορτίου, διότι το συνολικό φορτίο του κυλίνδρου είναι μηδέν. Έτσι, υποθέτουμε ότι η λύση έχει τη

$$\text{μορφή } V = \begin{cases} a_0 + a_1 \varpi \cos \phi, & \varpi \leq a \\ A_0 + \left(A_1 \varpi + \frac{B_1}{\varpi} \right) \cos \phi, & \varpi \geq a \end{cases}$$

Σε μεγάλες αποστάσεις από τον κύλινδρο $\varpi \gg a$ πρέπει $V|_{\varpi \gg a} \approx -E_0 r \cos \phi \Leftrightarrow A_0 + A_1 \varpi \cos \phi \approx -E_0 r \cos \phi \Leftrightarrow A_0 = 0$ ① και $A_1 = -E_0$ ②

Οι συνθήκες συνέχειας του δυναμικού και της κάθετης συνιστώσας του $\vec{D}$ στην επιφάνεια του κυλίνδρου δίνουν $V|_{\varpi=a^-} = V|_{\varpi=a^+} \Leftrightarrow a_0 + a_1 a \cos \phi = A_0 + \left(A_1 a + \frac{B_1}{a} \right) \cos \phi \Leftrightarrow a_0 = A_0$ ③, $a_1 = A_1 + \frac{B_1}{a^2}$ ④

και $D_{\varpi}|_{\varpi=a^-} = D_{\varpi}|_{\varpi=a^+} \Leftrightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial V}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=a^-} = \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=a^+} \Leftrightarrow \varepsilon_r a_1 \cos \phi = \left(A_1 - \frac{B_1}{a^2} \right) \cos \phi \Leftrightarrow \varepsilon_r a_1 = A_1 - \frac{B_1}{a^2}$ ⑤ όπου $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$.

Οι σχέσεις ①-⑤ δίνουν τις σταθερές $A_0 = 0$, $A_1 = -E_0$, $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{2}{2 + \chi_e} E_0$, $B_1 = \frac{\chi_e}{2 + \chi_e} E_0 a^2$.

$$\text{Η λύση } V = \begin{cases} -\frac{2}{2 + \chi_e} E_0 \varpi \cos \phi, & \varpi \leq a \\ -E_0 \varpi \cos \phi + \frac{\chi_e}{2 + \chi_e} E_0 a^2 \frac{\cos \phi}{\varpi}, & \varpi \geq a \end{cases}$$

ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες και σύμφωνα με το θεώρημα μοναδικότητας είναι η μοναδική λύση του προβλήματος (σωστά υποθέσαμε δηλ. τη συγκεκριμένη μορφή δυναμικού).

Αφού $\varpi \cos \phi = x$ το πεδίο στο εσωτερικό είναι ομογενές $\vec{E}_{in} = -\vec{\nabla} V = \frac{2}{2 + \chi_e} E_0 \vec{\nabla} x = \frac{2}{2 + \chi_e} \vec{E}_0$.

Το ίδιο προκύπτει και από $\vec{E}_{in} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial \varpi} \hat{\varpi} - \frac{1}{\varpi} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} = \frac{2}{2 + \chi_e} E_0 (\cos \phi \hat{\varpi} - \sin \phi \hat{\phi})$, αφού $\hat{x} = (\hat{x} \cdot \hat{\varpi}) \hat{\varpi} + (\hat{x} \cdot \hat{\phi}) \hat{\phi} = \cos \phi \hat{\varpi} - \sin \phi \hat{\phi}$.

Το πεδίο στο εξωτερικό είναι το άθροισμα του αρχικού πεδίου $\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} (-E_0 \varpi \cos \phi)$ το οποίο αντιστοιχεί στον πρώτο όρο του δυναμικού και του πεδίου $-\vec{\nabla} \left(\frac{\chi_e}{2 + \chi_e} E_0 a^2 \frac{\cos \phi}{\varpi} \right) =$

$\frac{\chi_e}{2 + \chi_e} E_0 \frac{a^2}{\varpi^2} (\cos \phi \hat{\varpi} + \sin \phi \hat{\phi})$ που αντιστοιχεί στο δεύτερο όρο του δυναμικού.

Χρησιμοποιώντας την $\hat{x} = \cos \phi \hat{\varpi} - \sin \phi \hat{\phi}$ το τελευταίο πεδίο μπορεί να γραφεί διανυσματικά

$\frac{\chi_e}{2 + \chi_e} \frac{a^2}{\varpi^2} [2 (\vec{E}_0 \cdot \hat{\varpi}) \hat{\varpi} - \vec{E}_0]$ και άρα

$$\begin{cases} \vec{E}_{in} = \frac{2}{2 + \chi_e} \vec{E}_0 \\ \vec{E}_{out} = \vec{E}_0 + \frac{\chi_e}{2 + \chi_e} \frac{a^2}{\varpi^2} [2 (\vec{E}_0 \cdot \hat{\varpi}) \hat{\varpi} - \vec{E}_0] \end{cases}$$

Η πόλωση στο εσωτερικό του κυλίνδρου προκύπτει ομογενής $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{in} = \frac{2\chi_e}{2 + \chi_e} \epsilon_0 \vec{E}_0$. Δέσμια φορτία υπάρχουν μόνο στην επιφάνεια του κυλίνδρου με $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{\varpi} = P \cos \phi$ και δημιουργούν πεδίο (το πρόβλημα του πολωμένου κυλίνδρου απείρου μήκους με ομογενή πόλωση κάθετη στον άξονά του το έχουμε λύσει, είναι το 4.13 από Griffiths, Τόμος Ι ελληνικής μετάφρασης)

$$\vec{E}_b = \begin{cases} -\frac{\vec{P}}{2\epsilon_0}, \varpi < a \\ \frac{a^2}{2\epsilon_0 \varpi^2} [2 (\vec{P} \cdot \hat{\varpi}) \hat{\varpi} - \vec{P}], \varpi > a \end{cases}$$

Ισχύει $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_b$ τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του κυλίνδρου, όπως μπορεί εύκολα να ελεγχθεί.

Ένας δεύτερος τρόπος λύσης του προβλήματος βασίζεται στον υπολογισμό του πεδίου στο εσωτερικό του κυλίνδρου με μια σειρά από διαδοχικές προσεγγίσεις: Το πεδίο $\vec{E}_0$ δημιουργεί μια ομογενή πόλωση $\vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0$ (πάντα στο εσωτερικό του κυλίνδρου). Η πόλωση αυτή δημιουργεί πεδίο $\vec{E}_1 = -\frac{\vec{P}_0}{2\epsilon_0} = \left(-\frac{\chi_e}{2}\right) \vec{E}_0$. Το νέο αυτό πεδίο δημιουργεί πρόσθετη πόλωση $\vec{P}_1 = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_1$, η οποία δημιουργεί πρόσθετο πεδίο $\vec{E}_2 = -\frac{\vec{P}_1}{2\epsilon_0} = \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^2 \vec{E}_0$, κ.ο.κ. Το τελικό πεδίο γράφεται $\vec{E} = \left[1 + \left(-\frac{\chi_e}{2}\right) + \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^2 + \dots\right] \vec{E}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi_e}{2}\right)^n \vec{E}_0$. Το άθροισμα όρων γεωμετρικής

προόδου $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \lambda^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{N+1} - 1}{\lambda - 1} =$

$\frac{1}{1 - \lambda}$ αν $|\lambda| < 1$, επομένως προκύπτει ότι $\vec{E} =$

$\frac{1}{1 - (-\chi_e/2)} \vec{E}_0 = \frac{2}{2 + \chi_e} \vec{E}_0$ στο εσωτερικό του κυλίνδρου. Σημειώστε ότι ο τρόπος αυτός είναι σωστός μόνο αν $\chi_e < 2$ οπότε το άθροισμα των όρων της γεωμετρικής προόδου με $\lambda = -\chi_e/2$ συγχλίνει.

Αν $\chi_e > 2$ το πεδίο $\vec{E}_1$ έχει μέτρο μεγαλύτερο του $\vec{E}_0$, οπότε δεν μπορεί να θεωρηθεί μικρή διόρθωση. (Γνωρίζοντας το πεδίο στο εσωτερικό μπορούμε να βρούμε την πόλωση, τα δέσμια φορτία και λύνοντας την εξίσωση Laplace να προσδιορίσουμε το πεδίο στο εξωτερικό του κυλίνδρου.)

Ένας τρίτος τρόπος βασίζεται στην αρχή επαλληλίας: Αν $\vec{P}$ είναι η πόλωση που αποκτά ο κύλινδρος το ολικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί επαλληλία του πεδίου από τα φορτία πόλωσης $\vec{E}_b$ και του $\vec{E}_0$. Αφού το πεδίο $\vec{E}_0$ είναι ομογενές, η πόλωση $\vec{P}$ που θα αποκτήσει ο κύλινδρος θα είναι επίσης ομογενής, οπότε το πεδίο που δημιουργεί στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι $\vec{E}_b = -\frac{\vec{P}}{2\epsilon_0}$. Το ολικό πεδίο λοιπόν είναι

$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{2\epsilon_0}$ και αντικαθιστώντας $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ προ-

κύπτει $\vec{E} = \frac{1}{1 + \chi_e/2} \vec{E}_0$. (Το λεπτό σημείο σε αυτή

τη λύση είναι ότι η πόλωση $\vec{P}$ έχει υποτεθεί ομογενής. Αυτό μπορεί να αιτιολογηθεί μέσω των διαδοχικών προσεγγίσεων του προηγούμενου τρόπου. Μια άλλη αιτιολόγηση για την ορθότητα της τελικής λύσης βασίζεται στο θεώρημα μοναδικότητας: Η τελική λύση για τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{D}$ – τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του κυλίνδρου – μπορεί να ελεγχθεί ότι ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες οπότε είναι η μοναδική λύση του προβλήματος.)

[3]: (α) Δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία, άρα η χωρική πυκνότητα δέσμιων φορτίων (η οποία είναι ανάλογη της χωρικής πυκνότητας των ελεύθερων για γραμμικά, ομογενή υλικά) είναι μηδενική και άρα το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Κρατώντας μόνο όρους με $\cos \theta$ η κατάλληλη λύση είναι

$V = \begin{cases} a_1 r \cos \theta, r \leq R \\ \frac{b_1}{r^2} \cos \theta - E_0 r \cos \theta, r \geq R \end{cases}$

(ο τελευταίος όρος της λύσης για $r \geq R$ αντιστοιχεί στο ομογενές πεδίο $\vec{E}_0$).

Συνέχεια δυναμικού για $r = R$: $a_1 R = \frac{b_1}{R^2} - E_0 R$.

Συνέχεια της κάθετης συνιστώσας του $\vec{D}$, δηλ. της $D_r = \epsilon E_r = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial r}$: $-\epsilon_1 a_1 = \epsilon_2 \left(\frac{2b_1}{R^3} + E_0\right)$.

Η λύση του συστήματος δίνει $a_1 = -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0$,

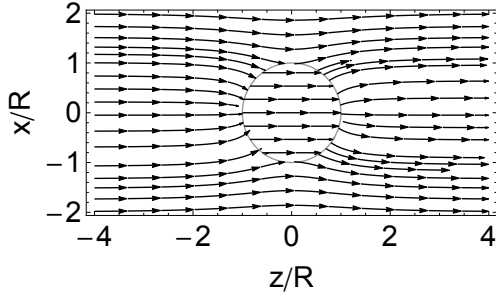
$b_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 R^3$.

Τα πεδία βρίσκονται από $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$.

$$(\beta) \text{ Αν } \varepsilon_1 = 4\varepsilon_2, V = \begin{cases} -\frac{E_0}{2}z, r \leq R \\ \frac{E_0 R^3 \cos \theta}{2r^2} - E_0 z, r \geq R \end{cases}$$

$$\text{και } \vec{E} = \begin{cases} \frac{\vec{E}_0}{2}, r < R \\ \frac{\vec{E}_0 R^3}{2r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) + \vec{E}_0, r > R \end{cases}$$

Στο εσωτερικό της σφαίρας το πεδίο είναι ομογενές και ίσο με το μισό του $\vec{E}_0$, ενώ στο εξωτερικό είναι επαλληλία του $\vec{E}_0$ και πεδίου διπόλου με διπολική ροπή ομόρροπη του $\vec{E}_0$, δηλ. ενισχύεται κοντά στον άξονα και μειώνεται στον «ισημερινό».



Τα δέσμια φορτία στην επιφάνεια της σφαίρας έχουν επιφανειακή πυκνότητα $\sigma_{b1} = \vec{P}|_{r=R^-} \cdot \hat{r} = P_r|_{r=R^-} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} D_r|_{r=R} = \frac{3\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos \theta$, δηλ. θετική στα θετικά z και αρνητική στα αρνητικά z αν $E_0 > 0$. Αυτά τα φορτία δημιουργούν στο εσωτερικό της σφαίρας πεδίο αντίρροπο του $\vec{E}_0$. Στην επιφάνεια του λαδιού $r = R$ τα δέσμια φορτία έχουν επιφανειακή πυκνότητα $\sigma_{b2} = \vec{P}|_{r=R^+} \cdot (-\hat{r}) = -P_r|_{r=R^+} = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2} D_r|_{r=R} = -\frac{3\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos \theta$, δηλ. αντίθετου πρόσημου από την σ_{b1} . Αυτά τα φορτία δημιουργούν στο εσωτερικό της σφαίρας πεδίο ομόρροπο του $\vec{E}_0$. Αν $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ το υλικό της σφαίρας πολώνεται περισσότερο από το λάδι και άρα κυριαρχεί η επίδραση της σ_{b1} η οποία μειώνει το πεδίο μέσα στη σφαίρα. (Είναι $\sigma_{b1} + \sigma_{b2} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos \theta$.)

[4]: (α) Μέσα στη σφαίρα $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$ οπότε ισχύει η εξίσωση Laplace.

Μέσα στο γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{D} \right) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \rho_f = 0$ οπότε ισχύει η εξίσωση Laplace.

$$(\beta) V = \begin{cases} c r \cos \theta & \text{αν } r \leq R \\ c R^3 \frac{\cos \theta}{r^2} & \text{αν } r \geq R \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \begin{cases} -c (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) & \text{αν } r < R \\ c \frac{R^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) & \text{αν } r > R \end{cases}$$

Για να βρούμε το πεδίο $\vec{D}$ εφαρμόζουμε την $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ μέσα στη σφαίρα, με $\vec{P} = P_0 \hat{z} =$

$P_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$ και $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ μέσα στο γραμμικό διηλεκτρικό. Έτσι έχουμε

$$\vec{D} = \begin{cases} (P_0 - \varepsilon_0 c) (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) & \text{αν } r < R \\ \varepsilon c \frac{R^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) & \text{αν } r > R \end{cases}$$

Το δυναμικό, όπως δίνεται, είναι συνεχές στην επιφάνεια $r = R$. Η συνέχεια της D_r στην επιφάνεια $r = R$ (ισχύει αφού δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία)

$$\text{δίνει } P_0 - \varepsilon_0 c = 2\varepsilon c \Leftrightarrow c = \frac{P_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0}.$$

(γ) Στην επιφάνεια της σφαίρας ($r = R^-$) υπάρχει επιφανειακό δέσμιο φορτίο $\sigma_1 = \vec{P}_0 \cdot \hat{r} = P_0 \cos \theta$.

Υπάρχει επίσης δέσμιο φορτίο στην επιφάνεια του γραμμικού διηλεκτρικού ($r = R^+$) ίση με $\sigma_2 = \vec{P}|_{r=R^+} \cdot (-\hat{r}) = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}|_{r=R^+} \cdot (-\hat{r}) = -2c(\varepsilon - \varepsilon_0) \cos \theta = -2P_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \cos \theta$. (Το συνολικό δέσμιο

φορτίο στην επιφάνεια $r = R$ είναι $P_0 \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \cos \theta$.)

[5]: (α) Αν μέσα σε γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό υπάρχουν ελεύθερα φορτία τότε επάγονται δέσμια με $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{D} \right) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \rho_f$.

Αυτό ισχύει και για τα φορτία του ελεύθερου διπόλου $\vec{p}$, επομένως επάγεται αντίθετο δίπολο από δέσμια φορτία με διπολική ροπή $\vec{p}_b = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{p}$. Η συνολική διπολική ροπή στο κέντρο είναι $\vec{p}_{\text{ολ}} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{p}$ και

$$\text{δημιουργεί δυναμικό } V_{\text{διπόλου}} = \frac{p_{\text{ολ}} \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

Η μορφή δυναμικού που δίνεται ικανοποιεί την οριακή συνθήκη $V \approx V_{\text{διπόλου}}$ για $r \ll R$.

Η συνέχεια του δυναμικού και της συνιστώσας D_r της ηλεκτρικής μετατόπισης δίνουν $V|_{r=R^-} =$

$$V|_{r=R^+} \Leftrightarrow \frac{p}{4\pi\varepsilon R^2} + a_1 R = \frac{b_1}{R^2} \text{ και } -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R^-} =$$

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R^+} \Leftrightarrow \frac{2p}{4\pi R^3} - \varepsilon a_1 = \frac{2\varepsilon_0 b_1}{R^3}.$$

$$\text{Το σύστημα δίνει } a_1 = \frac{p(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\pi R^3 \varepsilon(\varepsilon + 2\varepsilon_0)} \text{ και } b_1 = \frac{3p}{4\pi(\varepsilon + 2\varepsilon_0)}.$$

(β) Το δυναμικό έξω από τη σφαίρα είναι μηδέν (χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε μηδενικό δυναμικό στο άπειρο), ενώ μέσα στη σφαίρα είναι

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\varepsilon r^2} + \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \text{ (ο πρώτος όρος είναι}$$

το δυναμικό του συνολικού διπόλου $\vec{p}_{\text{ολ}}$ στο $r = 0$). Η συνέχεια του δυναμικού στην επιφάνεια $r = R$ δίνει

$$a_{\ell} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon R^3} \delta_{\ell 1}. \text{ Άρα } V = \frac{p}{4\pi\varepsilon R^2} \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{r}{R} \right) \cos \theta$$

μέσα στη σφαίρα και $V = 0$ απέξω.

Το ελεύθερο επιφανειακό φορτίο στην ακτίνα $r = R$ βρίσκεται από την οριακή συνθήκη $\sigma_f = D_r|_{r=R^+} -$

$$D_r|_{r=R^-} = 0 + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R^-} = -\frac{3p}{4\pi R^3} \cos \theta.$$

[6]: (α) Λόγω της δοσμένης μορφής της σ_f υποθέτουμε ότι από τη γενική λύση της Laplace (η οποία ισχύει στο εξωτερικό, αλλά και στο εσωτερικό του κυλίνδρου αφού δεν υπάρχουν χωρικά ελεύθερα φορτία και στα γραμμικά ομογενή διηλεκτρικά είναι $\rho_b \propto \rho_f$) μένουν μόνο οι όροι με $\cos \phi$, δηλ.

$$V = \begin{cases} a_1 \varpi \cos \phi & \text{αν } \varpi \leq R \\ \frac{b_1}{\varpi} \cos \phi & \text{αν } \varpi \geq R \end{cases}$$

Η συνέχεια του δυναμικού στην $\varpi = R$ δίνει $b_1 = a_1 R^2$, ενώ η οριακή $\sigma_f = D_{\varpi}|_{\varpi=R^+} - D_{\varpi}|_{\varpi=R^-} = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=R^+} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=R^-}$ δίνει $\sigma_0 = \varepsilon_0 \frac{b_1}{R^2} + \varepsilon a_1$. Η

λύση του συστήματος είναι $a_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}$, $b_1 = \frac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon + \varepsilon_0}$.

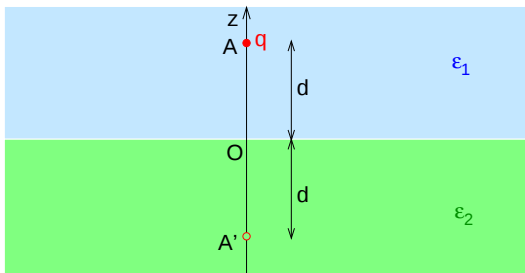
$$\text{Άρα } V = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \varpi \cos \phi & \text{αν } \varpi \leq R \\ \frac{\sigma_0 R^2}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{\cos \phi}{\varpi} & \text{αν } \varpi \geq R \end{cases}$$

(β) Στο εσωτερικό, αντικαθιστώντας $\varpi \cos \phi = x$, προκύπτει $V = \frac{\sigma_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} x$, δηλ. ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \hat{x}$.

Η πόλωση είναι $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = -\sigma_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \hat{x}$.

(γ) Η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου στην επιφάνεια του κυλίνδρου είναι $\sigma_b = \vec{P}|_{\varpi=R^-} \cdot \hat{\varpi} = -\sigma_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \hat{x} \cdot \hat{\varpi} = -\sigma_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \cos \phi$.

[7]: Έστω τα δύο γραμμικά και ομογενή διηλεκτρικά των ημιχώρων $z > 0$ και $z < 0$ έχουν ηλεκτρικές διαπερατότητες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα, όπως στο σχήμα.



Το πρόβλημα ανάγεται στη λύση των εξισώσεων $\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_2 \vec{E}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}^2 V = 0$ για $z < 0$ και $\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_1 \vec{E}) = \rho_f \Leftrightarrow \vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho_f}{\varepsilon_1}$ για $z > 0$, με $\rho_f = q\delta(x)\delta(y)\delta(z-d)$ την πυκνότητα του σημειακού φορτίου q . Γράφοντας την τελευταία εξίσωση Poisson σαν $\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ με $\rho = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} q\delta(x)\delta(y)\delta(z-d)$, φαίνεται ότι το συνολικό φορτίο στον ημιχώρο $z > 0$ είναι ένα σημειακό φορτίο $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} q$ στη θέση A (που

αποτελείται από το άθροισμα του ελεύθερου φορτίου στη θέση A με το δέσμιο σημειακό φορτίο στη ίδια θέση). Έχουμε λοιπόν να λύσουμε την εξίσωση Laplace στους δύο χώρους $z < 0$ και $z > 0$ εκτός του σημείου A, με οριακές συνθήκες

❶ στην επιφάνεια $z = 0$: $V|_{z=0^+} = V|_{z=0^-}$

❷ στην επιφάνεια $z = 0$: $D_z|_{z=0^+} = D_z|_{z=0^-} \Leftrightarrow$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = \varepsilon_2 \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0^-}$$

❸ κοντά στο σημείο A: $V \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_1|\vec{r}-d\hat{z}|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{\varpi^2 + (z-d)^2}}$.

Δοκιμάζοντας να λύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο ειδώλων, για να περιγράψουμε το πεδίο στον ημιχώρο $z > 0$ τοποθετούμε ένα εικονικό φορτίο στη θέση A', δηλ. στο κατοπτρικό σημείο του A ως προς το επίπεδο $z = 0$, στη θέση ($\varpi = 0, z = -d$). (Το πεδίο αυτού του εικονικού φορτίου αντικαθιστά το πεδίο από τα δέσμια φορτία στην επιφάνεια $z = 0$.) Έτσι σε κάθε σημείο με θέση $\vec{r} = \varpi\hat{\varpi} + z\hat{z}$ με $z > 0$ γράφουμε το δυναμικό σαν

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1|\vec{r}-d\hat{z}|} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}+d\hat{z}|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{\varpi^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\varpi^2 + (z+d)^2}}.$$

Όμοια, για να περιγράψουμε το πεδίο στον ημιχώρο $z < 0$ τοποθετούμε ένα εικονικό φορτίο στη θέση A. Έτσι σε κάθε σημείο με θέση $\vec{r} = \varpi\hat{\varpi} + z\hat{z}$ με $z < 0$ γράφουμε το δυναμικό σαν

$$V = \frac{q/\varepsilon_1 + q''/\varepsilon_0}{4\pi|\vec{r}-d\hat{z}|} = \frac{q/\varepsilon_1 + q''/\varepsilon_0}{4\pi\sqrt{\varpi^2 + (z-d)^2}}.$$

Προσπαθούμε λοιπόν να ικανοποιήσουμε όλες τις οριακές συνθήκες με δυναμικό της μορφής $V =$

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{q/\varepsilon_1}{\sqrt{\varpi^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'/\varepsilon_0}{\sqrt{\varpi^2 + (z+d)^2}} \right], & z > 0 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{q/\varepsilon_1 + q''/\varepsilon_0}{\sqrt{\varpi^2 + (z-d)^2}}, & z < 0 \end{cases}$$

Η οριακή ❸ ικανοποιείται.

Η απαίτηση να ικανοποιείται η οριακή ❶ δίνει

$$q'' = q' \quad \text{❶}$$

Για να ικανοποιείται η οριακή ❷ πρέπει

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{q'\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varpi^2 + (z+d)^2}} - \frac{q''\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} + q\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varpi^2 + (z-d)^2}} \right] \Big|_{z=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow q'\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + q''\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} + q\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} = 0 \quad \text{❷}$$

Οι ❶ και ❷ έχουν λύση $q'' = q' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$, επομένως η μέθοδος ειδώλων ήταν επιτυχής και η λύση του προβλήματος είναι

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} q}{\sqrt{\varpi^2 + (z-d)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q}{\sqrt{\varpi^2 + (|z|+d)^2}}.$$

Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο πεδίο από το φορτίο στη θέση Α (το ελεύθερο μαζί με το δέσμιο στη θέση αυτή), ενώ ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στο πεδίο που δημιουργούν τα δέσμια φορτία του επιπέδου $z = 0$.

Αν $\epsilon_1 = \epsilon_0$ (κενό) και $\epsilon_2 \gg \epsilon_0$ (αγωγός) έχουμε το πρόβλημα φορτίου q σε απόσταση d από γειωμένο αγωγίμο επίπεδο. Βρίσκουμε ξανά το αναμενόμενο $q' = -q$ και $V = 0$ για $z \leq 0$.

Η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου στην επιφάνεια του διηλεκτρικού διαπερατότητας ϵ_2 είναι $\sigma_b|_{z=0^-} = \vec{P}|_{z=0^-} \cdot \hat{z} = -(\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0^-} =$

$$-\frac{qd}{2\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{(\varpi^2 + d^2)^{3/2}} \text{ και το ολικό φορτίο σε αυτή την επιφάνεια είναι } q_b|_{z=0^-} = \iint \sigma_b|_{z=0^-} da = -\frac{qd}{2\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \int_0^\infty \frac{2\pi\varpi d\varpi}{(\varpi^2 + d^2)^{3/2}} = -q \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2}.$$

Όμοια στην επιφάνεια $z = 0^+$ του διηλεκτρικού διαπερατότητας ϵ_1 βρίσκουμε $\sigma_b|_{z=0^+} = \vec{P}|_{z=0^+} \cdot (-\hat{z}) = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = \frac{qd}{2\pi} \frac{\epsilon_2 \epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 \epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{(\varpi^2 + d^2)^{3/2}}$

και το ολικό φορτίο σε αυτή την επιφάνεια είναι $q_b|_{z=0^+} = \iint \sigma_b|_{z=0^+} da = q \frac{\epsilon_2 \epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 \epsilon_1 + \epsilon_2}.$

Το συνολικό δέσμιο επιφανειακό φορτίο έχει πυκνότητα $\sigma_b|_{z=0} = \sigma_b|_{z=0^-} + \sigma_b|_{z=0^+} = \frac{qd}{2\pi} \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{(\varpi^2 + d^2)^{3/2}}$ και $q_b|_{z=0} = q_b|_{z=0^-} + q_b|_{z=0^+} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_1 + \epsilon_2} q$, ίσο με το φορτίο των ειδώλων $q' = q''$ όπως αναμενόταν.

Ένας δεύτερος τρόπος λύσης ακολουθεί: Έστω σ_b η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου σε σημείο της επιφάνειας $z = 0$. Η $\hat{z}$ συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου σε σημεία $z \approx 0$ οφείλεται αφενός στην επιφανειακή πυκνότητα σ_b και αφετέρου στο φορτίο $\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} q$ που βρίσκεται στη θέση Α. Το

πρώτο μέρος είναι $\frac{\sigma_b}{2\epsilon_0}$ για $z = 0^+$ και $-\frac{\sigma_b}{2\epsilon_0}$ για $z = 0^-$, ενώ το δεύτερο είναι $\frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{\vec{r} - d\hat{z}}{|\vec{r} - d\hat{z}|^3} \Big|_{z=0} \cdot \hat{z} = -\frac{qd}{4\pi\epsilon_1 (\varpi^2 + d^2)^{3/2}}.$ Άρα $E_z|_{z=0^\pm} = \pm \frac{\sigma_b}{2\epsilon_0} - \frac{qd}{4\pi\epsilon_1 (\varpi^2 + d^2)^{3/2}}$ και η αντικατάσταση στην οριακή

$$D_z|_{z=0^+} = D_z|_{z=0^-} \Leftrightarrow \epsilon_1 E_z|_{z=0^+} = \epsilon_2 E_z|_{z=0^-} \text{ δίνει } \sigma_b = \frac{qd}{2\pi} \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{(\varpi^2 + d^2)^{3/2}}.$$

(Το ίδιο προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τα πεδία στην $\sigma_b = \vec{P}|_{z=0^-} \cdot \hat{z} + \vec{P}|_{z=0^+} \cdot (-\hat{z}) = (\epsilon_2 - \epsilon_0) E_z|_{z=0^-} - (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_z|_{z=0^+}.$)

Το δυναμικό που δημιουργεί αυτό το επιφανειακό φορτίο σε σημείο $\vec{r} = \varpi\hat{\varpi} + z\hat{z}$ είναι $V_{\sigma_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma_b(\vec{r}') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma_b(\vec{r}') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$ όπου $\vec{r}' = \varpi'\hat{\varpi}', |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\varpi^2 + z^2 + \varpi'^2 - 2\varpi\varpi' \cos\phi'}, da' = \varpi' d\varpi' d\phi'.$ Άρα $V_{\sigma_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_1 + \epsilon_2} q \times$

$$\frac{d}{2\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{\varpi'=0}^{\infty} \frac{(\varpi'^2 + d^2)^{-3/2} \varpi' d\varpi' d\phi'}{\sqrt{\varpi^2 + z^2 + \varpi'^2 - 2\varpi\varpi' \cos\phi'}}.$$

Παρότι δεν είναι εύκολο, μπορεί να αποδειχθεί ότι το δυναμικό αυτό ισούται με $V_{\sigma_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_1 + \epsilon_2} q \frac{1}{\sqrt{\varpi^2 + (|z|+d)^2}}$ οπότε το συνολικό δυναμικό είναι $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} q}{\sqrt{\varpi^2 + (z-d)^2}} +$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_1 + \epsilon_2} q}{\sqrt{\varpi^2 + (|z|+d)^2}}.$$

[8]: (α) Το δυναμικό έχει τη μορφή $V = V_q + V_{\sigma\phi} =$

$$\begin{cases} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^{\ell+1}} \right) r^\ell P_\ell(\cos\theta), & r \leq R \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^{\ell+1}} r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta), & R \leq r \leq d \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(B_\ell + \frac{qd^\ell}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta), & r \geq d \end{cases}$$

Η συνέχεια του δυναμικού V και της D_r στην επιφάνεια της σφαίρας θα προσδιορίσουν τις σταθερές A_ℓ και B_ℓ (στην επιφάνεια $r = d$ ικανοποιούνται ήδη οι οριακές συνθήκες). Είναι $V|_{r=R^-} = V|_{r=R^+} \Leftrightarrow B_\ell = A_\ell R^{2\ell+1}$ και $D_r|_{r=R^-} = D_r|_{r=R^+} \Leftrightarrow$

$$\epsilon_r \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R^-} = \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R^+} \Leftrightarrow \epsilon_r \left(A_\ell + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^{\ell+1}} \right) \ell = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^{\ell+1}} \ell - (\ell+1) \frac{B_\ell}{R^{2\ell+1}}.$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει $A_\ell = -\frac{q\ell(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_0 d^{\ell+1}(\ell+1+\ell\epsilon_r)},$

$$B_\ell = -\frac{q\ell R^{2\ell+1}(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_0 d^{\ell+1}(\ell+1+\ell\epsilon_r)} \text{ για κάθε } \ell, \text{ οπότε}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos\theta) \times \begin{cases} \frac{2\ell+1}{\ell+1+\ell\epsilon_r} \left(\frac{r}{d} \right)^\ell, & r \leq R \\ \left[\left(\frac{r}{d} \right)^\ell - \left(\frac{R}{d} \right)^\ell \frac{\ell(\epsilon_r - 1)}{\ell+1+\ell\epsilon_r} \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell+1} \right], & R \leq r \leq d \\ \left[1 - \left(\frac{R}{d} \right)^{2\ell+1} \frac{\ell(\epsilon_r - 1)}{\ell+1+\ell\epsilon_r} \right] \left(\frac{d}{r} \right)^{\ell+1}, & r \geq d \end{cases}$$

$$(\beta) \quad \sigma_b|_{r=R} = P_r = -\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R^-} =$$

$$-(\varepsilon_r - 1) \frac{q}{4\pi R^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)\ell}{\ell+1+\ell\varepsilon_r} \left(\frac{R}{d}\right)^{\ell+1} P_{\ell}(\cos\theta).$$

(γ) Η δύναμη που ασκούν τα δέσμια φορτία στο φορτίο q είναι $\vec{F}_q = q \vec{E}_{\sigma\phi}|_{r=d,\theta=0}$, όπου το πεδίο $\vec{E}_{\sigma\phi}$ στη θέση του φορτίου είναι στη διεύθυνση $\hat{z}$ λόγω συμμετρίας και ίση με $\vec{E}_{\sigma\phi}|_{r=d,\theta=0} = -\frac{\partial V_{\sigma\phi}}{\partial r} \Big|_{r=d,\theta=0} \hat{z} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+1)B_{\ell}}{d^{\ell+2}} P_{\ell}(1) \hat{z}$. Αντικαθι-

$$\sigma\tau\acute{o}\nu\tau\alpha\varsigma \text{ το } B_{\ell} \text{ και } P_{\ell}(1) = 1 \text{ προκύπτει ελκτική δύναμη } \vec{F}_q = -\frac{q^2(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^{2\ell+1} \frac{\ell(\ell+1)}{\ell+1+\ell\varepsilon_r} \hat{z}.$$

Η δύναμη που ασκεί το φορτίο στη σφαίρα είναι αντίθετη της $\vec{F}_q$ (ελκτική, ίσου μέτρου).

(δ) Ένας τρόπος να βρούμε την ενέργεια αλληλεπίδρασης του συστήματος είναι να υπολογίσουμε πόση ενέργεια ξοδεύουμε σε μια ιδεατή μεταφορά του φορτίου q από το ∞ στην τωρινή του θέση. Η δύναμη που ασκούμε είναι αντίθετη της δύναμης που ασκεί η σφαίρα στο φορτίο, $\vec{F}_{\text{εμείς}} = -\vec{F}_{\sigma\phi}$, οπότε το έργο της $\vec{F}_{\text{εμείς}}$ (που γίνεται ενέργεια του συστήματος) είναι $W_{\text{int}} = -\int_{d=\infty}^d \vec{F}_{\sigma\phi} \cdot d\vec{r} = \int_{d=\infty}^d \frac{q^2(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^{2\ell+1} \frac{\ell(\ell+1)}{\ell+1+\ell\varepsilon_r} dd =$

$$\frac{q^2(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} R^{2\ell+1} \int_{d=\infty}^d d^{-2\ell-3} dd \frac{\ell(\ell+1)}{\ell+1+\ell\varepsilon_r} \Leftrightarrow$$

$$W_{\text{int}} = -\frac{q^2(\varepsilon_r - 1)}{8\pi\varepsilon_0 d} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell}{\ell+1+\ell\varepsilon_r} \left(\frac{R}{d}\right)^{2\ell+1}.$$

$$(\text{Ισχύει } \vec{F} = -\frac{dW_{\text{int}}}{dd} \hat{z}).$$

Ένας δεύτερος τρόπος υπολογισμού της ενέργειας βασίζεται στην $W = \iiint \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} d\tau$. Μπορούμε να αποφύγουμε το ολοκλήρωμα όγκου αν γράψουμε $\vec{D} \cdot \vec{E} = -\vec{D} \cdot \vec{\nabla} V = -\vec{\nabla} \cdot (V\vec{D}) + \underbrace{V \vec{\nabla} \cdot \vec{D}}_{\rho_f}$,

$$\text{οπότε } W = -\frac{1}{2} \iiint \vec{\nabla} \cdot (V\vec{D}) d\tau + \frac{1}{2} \iiint V \rho_f d\tau.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε επιεπιφάνειο και μηδενίζεται, ενώ το δεύτερο μπορεί να χωριστεί σε $W = \frac{1}{2} \iiint V_q \rho_f d\tau + \frac{1}{2} \iiint V_{\sigma\phi} \rho_f d\tau$. Ο

όρος $\frac{1}{2} \iiint V_q \rho_f d\tau$ αντιστοιχεί στην ιδιοενέργεια του ελεύθερου φορτίου και είχε αγνοηθεί στον προηγούμενο τρόπο υπολογισμού της ενέργειας κατανομής όπου είχαμε θεωρήσει ότι το φορτίο q ήταν ήδη σχηματισμένο και απλά το μεταφέραμε από το ∞ σε απόσταση d από τη σφαίρα. (Για σημειακό φορτίο ο όρος αυτός απειρίζεται, κάτι βέβαια που δεν ισχύει αν

λάβουμε υπόψη τις - οσοδήποτε μικρές - διαστάσεις του q .)

Η ενέργεια αλληλεπίδρασης αντιστοιχεί στον όρο $W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \iiint V_{\sigma\phi} \rho_f d\tau = \frac{1}{2} q V_{\sigma\phi}|_{r=d,\theta=0} = \frac{1}{2} q \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{d^{\ell+1}} P_{\ell}(1)$. Αντικαθιστώντας τα B_{ℓ} και $P_{\ell}(1) = 1$ βρίσκουμε όπως και πριν

$$W_{\text{int}} = -\frac{q^2(\varepsilon_r - 1)}{8\pi\varepsilon_0 d} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell}{\ell+1+\ell\varepsilon_r} \left(\frac{R}{d}\right)^{2\ell+1}.$$

(ε) Για $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ η σφαίρα συμπεριφέρεται σαν αγωγός και τα φορτία που επάγονται στην επιφάνειά της εξουδετερώνουν πλήρως το πεδίο του q στο εσωτερικό της. Πράγματι, για $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ η απάντηση του (α) ερωτήματος γίνεται $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} \times$

$$\begin{cases} 0, & r \leq R \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{d}\right)^{\ell} - \frac{R}{r} \left(\frac{R^2}{rd}\right)^{\ell} \right] P_{\ell}(\cos\theta), & R \leq r \leq d \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\frac{d}{r} \left(\frac{d}{r}\right)^{\ell} - \frac{R}{r} \left(\frac{R^2}{rd}\right)^{\ell} \right] P_{\ell}(\cos\theta), & r \geq d \end{cases}$$

Αφού η σφαίρα έχει σταθερό δυναμικό $V = 0$ το πρόβλημα είναι όμοιο με αυτό που λύσαμε σαν παράδειγμα της μεθόδου ειδώλων, όπου ένα φορτίο βρίσκεται στο εξωτερικό αγωγικής γειωμένης σφαίρας (παράδειγμα 2 του κεφ. 3, σελ. 161-163 και πρόβλημα 3.6 από Griffiths, Τόμος Ι ελληνικής μετάφρασης).

Χρησιμοποιώντας την $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ για $|t|, |x| \leq 1$ μπορούμε να γράψουμε τη λύση σε κλειστή μορφή. Στην περιοχή $R \leq r \leq d$ είναι

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} \left[\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r}{d}\cos\theta + \left(\frac{r}{d}\right)^2}} - \frac{R}{r} \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{R^2}{rd}\cos\theta + \left(\frac{R^2}{rd}\right)^2}} \right] =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{d^2 - 2rd\cos\theta + r^2}} + \frac{(-qR/d)}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2 - 2\frac{rR^2}{d}\cos\theta + \left(\frac{R^2}{d}\right)^2}} \Leftrightarrow$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - d\hat{z}|} + \frac{(-qR/d)}{4\pi\varepsilon_0 \left| \vec{r} - \frac{R^2}{d}\hat{z} \right|}.$$

Όμοια στην περιοχή $r \geq d$ βρίσκουμε ακριβώς την ίδια κλειστή μορφή. Η μορφή αυτή είναι επαλληλία δυναμικών από δυο σημειακά φορτία, το ένα είναι το q στη θέση $d\hat{z}$

και το δεύτερο είναι το είδωλο $-qR/d$ στο εσωτερικό της αγωγίμης σφαίρας, στη θέση $(R^2/d)\hat{z}$.

Στο όριο $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου επίσης γράφεται σε κλειστή μορφή

$$\sigma_b|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R d} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left(\frac{R}{d}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) = -\frac{q}{4\pi R (d^2 - 2Rd \cos\theta + R^2)^{3/2}}, \text{ λόγω της ταυτότητας } \frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(x) t^n \text{ (ή χρησιμοποιώντας την } \sigma = \varepsilon_0 \vec{E}_r|_{r=R+} \text{ και υπολογίζοντας το πεδίο από την κλειστή μορφή του δυναμικού).}$$

Στο όριο $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ η δύναμη $\vec{F}_q = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \left(\frac{R}{d}\right)^{2\ell+1} \hat{z}$. Με $x = \frac{R^2}{d^2}$

$$\text{είναι } \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) x^{\ell+1/2} = x^{1/2} \frac{d}{dx} \sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell+1} = x^{1/2} \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x^{1/2}}{(1-x)^2}, \text{ οπότε}$$

$$\text{σε κλειστή μορφή } \vec{F}_q = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \frac{R/d}{(1-R^2/d^2)^2} \hat{z}.$$

Τέλος η ενέργεια αλληλεπίδρασης στο όριο

$$\varepsilon_r \rightarrow \infty \text{ είναι } W_{\text{int}} = -\frac{q^2 R}{8\pi\varepsilon_0 d^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{d^2}\right)^{\ell} = -\frac{q^2 R}{8\pi\varepsilon_0 d^2} \frac{1}{1-R^2/d^2}.$$

[9]: (a) Λόγω συμμετρίας $\vec{D} = D(r)\hat{r}$. Από νόμο Gauss σε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r < \alpha$, $\alpha < r < \beta$, $r > \beta$ αντίστοιχα, προκύπτει $D4\pi r^2 = Q_{f,\varepsilon\gamma\kappa} = \begin{cases} 0, r < \alpha \\ -Q, \alpha < r < \beta \\ 0, r > \beta \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\vec{D} = \begin{cases} 0, r < \alpha \\ -\frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \alpha < r < \beta \\ 0, r > \beta \end{cases} \text{ και } \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \begin{cases} 0, r < \alpha \\ -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}, \alpha < r < \beta \\ 0, r > \beta \end{cases}$$

Η ενέργεια μπορεί να βρεθεί σαν $W_a = \frac{Q^2}{2C_a}$, όπου

η χωρητικότητα $C_a = \frac{Q}{V}$ και η διαφορά δυναμικού

$$V = V|_{r=\beta} - V|_{r=\alpha} = \int_{\beta}^{\alpha} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\beta}^{\alpha} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right), \text{ δηλ. } C_a = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}. \text{ Τελικά}$$

$$W_a = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right).$$

$$\text{Αλλιώς: } W_a = \iiint \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right).$$

(b) Το πεδίο $\vec{D}$ είναι ίδιο με πριν (όπως προκύπτει από νόμο Gauss με $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ ενώ το ηλεκτρικό

$$\text{πεδίο είναι } \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \begin{cases} 0, r < \alpha \\ -\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \hat{r}, \alpha < r < \gamma \\ -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}, \gamma < r < \beta \\ 0, r > \beta \end{cases}$$

Η ενέργεια μπορεί να βρεθεί σαν $W_b = \frac{Q^2}{2C_b}$, όπου

η χωρητικότητα $C_b = \frac{Q}{V}$ και η διαφορά δυναμικού

$$V = V|_{r=\beta} - V|_{r=\alpha} = \int_{\beta}^{\alpha} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\beta}^{\gamma} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr - \int_{\gamma}^{\alpha} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right),$$

$$\text{δηλ. } \frac{1}{C_b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Είναι σαν να έχουμε σύνδεση των δυο σφαιρικών πυκνωτών σε σειρά.

$$\text{Τελικά } W_b = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right).$$

$$\text{Αλλιώς: } W_b = \iiint \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} d\tau = \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4} 4\pi r^2 dr + \int_{\gamma}^{\beta} \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right).$$

(c) Λόγω της ύπαρξης του διηλεκτρικού η κατανομή του ελεύθερου φορτίου στους οπλισμούς δεν θα είναι σφαιρικά συμμετρική. Η κατανομή όμως του συνολικού φορτίου $Q_{\text{ολ}}$ θα είναι σφαιρικά συμμετρική και θα δημιουργεί σφαιρικά συμμετρικό πεδίο $\vec{E} = \frac{Q_{\text{ολ}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$ μεταξύ των ακτίνων α και β , τόσο στο εσωτερικό του διηλεκτρικού όσο και στο κενό. Ένα τέτοιο πεδίο ικανοποιεί τόσο τη συνέχεια της παράλληλης (της $\hat{r}$) συνιστώσας του στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ διηλεκτρικού και κενού, όσο και τη συνέχεια της κάθετης συνιστώσας του $\vec{D}$ στην ίδια επιφάνεια (αφού $D_{\perp} = D_{\theta} = 0$), οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μοναδικότητας αποτελεί τη μόνη λύση του προβλήματος. Μένει να υπολογιστεί το φορτίο $Q_{\text{ολ}}$. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω του νόμου Gauss σε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r (με $\alpha < r < \beta$), $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = -Q$, ο οποίος με $\vec{D} =$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, r < \alpha \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{Q_{o\lambda}}{4\pi r^2} \hat{r}, \alpha < r < \beta & \text{στο διηλεκτρικό} \\ \frac{Q_{o\lambda}}{4\pi r^2} \hat{r}, \alpha < r < \beta & \text{στο κενό} \\ 0, r > \beta \end{cases}$$

$$\text{δίνει } \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{Q_{o\lambda}}{4\pi r^2} 2\pi r^2 + \frac{Q_{o\lambda}}{4\pi r^2} 2\pi r^2 = -Q \Leftrightarrow$$

$$Q_{o\lambda} = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} Q.$$

$$\text{Έτσι έχουμε } \vec{E} = \begin{cases} 0, r < \alpha \\ -\frac{Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)r^2} \hat{r}, \alpha < r < \beta \\ 0, r > \beta \end{cases}$$

$$\vec{D} = \begin{cases} 0, r < \alpha \\ -\frac{\varepsilon Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)r^2} \hat{r}, \alpha < r < \beta & \text{στο διηλεκτρικό} \\ -\frac{\varepsilon_0 Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)r^2} \hat{r}, \alpha < r < \beta & \text{στο κενό} \\ 0, r > \beta \end{cases}$$

$$\text{Η ενέργεια μπορεί να βρεθεί σαν } W_c = \frac{Q^2}{2C_c},$$

$$\text{όπου η χωρητικότητα } C_c = \frac{Q}{V} \text{ και η διαφορά}$$

$$\text{δυναμικού } V = V|_{r=\beta} - V|_{r=\alpha} = \int_{\beta}^{\alpha} \vec{E} \cdot d\vec{r} =$$

$$-\int_{\beta}^{\alpha} \frac{Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)r^2} dr = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right),$$

$$\text{δηλ. } C_c = \frac{2\pi\varepsilon}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} + \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}.$$

Είναι σαν να έχουμε παράλληλη σύνδεση των δυο ημισφαιρικών πυκνωτών.

$$\text{Τελικά } W_c = \frac{Q^2}{4\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right).$$

$$\text{Αλλιώς: } W_c = \iiint \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} d\tau =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varepsilon Q^2}{8\pi^2(\varepsilon + \varepsilon_0)^2 r^4} 2\pi r^2 dr +$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varepsilon_0 Q^2}{8\pi^2(\varepsilon + \varepsilon_0)^2 r^4} 2\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{4\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right).$$

$$\boxed{10}: (\alpha) \frac{W_{\varepsilon(\alpha)}}{W_0} = \frac{\frac{Q^2}{2C_{\varepsilon}}}{\frac{Q^2}{2C_0}} = \frac{C_0}{C_{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon_r}$$

$$(\beta) \frac{W_{\varepsilon(\beta)}}{W_0} = \frac{\frac{C_{\varepsilon} V^2}{2}}{\frac{C_0 V^2}{2}} = \frac{C_{\varepsilon}}{C_0} = \varepsilon_r$$

(γ) Στην (α) περίπτωση $\frac{W_{\varepsilon(\alpha)}}{W_0} = \frac{1}{\varepsilon_r} < 1$, δηλ. η ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται καθώς το διηλεκτρικό εισέρχεται στον πυκνωτή.

Όταν το διηλεκτρικό βρεθεί ακίνητο στο εσωτερικό του πυκνωτή η διαφορά ενέργειας $W_0 - W_{\varepsilon(\alpha)} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} W_0$, η οποία είναι ίση με το έργο της ελκτικής δύναμης που ασκεί το πεδίο στο διηλεκτρικό, έχει μεταφερθεί σε αυτόν που σταμάτησε το διηλεκτρικό. Αν δεν υπάρχει κάποιος να σταματήσει το διηλεκτρικό αυτό θα εκτελεί ταλαντωτική κίνηση, η ηλεκτροστατική ενέργεια θα αυξομειώνεται καθώς το διηλεκτρικό θα μπαίνοβγαίνει στον πυκνωτή και σε κάθε στιγμή το άθροισμά της με την μηχανική ενέργεια (κινητική ή και δυναμική) θα είναι σταθερό.

Στην (β) περίπτωση $\frac{W_{\varepsilon(\beta)}}{W_0} = \varepsilon_r > 1$. Παρότι η δύναμη που ασκείται από το πεδίο του πυκνωτή στο διηλεκτρικό είναι ελκτική (ίδια ακριβώς με αυτήν της περίπτωσης (α) όπου το ελεύθερο φορτίο στους οπλισμούς παραμένει σταθερό) η μπαταρία που διατηρεί σταθερή την διαφορά δυναμικού μετακινεί φορτίο (ώστε συνεχώς να είναι $Q = CV$ με σταθερό V και αυξανόμενο C καθώς το διηλεκτρικό εισέρχεται στον πυκνωτή) και άρα προσθέτει ενέργεια στο σύστημα. Η ενέργεια που δίνει η μπαταρία είναι $V(Q_{\varepsilon} - Q_0) = V^2(C_{\varepsilon} - C_0) = 2(W_{\varepsilon(\beta)} - W_0)$ δηλ. διπλάσια από την μεταβολή της ηλεκτροστατικής ενέργειας. Το άλλο μισό της ενέργειας που δίνει η μπαταρία $\frac{1}{2}V^2(C_{\varepsilon} - C_0) = (\varepsilon_r - 1)W_0$ είναι ίσο με το έργο της ελκτικής δύναμης που ασκεί το πεδίο στο διηλεκτρικό και μεταφέρεται σε αυτόν που «φρενάρει» την είσοδο του διηλεκτρικού, όπως και στην περίπτωση (α). Αν δεν υπάρχει κάποιος να «φρενάρει» το διηλεκτρικό η ενέργεια αυτή μετατρέπεται σε μηχανική (κινητική ή και δυναμική).

[11]: Έστω ότι στο τμήμα του πυκνωτή στο οποίο υπάρχει διηλεκτρικό ανάμεσα στους οπλισμούς η γραμμική πυκνότητα ελεύθερου φορτίου στον εσωτερικό κύλινδρο είναι λ_1 (οπότε στον εξωτερικό θα είναι $-\lambda_1$). Λόγω συμμετρίας $\vec{D} = D(\varpi)\hat{\varpi}$ και ο νόμος Gauss δίνει $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{f,\varepsilon\gamma\kappa} \Leftrightarrow D2\pi\varpi\ell = \lambda_1\ell \Leftrightarrow D = \frac{\lambda_1}{2\pi\varpi}$. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι $E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0(1 + \chi_e)\varpi}$ και η απαίτηση η διαφορά δυναμικού να είναι V προσδιορίζει την λ_1 : $V = \int_a^b E d\varpi \Leftrightarrow V = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0(1 + \chi_e)} \ln \frac{b}{a} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0(1 + \chi_e)V}{\ln \frac{b}{a}}$.

Όμοια στο τμήμα του πυκνωτή χωρίς διηλεκτρικό ανάμεσα στους οπλισμούς προκύπτει γραμμική

$$\text{πυκνότητα ελεύθερου φορτίου } \lambda_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\ln \frac{b}{a}}.$$

$$\text{Επομένως το συνολικό ελεύθερο φορτίο είναι } Q = \lambda_1 z + \lambda_2(L - z) = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\ln \frac{b}{a}} (L + \chi_e z).$$

Ένας δεύτερος τρόπος να βρούμε το φορτίο για δεδομένη διαφορά δυναμικού είναι να επιλύσουμε την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό του πυκνωτή (ισχύει τόσο μέσα στο διηλεκτρικό – αφού αυτό είναι γραμμικό και ομογενές και δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία στο εσωτερικό του – όσο και έξω από αυτό), θεωρώντας ότι το δυναμικό είναι $V(\varpi)$, οπότε $\vec{\nabla}^2 V = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\varpi} \frac{d}{d\varpi} \left(\varpi \frac{dV(\varpi)}{d\varpi} \right) = 0 \Leftrightarrow V(\varpi) = a_0 + b_0 \ln \varpi$. Οι οριακές $V|_{\varpi=a} = V_a$ και $V|_{\varpi=b} = V_b$ με $V_a - V_b = V$ δίνουν $b_0 = -\frac{V}{\ln \frac{b}{a}}$, οπότε το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E} = -\vec{\nabla} V(\varpi) = -\frac{dV(\varpi)}{d\varpi} \hat{\varpi} = \frac{V}{\varpi \ln \frac{b}{a}} \hat{\varpi}$. Το

$$\text{πεδίο } \vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E} \text{ και } \epsilon_0\vec{E} \text{ μέσα και έξω από το διηλεκτρικό αντίστοιχα και το ελεύθερο φορτίο μπορεί να βρεθεί από νόμο Gauss σε κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας } \varpi \text{ με } a < \varpi < b, \text{ μήκους } L, \text{ η οποία είναι ομοαξονική με τους κυλινδρικούς οπλισμούς και περικλύει τον εσωτερικό: } Q = \iiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = \epsilon_0(1 + \chi_e) \frac{V}{\varpi \ln \frac{b}{a}} 2\pi\varpi z + \epsilon_0 \frac{V}{\varpi \ln \frac{b}{a}} 2\pi\varpi(L - z) = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\ln \frac{b}{a}} (L + \chi_e z).$$

$$\text{Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι } C = \frac{Q}{V} \Leftrightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} (L + \chi_e z) \text{ και η ενέργειά του } W = \frac{CV^2}{2} = \frac{\pi\epsilon_0 V^2}{\ln \frac{b}{a}} (L + \chi_e z).$$

$$\text{Το ίδιο από } W = \iiint \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} d\tau = \iiint \frac{\epsilon}{2} E^2 d\tau = \int_a^b \frac{\epsilon_0(1 + \chi_e)}{2} \left[\frac{V}{\varpi \ln \frac{b}{a}} \right]^2 2\pi\varpi d\varpi z + \int_a^b \frac{\epsilon_0}{2} \left[\frac{V}{\varpi \ln \frac{b}{a}} \right]^2 2\pi\varpi d\varpi(L - z) = \frac{\pi\epsilon_0 V^2}{\ln \frac{b}{a}} (L + \chi_e z).$$

Η δύναμη που ασκεί το ηλεκτρικό πεδίο στο διη-

$$\text{λεκτρικό είναι ελκτική (προς τα πάνω), με μέτρο } F = \left(\frac{dW}{dz} \right)_V = \frac{\pi\epsilon_0 \chi_e V^2}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Σε ένα πείραμα σκέψης όπου κινούμε το διηλεκτρικό εισάγοντάς το στον πυκνωτή, δηλ. σε μια νοητή αλλαγή του z κατά dz , εμείς ασκούμε δύναμη $F_{\text{εμείς}}$ αντίθετη από αυτή του πεδίου, $F_{\text{εμείς}} = -F$ και παράγουμε έργο $F_{\text{εμείς}} dz = -F dz$. Αφού η διαφορά δυναμικού μένει σταθερή, η μπαταρία μετακινεί φορτίο dQ από τον αρνητικό στον θετικό οπλισμό (ώστε να ισχύει πάντα $V = Q/C = \text{σταθερό}$ παρότι το C μεταβάλλεται), προσφέροντας έργο $V dQ$. Άρα η μεταβολή στην ενέργεια του συστήματος είναι $dW = -F dz + V dQ \Leftrightarrow F = -\left(\frac{dW}{dz} \right)_V + V \left(\frac{dQ}{dz} \right)_V$, όπου ο δείκτης $(\dots)_V$ σημαίνει ότι η παραγωγή γίνεται κρατώντας σταθερή την V (μόνο η χωρητικότητα μεταβάλλεται μέσω του z). Αντικαθιστώντας $W = \frac{1}{2} CV^2$ και $Q = CV$ βρίσκουμε $F = \left(\frac{dW}{dz} \right)_V = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dz}$ ή διανυσματικά $\vec{F} = \frac{1}{2} V^2 \vec{\nabla} C$.

Ένας ισοδύναμος τρόπος να βρούμε τη δύναμη είναι να σκεφτούμε ότι προκαλούμε μια νοητή αλλαγή του z κατά dz κρατώντας σταθερό το ελεύθερο φορτίο στον πυκνωτή (ο πυκνωτής δεν είναι συνδεδεμένος με μπαταρία σε αυτό το πείραμα σκέψης και η διαφορά δυναμικού αλλάζει ώστε το φορτίο $Q = CV$ να μένει σταθερό καθώς το C μεταβάλλεται). Σε αυτή την περίπτωση $F_{\text{εμείς}} = -F$ και η μεταβολή στην ενέργεια του συστήματος είναι ίση με το έργο της δύναμης που ασκούμε, δηλ. $dW = F_{\text{εμείς}} dz = -F dz \Leftrightarrow F = -\left(\frac{dW}{dz} \right)_Q$. Αντικαθιστώντας $W = \frac{Q^2}{2C}$ βρίσκουμε

$$\text{το ίδιο αποτέλεσμα } F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dz} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dz}.$$

Η δύναμη από το πεδίο εξουδετερώνει το βάρος του υγρού που έχει ανυψωθεί, το οποίο έχει όγκο $\pi(b^2 - a^2)h$ και μάζα $m = \rho\pi(b^2 - a^2)h$. Επομένως $F = mg \Leftrightarrow \chi_e = \frac{(b^2 - a^2)\rho gh}{\epsilon_0 V^2} \ln \frac{b}{a}$.

Ένας άλλος τρόπος να βρούμε τη συνθήκη ισορροπίας είναι να θεωρήσουμε νοητά το σύστημα πυκνωτή και υγρού απομονωμένο, δηλ. να θεωρήσουμε τον πυκνωτή φορτισμένο με σταθερό φορτίο Q αντί να είναι συνδεδεμένος με μπαταρία (για να μην ασχοληθούμε με την ενέργεια που προσθέτει η μπαταρία στο σύστημα) και να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα της ενέργειας του πυκνωτή $\frac{Q^2}{2C}$ με την βαρυτική δυναμική ενέργεια του υγρού που ανυψώνεται $W_g = mg \frac{h}{2}$ (το κέντρο μάζας του

υγρού αυτού ανυψώνεται κατά $h/2$). Έτσι $W_{tot} =$ δίνει $\frac{\chi_e Q^2}{4\pi\epsilon_0 [L + \chi_e(L_0 + h)]^2} \ln \frac{b}{a} = \rho\pi(b^2 - a^2)gh$.
 $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 [L + \chi_e(L_0 + h)]} \ln \frac{b}{a} + \rho\pi(b^2 - a^2)g\frac{h^2}{2}$ με $L_0 =$ Αντικαθιστώντας $Q = CV$ βρίσκουμε την ίδια λύση
 $z - h =$ σταθερό. Η συνθήκη ισορροπίας $\frac{dW_{tot}}{dh} = 0$ $\chi_e = \frac{(b^2 - a^2)\rho gh}{\epsilon_0 V^2} \ln \frac{b}{a}$.