

[1]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 9/9/2013:

Κύβος από διηλεκτρικό υλικό καταλαμβάνει τον όγκο $-a \leq x \leq a$, $-a \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq 2a$ και φέρει μόνιμη πόλωση $\vec{P} = k\vec{r} = k(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$.

(α) Βρείτε τα χωρικά και επιφανειακά δέσμια φορτία.

(β) Ποια η συνολική διπολική ροπή του κύβου;

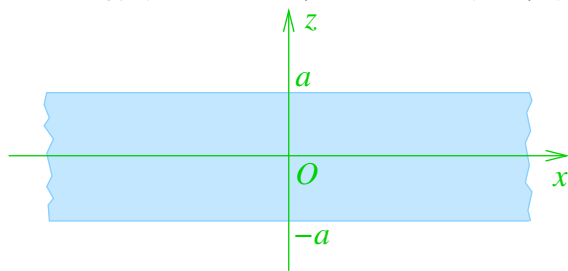
(Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει μέσω του ορισμού της πόλωσης.)

(γ) Ποιο το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο $\vec{r} = 100a\hat{z}$;

[2]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 4/5/2011:

Μια πλάκα απείρων διαστάσεων και πάχους $2a$ έχει επιφάνειες τα επίπεδα $z = -a$ και $z = a$. Η πλάκα αποτελείται από διηλεκτρικό υλικό και έχει αποκτήσει μόνιμη πόλωση $\vec{P} = P_0 \frac{z^2}{a^2} \hat{z}$.

(α) Ποια τα χωρικά και επιφανειακά δέσμια φορτία;



(β) Αφού δείξετε ότι το πεδίο $\vec{D}$ είναι μηδέν παντού, βρείτε το πεδίο $\vec{E}$ που δημιουργεί η πλάκα.

(γ) Ποια η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο επιφανειών της πλάκας $z = a$ και $z = -a$;

[3]: Πρόβλημα 4.10 από Griffiths:

Μία σφαίρα ακτίνας R φέρει μία πόλωση $\vec{P}(\vec{r}) = k\vec{r}$, όπου k είναι μία σταθερά και $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα με αρχή το κέντρο της σφαίρας.

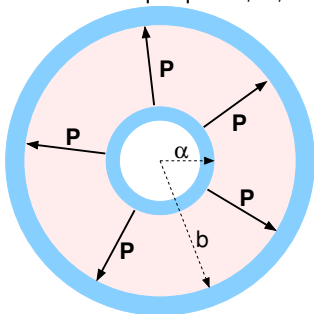
(α) Υπολογίστε τα δέσμια φορτία σ_b και ρ_b .

(β) Βρείτε το πεδίο μέσα και έξω από τη σφαίρα.

(γ) Επαναλάβετε αν η πόλωση γράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες συστήματος με αρχή το κέντρο της σφαίρας $\vec{P} = \frac{\sigma_0 r}{2R} [(3 \cos^2 \theta - 1) \hat{r} - 3 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}]$, όπου σ_0 σταθερά. Δίνεται $P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$.

(δ) Βρείτε το πεδίο $\vec{D}$ και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

[4]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 17/9/2010:



Ο σφαιρικός πυκνωτής του σχήματος (με οπλισμούς ακτίνων a και b) είναι γεμάτος με μη γραμμικό διηλεκτρικό (στο χώρο $a < r < b$). Το διηλεκτρικό έχει αποκτήσει μια μόνιμη πόλωση $\vec{P} = \frac{k}{r} \hat{r}$.

(α) Υπολογίστε τα φορτία πόλωσης (ρ_b και σ_b).

(β) Οι οπλισμοί του πυκνωτή βραχυκυκλώνονται κάτι που σημαίνει ότι θα υπάρξει μετακίνηση φορτίου μεταξύ των οπλισμών ώστε να αποκτήσουν ίδιο δυναμικό. Να υπολογιστεί το φορτίο Q του εσωτερικού οπλισμού από την απαίτηση $V_a - V_b = 0$.

Υπόδειξη: $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$ για $a < r < b$.

(γ) Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στο διηλεκτρικό.

[5]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 7/7/2009:

Σφαιρικός αγωγός ακτίνας R_1 φέρει φορτίο $+Q$. Ο αγωγός περιβάλλεται μέχρι την ακτίνα R_2 από ένα σφαιρικό στρώμα γραμμικού διηλεκτρικού επιδεκτικότητας χ , ενώ σε ακτίνα R_3 (μεγαλύτερη της R_2) υπάρχει αγωγίμος σφαιρικός φλοιός απειροστού πάχους, φορτισμένος με φορτίο $-Q$.

(α) Ποια τα πεδία $\vec{D}$ και $\vec{E}$ σε όλο το χώρο;

(β) Πόση ενέργεια πρέπει να δώσουμε για να αλλάξουμε την ακτίνα του εξωτερικού φλοιού από R_3 σε R'_3 (με $R'_3 > R_3$);

[6]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 25/5/2010:

Κυλινδρικό κέλυφος απείρου μήκους, εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής ακτίνας b αποτελείται από γραμμικό διηλεκτρικό υλικό με σταθερά ηλεκτρική διαπερατότητα ϵ . Στον άξονα του κελύφους τοποθετούμε γραμμική κατανομή φορτίου με γραμμική πυκνότητα λ . Να βρεθούν τα πεδία $\vec{D}$, $\vec{E}$ και $\vec{P}$ σε όλο το χώρο.

[7]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 18/9/2008:

Δυο αγωγίμες ομόκεντρες σφαιρικές επιφάνειες έχουν ακτίνες a και b (με $a < b$). Ο χώρος μεταξύ τους είναι γεμάτος με ανομοιογενές διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{1 - \lambda r}$, όπου ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού, λ θετική σταθερά (μικρότερη από $1/b$) και r η ακτίνα από το κέντρο. Η εσωτερική επιφάνεια φορτίζεται με φορτίο Q ενώ η εξωτερική επιφάνεια γειώνεται.

(α) Ποια τα πεδία $\vec{D}$, $\vec{E}$ και $\vec{P}$ στο χώρο $a < r < b$;

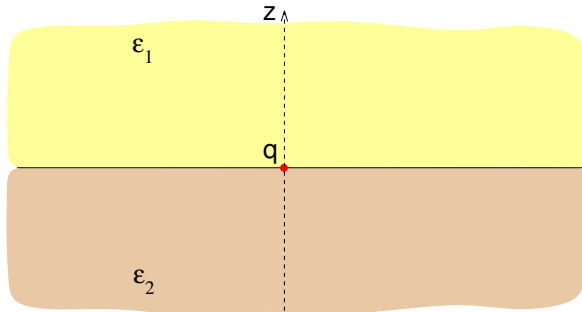
(β) Ποια η επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πόλωσης στα $r = a$ και $r = b$;

(γ) Ποια η χωρική πυκνότητα του φορτίου πόλωσης στο χώρο $a < r < b$;

(δ) Ποια η χωρητικότητα του συστήματος;

[8]: Θέμα 3^ο από εξέταση της 21/11/2011:

Δύο ημιάπειρα γραμμικά διηλεκτρικά με διαπερατότητες ϵ_1 , ϵ_2 , καλύπτουν τους χώρους $z > 0$ και $z < 0$, αντίστοιχα. Σε σημείο της διαχωριστικής επιφάνειας τοποθετείται σημειακό φορτίο q . Να βρεθούν το δυναμικό V και τα πεδία $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$ σε όλο το χώρο.



Δίνεται ότι το δυναμικό είναι της μορφής $V = \frac{b_0}{r}$. Προσδιορίστε το b_0 από το νόμο ροής του $\vec{D}$.

[9]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 18/9/2009:

Σφαιρικός πυκνωτής ακτίνων R_1 και R_2 ($R_1 < R_2$) γεμίζει με γραμμικό διηλεκτρικό σταθεράς $\epsilon(\theta) = \epsilon_0(2 + \cos \theta)$. Ο εσωτερικός οπλισμός φορτίζεται με φορτίο $+Q$ και ο εξωτερικός γειώνεται.

(α) Γνωρίζοντας ότι δεν υπάρχουν χωρικά φορτία πόλωσης και άρα το δυναμικό είναι της μορφής $V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$, δείξτε ότι $V = V_0 \frac{R_1(R_2 - r)}{r(R_2 - R_1)}$ στο χώρο $R_1 \leq r \leq R_2$.

(β) Υπολογίστε τα μεγέθη $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$ στο χώρο μεταξύ των οπλισμών.

(γ) Ολοκληρώνοντας την πυκνότητα ελεύθερου φορτίου $\sigma_f(\theta)$ του εσωτερικού οπλισμού προσδιορίστε τη σταθερά V_0 συναρτήσει του Q , καθώς και τη χωρητικότητα του πυκνωτή.

[10]: Θέμα 3^ο από εξέταση της 19/6/2012:

Αγώγιμο κυλινδρικό κέλυφος απείρου μήκους και εσωτερικής ακτίνας R είναι γειωμένο. Στον άξονά του τοποθετούμε γραμμικό φορτίο (απείρου μήκους) πυκνότητας λ .

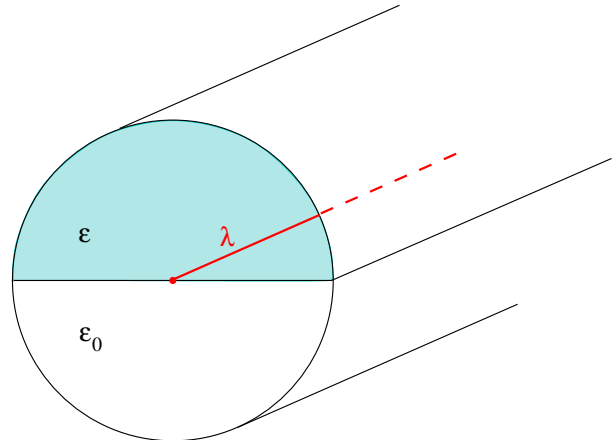
(α) Ποιο το δυναμικό στο εσωτερικό του κελύφους

$\varpi < R$; (Ο χώρος για $0 < \varpi < R$ είναι κενός.)

Ποιο το δυναμικό στον υπόλοιπο χώρο $\varpi > R$;

(β) Ποια η επιφανειακή πυκνότητα φορτίων στο κέλυφος;

(γ) Γεμίζουμε το μισό του εσωτερικού του κελύφους με γραμμικό διηλεκτρικό διαπερατότητας ϵ , όπως στο σχήμα.

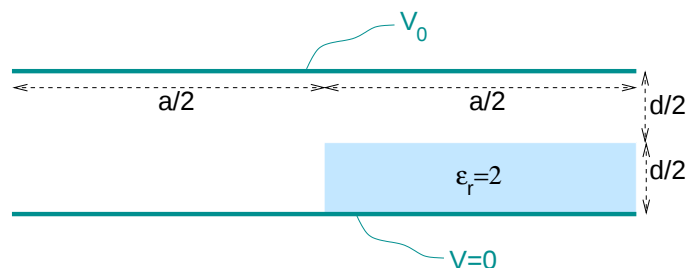


Δείξτε ότι το δυναμικό στην περιοχή $\varpi < R$ είναι τώρα $V = -\frac{\lambda}{\pi(\epsilon + \epsilon_0)} \ln \frac{\varpi}{R}$. Ποια είναι τώρα τα ελεύθερα φορτία στο κέλυφος;

[11]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 4/9/2007:

Ο χώρος μεταξύ δύο παράλληλων αγώγιμων δίσκων ακτίνας R , που απέχουν απόσταση $d \ll R$, είναι γεμάτος με μη-ομογενές διηλεκτρικό. Η ηλεκτρική διαπερατότητα του υλικού είναι συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο $\epsilon(r) = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) r/R$. Υπολογίστε την χωρητικότητα.

[12]: Αγνοώντας τα περατωτικά πεδία βρείτε τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{D}$ στο εσωτερικό του παρακάτω πυκνωτή, για τον οποίο $d \ll a$. Το εμβαδόν των πλακών είναι $A = a^2$. Ποια η χωρητικότητα του πυκνωτή;



ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x, y, z)	Κυλινδρικές (ϖ, ϕ, z)	Σφαιρικές (r, θ, ϕ)
		$\begin{cases} x = \varpi \cos \phi \\ y = \varpi \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
$\vec{v}$	$v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$	$v_\varpi \hat{\varpi} + v_\phi \hat{\phi} + v_z \hat{z}$	$v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \varpi} \hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial (\varpi v_\varpi)}{\partial \varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
$\vec{\nabla} \times \vec{v}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{x} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{y} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{z}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi} \end{pmatrix} \hat{\varpi} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi} \end{pmatrix} \hat{\phi} +$ $\frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial (\varpi v_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} \right] \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$
$\vec{\nabla}^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial f}{\partial \varpi} \right) + \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$d\vec{l}$	$dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\varpi \hat{\varpi} + \varpi d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
$d\vec{a}$	$dydz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$	$\varpi d\phi dz \hat{\varpi} + d\varpi dz \hat{\phi} + \varpi d\varpi d\phi \hat{z}$	$r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$
$d\tau$	$dx dy dz$	$\varpi d\varpi d\phi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

ΛΥΣΕΙΣ:

[1]: (α) $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial P_x}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial P_x}{\partial z}\hat{z} = -3k$ στο εσωτερικό του κύβου και $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ σε κάθε έδρα, συγκεκριμένα
 $\sigma_{x-} = \vec{P}|_{x=-a} \cdot (-\hat{x}) = ka$ στην έδρα $x = -a$,
 $\sigma_{x+} = \vec{P}|_{x=a} \cdot \hat{x} = ka$ στην έδρα $x = a$,
 $\sigma_{y-} = \vec{P}|_{y=-a} \cdot (-\hat{y}) = ka$ στην έδρα $y = -a$,
 $\sigma_{y+} = \vec{P}|_{y=a} \cdot \hat{y} = ka$ στην έδρα $y = a$,
 $\sigma_{z-} = \vec{P}|_{z=0} \cdot (-\hat{z}) = 0$ στην έδρα $z = 0$ και
 $\sigma_{z+} = \vec{P}|_{z=2a} \cdot \hat{z} = 2ka$ στην έδρα $z = 2a$.

Το ολικό επιφανειακό δέσμιο φορτίο είναι $4 \times ka \times (2a)^2 + 2ka \times (2a)^2 = 24ka^3$, αντίθετο του φορτίου όγκου $-3k \times (2a)^3 = -24ka^3$, όπως αναμέναμε.

(β) Η συνολική διπολική ροπή είναι $\vec{p} = \iiint \vec{P} d\tau = \int_{x=-a}^a \int_{y=-a}^a \int_{z=0}^{2a} k(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) dx dy dz$. Οι $\hat{x}$ και $\hat{y}$ συνιστώσες μηδενίζονται (όπως αναμέναμε από τη συμμετρία της κατανομής) ενώ η $\hat{z}$ συνιστώσα δίνει $\vec{p} = k[x]_{-a}^a [y]_{-a}^a \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{2a} \hat{z} = 8ka^4 \hat{z}$.

Θα μπορούσαμε να βρούμε την διπολική ροπή μέσω της σχέσης $\vec{p} = \int \vec{r}' dq$ αθροίζοντας τις συνεισφορές τόσο στις έδρες, όσο και στον όγκο του κύβου. Λόγω της συμμετρίας είναι $\vec{p} = p\hat{z}$ με $p = \int z dq$. Η συνεισφορά από την έδρα $x = a$ είναι $\iint z \sigma da = \sigma_{x+} \int_0^{2a} z dz \int_{-a}^a dy = 4ka^4$. Ίδια είναι η συνεισφορά από κάθε μία από τις έδρες $x = -a$, $y = \pm a$. Από την έδρα $z = 0$ δεν υπάρχει συνεισφορά, ενώ από την $z = 2a$ είναι $\iint 2a \sigma_{z+} da = 16ka^4$. Τέλος η συνεισφορά από το χωρικό φορτίο είναι $\int z \rho_b d\tau = -3k \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a dy \int_0^{2a} z dz = -24ka^4$. Αθροίζοντας τις συνεισφορές προκύπτει $\vec{p} = 8ka^4 \hat{z}$.

Λόγω του ότι το συνολικό φορτίο της κατανομής είναι μηδέν η διπολική ροπή δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων, επομένως ο υπολογισμός θα μπορούσε να γίνει ευκολότερα στο σύστημα αναφοράς με κέντρο το κέντρο του κύβου, δηλ. στο σύστημα $x'y'z'$ με $x' = x$, $y' = y$, $z' = z - a$. Στο σύστημα αυτό $\vec{P} = kx'\hat{x}' + ky'\hat{y}' + k(z'+a)\hat{z}'$. Η χωρική $\rho_b = -3k$ και οι επιφανειακές πυκνότητες ka στις έδρες $x' = \pm a$, $y' = \pm a$ λόγω συμμετρίας δεν συνεισφέρουν στην συνολική διπολική ροπή (για κάθε φορτίο dq στη θέση $\vec{r}'$ υπάρχει ίσο φορτίο σε αντίθετη θέση $-\vec{r}'$). Η έδρα $z' = -a$ επίσης δεν συνεισφέρει διότι σ' αυτήν δεν υπάρχει επιφανειακό φορτίο. Μένει μόνο η έδρα $z' = a$ με

$\sigma_b = 2ka$, η οποία δίνει $\vec{p} = p\hat{z}$ (λόγω συμμετρίας) με $p = \iint z \sigma_b dx dy = a \times (2ka) \times (2a)^2 = 8ka^4$.

(γ) Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο $\vec{r} = 100a\hat{z}$ είναι με καλή ακρίβεια πεδίο διπόλου (αφού η απόσταση είναι πολύ μεγαλύτερη των διαστάσεων της κατανομής, $r \gg a$). Έτσι $\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = 4 \times 10^{-6} \frac{ka}{\pi\epsilon_0} \hat{z}$.

[2]: (α) $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -2P_0 \frac{z}{a^2}$ στο εσωτερικό της πλάκας και $\sigma_b = \vec{P}|_{z=\pm a} \cdot (\pm\hat{z}) = \pm P_0$ στην πάνω και κάτω επιφάνεια αντίστοιχα.

(β) Λόγω συμμετρίας η ηλεκτρική μετατόπιση είναι $\vec{D} = D(z)\hat{z}$. Από το διαφορικό νόμο Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \Leftrightarrow \frac{dD(z)}{dz} = 0$ προκύπτει $D = \text{σταθερό}$ σε όλο το χώρο. Σε μεγάλες αποστάσεις από την πλάκα ($z \rightarrow \pm\infty$) η πλάκα φαίνεται σαν ένα φύλλο με μηδενικό φορτίο, γιατί το συνολικό δέσμιο φορτίο είναι πάντα μηδέν. Άρα το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται και το πεδίο $\vec{D}$ ομοίως (αφού έξω από την πλάκα $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$). Αφού όπως έχουμε δείξει το $\vec{D}$ είναι σταθερό, συμπεραίνουμε ότι είναι παντού $\vec{D} = 0$.

Το ηλεκτρικό πεδίο προκύπτει από $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Leftrightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$. Δηλ. είναι $\vec{E} = -\frac{P_0}{\epsilon_0} \frac{z^2}{a^2} \hat{z}$ στο εσωτερικό της πλάκας και $\vec{E} = 0$ έξω.

Θα μπορούσαμε να λύσουμε την διαφορική εξίσωση Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_b}{\epsilon_0}$ μέσα στην πλάκα όπου $\frac{dE}{dz} = -2\frac{P_0}{\epsilon_0} \frac{z}{a^2} \Leftrightarrow E = -\frac{P_0}{\epsilon_0} \frac{z^2}{a^2} + C$, στο χώρο $z > a$ όπου $\frac{dE}{dz} = 0 \Leftrightarrow E = C_+$ και στο χώρο $z < -a$ όπου $\frac{dE}{dz} = 0 \Leftrightarrow E = C_-$ και να βρούμε τις σταθερές C , $C_{\pm}$ από τις οριακές συνθήκες. Αφού η συνολική επιφανειακή πυκνότητα της πλάκας είναι μηδενική το πεδίο μηδενίζεται σε μακρινές αποστάσεις. Άρα $C_{\pm} = 0$. Η σταθερά C προκύπτει από $E|_{z=a+} - E|_{z=a-} = \frac{\sigma_b|_{z=a}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow 0 - \left(-\frac{P_0}{\epsilon_0} + C\right) = \frac{P_0}{\epsilon_0} \Leftrightarrow C = 0$. (Το ίδιο προκύπτει από την αντίστοιχη οριακή στην επιφάνεια $z = -a$.)

(γ) Η διαφορά δυναμικού είναι $V|_{z=a} - V|_{z=-a} = -\int_{z=-a}^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{-a}^a \frac{P_0}{\epsilon_0} \frac{z^2}{a^2} dz = \frac{2P_0 a}{3\epsilon_0}$.

[3]: (α) $\sigma_b = [\vec{P} \cdot \hat{n}]_{r=R} = [k\vec{r} \cdot \hat{r}]_{r=R} = kR$.
 $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -k\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = -k\vec{\nabla} \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = -3k$.

Αλλιώς σε σφαιρικές συντεταγμένες $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot (kr\hat{r}) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 kr) = -3k$.

(β) Λόγω συμμετρίας $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ και από νόμο Gauss βρίσκουμε $D4\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow D = 0$ αφού δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία. Από $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, με $\vec{D} = 0$

$$\text{βρίσκουμε } \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \begin{cases} -\frac{k\vec{r}}{\epsilon_0}, & \text{για } r < R \\ 0, & \text{για } r > R \end{cases}$$

Αλλιώς: Λόγω συμμετρίας $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ και από νόμο Gauss βρίσκουμε $E4\pi r^2 = \frac{\rho_b(4\pi r^3/3)}{\epsilon_0} = \frac{-3k(4\pi r^3/3)}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = -\frac{kr}{\epsilon_0}$ για $r < R$ και $E4\pi r^2 =$

$$\frac{\rho_b 4\pi R^3/3 + \sigma_b 4\pi R^2}{\epsilon_0} = \frac{-3k4\pi R^3/3 + kR4\pi R^2}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = 0 \text{ για } r > R. \text{ (Για } r > R \text{ προέκυψε } Q_{\text{εγκ}} = 0 \text{ αφού το συνολικό δέσμιο φορτίο είναι μηδέν.)}$$

$$(γ) \sigma_b = [\vec{P} \cdot \hat{r}]_{r=R} = \sigma_0 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = \sigma_0 P_2(\cos \theta).$$

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 P_r)}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(P_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Φορτία υπάρχουν μόνο στη επιφάνεια $r = R$, οπότε ισχύει η εξίσωση Laplace στις περιοχές $r < R$ και $r > R$. Λόγω της μορφής της επιφανειακής πυκνότητας υποθέτουμε λύση της μορφής (αφού διώξουμε τους όρους που απειρίζονται και υποθέσουμε $V = 0$ στο άπειρο) $V = \begin{cases} \frac{b_2}{r^3} P_2(\cos \theta), & r \geq R \\ a_2 r^2 P_2(\cos \theta), & r \leq R \end{cases}$

Η συνέχεια του δυναμικού για $r = R$ δίνει $b_2 = a_2 R^5$. Άρα $E_r|_{r=R^\pm} = -\frac{\partial V}{\partial r}|_{r=R^\pm} = \begin{cases} 3\frac{b_2}{R^4} P_2(\cos \theta) = 3a_2 R P_2(\cos \theta), & r = R^+ \\ -2a_2 R P_2(\cos \theta), & r = R^- \end{cases}$ και

$$E_r|_{r=R^+} - E_r|_{r=R^-} = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} \Leftrightarrow a_2 = \frac{\sigma_0}{5\epsilon_0 R} \text{ και } b_2 = \frac{\sigma_0 R^4}{5\epsilon_0}.$$

$$\text{Τελικά } V = \begin{cases} \frac{\sigma_0 R^4}{10\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1), & r \geq R \\ \frac{\sigma_0 r^2}{10\epsilon_0 R} (3 \cos^2 \theta - 1), & r \leq R \end{cases} \text{ και } \vec{E} = -\vec{\nabla} V = \begin{cases} \frac{3\sigma_0 R^4}{10\epsilon_0 r^4} [(3 \cos^2 \theta - 1) \hat{r} + 2 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}], & r > R \\ -\frac{\sigma_0 r}{5\epsilon_0 R} [(3 \cos^2 \theta - 1) \hat{r} - 3 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}], & r < R \end{cases}$$

(Αφού όλες οι οριακές συνθήκες ικανοποιήθηκαν και η λύση είναι μοναδική, σωστά υποθέσαμε τη μορφή του δυναμικού.)

(δ) Το πεδίο $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ στην (α) περίπτωση προκύπτει μηδέν ενώ στην (β) προκύπτει μη μηδενικό. Αυτό είναι ένα παράδειγμα κατανομής όπου παρότι

δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία το πεδίο $\vec{D}$ δεν είναι μηδέν (έχει βέβαια κλειστές δυναμικές γραμμές αφού $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$). Μετά τις πράξεις προκύπτει $\vec{D} =$

$$\begin{cases} \frac{3\sigma_0 R^4}{10r^4} [(3 \cos^2 \theta - 1) \hat{r} + 2 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}], & r > R \\ \frac{3\sigma_0 r}{10R} [(3 \cos^2 \theta - 1) \hat{r} - 3 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}], & r < R \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι στην επιφάνεια $r = R$ η $\hat{r}$ συνιστώσα είναι συνεχής (αναμενόμενη συνέπεια της $\sigma_f = 0$), ενώ η $\hat{\theta}$ συνιστώσα είναι ασυνεχής (λόγω της ασυνέχειας της εφαπτομενικής συνιστώσας της πόλωσης είναι $D_\theta|_{r=R^+} - D_\theta|_{r=R^-} = P_\theta|_{r=R^+} - P_\theta|_{r=R^-} = 0 - \frac{\sigma_0}{2} (-3 \sin \theta \cos \theta) = \frac{3}{2} \sigma_0 \sin \theta \cos \theta$).

$$\boxed{4}: (\alpha) \rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{k}{r} \right) = -\frac{k}{r^2} \text{ για } a < r < b.$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = \begin{cases} \vec{P}|_{r=a} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{k}{a}, & \text{για } r = a \\ \vec{P}|_{r=b} \cdot \hat{r} = \frac{k}{b}, & \text{για } r = b \end{cases}$$

Το διηλεκτρικό δημιουργεί πεδίο $\vec{E}_\delta = -\vec{P}/\epsilon_0 = \begin{cases} -\frac{k}{\epsilon_0 r} \hat{r}, & a < r < b \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$ (διότι $\vec{D} = 0$ όπως εύκολα

προκύπτει από νόμο Gauss και τη σφαιρική συμμετρία της κατανομής). Έτσι το διηλεκτρικό δεν ασκεί καμία δύναμη στα φορτία των αγωγίων οπλισμών. Η διαφορά δυναμικού $V_{\delta a} - V_{\delta b} = \int_a^b E_\delta dr = -\frac{k}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$ θα μπορούσε να κινήσει φορτία μόνο αν αυτά βρίσκονταν στην περιοχή $a < r < b$. Το βραχυκύκλωμα προσφέρει αυτή τη «δίοδο», οπότε μόλις οι οπλισμοί βραχυκυκλωθούν θα κινηθεί φορτίο από τον ένα στον άλλο οπλισμό. Το φορτίο που θα μετακινηθεί μειώνει το συνολικό πεδίο και η μετακίνηση συνεχίζεται μέχρι η διαφορά δυναμικού να μηδενιστεί.

(β) Αν Q το φορτίο που αποκτά ο εσωτερικός οπλισμός, ο νόμος Gauss σε σφαιρικές επιφάνειες ακτίνων $a < r < b$ δίνει $D4\pi r^2 = Q$ (αφού λόγω συμμετρίας $\vec{D} = D(r)\hat{r}$). Άρα στην περιοχή $a < r < b$ είναι $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$ και $\vec{P} = \frac{k}{r} \hat{r}$, οπότε $\vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\epsilon_0} = \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} - \frac{k}{\epsilon_0 r} \right) \hat{r}$.

Το ίδιο προκύπτει και από νόμο Gauss σε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r με $a < r < b$: Λόγω συμμετρίας $\vec{E} = E\hat{r}$ και $E4\pi \epsilon_0 r^2 = Q_{\text{εγκ}} = Q + \int_a^r \rho_b 4\pi r^2 dr + [\sigma_b]_{r=a} 4\pi a^2 = Q - 4\pi kr$.

$$\text{Πρέπει } V_a - V_b = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} - \frac{k}{\epsilon_0 r} \right) dr = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{k}{\epsilon_0} \ln r \right]_a^b = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{4\pi k \ln(b/a)}{1/a - 1/b}.$$

(γ) Αντικατάσταση στην $\vec{E} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{k}{\epsilon_0 r} \right) \hat{r}$

$$\text{δίνει } \vec{E} = \frac{k}{\epsilon_0} \left[\frac{ab \ln(b/a)}{(b-a)r^2} - \frac{1}{r} \right] \hat{r} \text{ για } a < r < b.$$

Το παραπάνω πεδίο έχει τη φορά του $\hat{r}$ για $a < r <$

$\frac{ab \ln \frac{b}{b-a}}{\frac{b}{b-a}}$ και τη φορά του $-\hat{r}$ για $\frac{ab \ln \frac{b}{b-a}}{\frac{b}{b-a}} < r < b$.

Έτσι, αν υποτεθεί ότι ένα θετικό φορτίο κινείται από $r = a$ σε $r = b$, το παραπάνω πεδίο το επιταχύνει

(του δίνει ενέργεια) μέχρι την ακτίνα $r = \frac{ab \ln \frac{b}{b-a}}{\frac{b}{b-a}}$,

στη συνέχεια το επιβραδύνει (του παίρνει ενέργεια), αλλά το συνολικό έργο (η συνολική ενέργεια που δίνει) είναι μηδέν.

[5]: (α) Λόγω συμμετρίας $\vec{D} = D(r)\hat{r}$. Από Gauss

$$D4\pi r^2 = Q_{f,\epsilon\gamma\kappa} \Rightarrow \vec{D} = \begin{cases} 0, r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, R_1 < r < R_3 \\ 0, r > R_3 \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \begin{cases} 0, r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(1+\chi)r^2} \hat{r}, R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, R_2 < r < R_3 \\ 0, r > R_3 \end{cases}$$

(β) Α' τρόπος: Η ενέργεια της κατανομής για συγκεκριμένο R_3 είναι $W = \frac{Q^2}{2C}$ με

$$C = \frac{Q}{V|_{r=R_1} - V|_{r=R_3}} \text{ και } V|_{r=R_1} - V|_{r=R_3} = \int_{R_1}^{R_3} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(1+\chi)r^2} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{1+\chi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right].$$
 Αντικαθι-

$$\text{στώντας } W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{1+\chi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right].$$

Αφού αλλάξουμε την ακτίνα του εξωτερικού φλοιού σε R'_3 η νέα ενέργεια θα είναι $W' = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{1+\chi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_3} \right]$. Επομένως

$$\text{έχουμε δώσει ενέργεια } W' - W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R'_3} \right)$$

(θετική αφού $R'_3 > R_3$).

Β' τρόπος: Η ενέργεια της κατανομής για συγ-
κεκριμένο R_3 είναι $W = \iiint \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} d\tau =$

$$\int_0^\infty \frac{ED}{2} 4\pi r^2 dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0(1+\chi)r^2} dr +$$

$$\int_{R_2}^{R_3} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{1+\chi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right].$$

Όμοια με πριν υπολογίζουμε την ενέργεια $W' - W$ που δίνουμε.

Αλλιώς: $W' - W = \int_{R_3}^{R'_3} \frac{ED}{2} 4\pi r^2 dr = \int_{R_3}^{R'_3} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr$
διότι η θέση του φλοιού δεν επηρεάζει τα πεδία στο εσωτερικό του (καθορίζει μόνο από ποια ακτίνα και μετά δεν υπάρχει πεδίο).

Γ' τρόπος: Κάθε φορτίο δq στην επιφάνεια του εξω-
τερικού αγωγού κινείται ακτινικά από ακτίνα R_3 σε
ακτίνα R'_3 . Κατά την κίνηση αυτή δέχεται δύναμη

$$\vec{E}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} \delta q \text{ όπου } \vec{E}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} \text{ είναι ο μέσος όρος του πεδίου λίγο έξω και λίγο μέσα από την επιφάνεια του αγω-}$$

γού, δηλ. $\vec{E}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3^2} \hat{r} + 0 \right) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R_3^2} \hat{r}$.

Για να βρούμε το $\vec{E}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha}$ στη θέση κάθε στοιχειώ-
δους επιφάνειας δa , χωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο
στο κομμάτι $\vec{E}_{\delta a}$ που δημιουργείται από το δa , και
στο $\vec{E}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha}$. Το πεδίο $\vec{E}_{\delta a}$, σε σημεία λίγο πάνω και
λίγο κάτω από το τμήμα δa (για $|r - R_3|$ πολύ
μικρότερα των διαστάσεών του) είναι πεδίο φύ-
λου απείρων διαστάσεων φορτισμένου με σταθε-

$$\text{ρή } \sigma, \text{ δηλ. } \vec{E}_{\delta a} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r}, \text{ αν } r = R_3^+ \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r}, \text{ αν } r = R_3^- \end{cases}, \text{ οπότε}$$

$$\text{για το ολικό πεδίο κοντά στην επιφάνεια του αγω-}$$

$$\text{γού είναι } \left. \begin{aligned} \vec{E}|_{r=R_3^+} &= \vec{E}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r} \\ \vec{E}|_{r=R_3^-} &= \vec{E}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} =$$

$$\frac{\vec{E}|_{r=R_3^+} + \vec{E}|_{r=R_3^-}}{2}. \text{ (Μάλιστα για την περίπτωση}$$

αγωγού, στον οποίο το πεδίο είναι μηδέν στο εσωτε-
ρικό, προκύπτει ισοδύναμα $\vec{E}|_{r=R_3^+} = \vec{E}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r} \Leftrightarrow$

$$0 = \vec{E}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} + \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{4\pi R_3^2} \right) \hat{r} \Leftrightarrow \vec{E}_{\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R_3^2} \hat{r}.$$

Εμείς ασχούμε αντίθετη δύναμη $-\vec{E}_{\delta a} \delta q$ της
οποίας το έργο είναι $\delta q \int_{R_3}^{R'_3} \left(-\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R_3^2} \right) dR_3 =$

$$-\delta q \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R'_3} \right). \text{ Αθροίζοντας πάνω σε όλα}$$

τα φορτία δq (των οποίων το σύνολο αποτελεί το
φορτίο $-Q$ του εξωτερικού οπλισμού) βρίσκουμε ότι
δίνουμε ενέργεια $\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R'_3} \right)$.

[6]: Λόγω συμμετρίας $\vec{D} = D(\varpi)\hat{\omega}$ σε κυλινδρι-
κές συντεταγμένες συστήματος με άξονα την γραμ-
μική κατανομή φορτίου. Από νόμο Gauss σε κυλιν-
δρική επιφάνεια ακτίνας ϖ και μήκους L βρίσκουμε

$$D2\pi\varpi L = \lambda L \Leftrightarrow \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi\varpi} \hat{\varpi} \text{ σε όλο το χώρο.}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varpi} \hat{\varpi}, & \text{για } \alpha < \varpi < \beta \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varpi} \hat{\varpi}, & \text{για } \varpi < \alpha \text{ και } \varpi > \beta \end{cases}$$

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{D} = \begin{cases} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{\lambda}{2\pi\varpi} \hat{\varpi}, & \text{για } \alpha < \varpi < \beta \\ 0, & \text{για } \varpi < \alpha \text{ και } \varpi > \beta \end{cases}$$

[7]: (α) Λόγω συμμετρίας $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ και από νόμο Gauss $D4\pi r^2 = Q \Leftrightarrow \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$ για $a < r < b$.

Στο χώρο αυτό $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q(1-\lambda r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$ και $\vec{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{D} = \frac{\lambda Q}{4\pi r} \hat{r}$.

(β) Για $r = a$, $\sigma_b|_{r=a} = \vec{P}|_{r=a} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{\lambda Q}{4\pi a}$, και

για $r = b$, $\sigma_b|_{r=b} = \vec{P}|_{r=b} \cdot \hat{r} = \frac{\lambda Q}{4\pi b}$.

(γ) $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P) = -\frac{\lambda Q}{4\pi r^2}$.

Το ολικό δέσμιο φορτίο είναι $\int_a^b \rho_b 4\pi r^2 dr + \sigma_b|_{r=a} 4\pi a^2 + \sigma_b|_{r=b} 4\pi b^2 = 0$ όπως περιμέναμε.

(δ) Η διαφορά δυναμικού είναι $V_a - V_b = \int_a^b E dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda}{r} \right) dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \lambda \ln \frac{b}{a} \right)$,
οπότε $C = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \lambda \ln \frac{b}{a}}$.

[8]: $V = \frac{b_0}{r}$, $\vec{E} = \frac{b_0}{r^2} \hat{r}$, $\vec{D} = \varepsilon_1 \frac{b_0}{r^2} \hat{r}$ για $z > 0$ και $\vec{D} = \varepsilon_2 \frac{b_0}{r^2} \hat{r}$ για $z < 0$.

Το ότι το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο είναι σφαιρικά συμμετρικά πηγάζει από την απαίτηση η επαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου να είναι συνεχής στην διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των δύο διηλεκτρικών.

Από $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = q$ σε μια σφαίρα γύρω από το φορτίο q προκύπτει $\oiint_{z>0} \vec{D} \cdot d\vec{a} + \oiint_{z<0} \vec{D} \cdot d\vec{a} = q \Leftrightarrow$

$$\varepsilon_1 \frac{b_0}{r^2} 2\pi r^2 + \varepsilon_2 \frac{b_0}{r^2} 2\pi r^2 = q \Leftrightarrow b_0 = \frac{q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Έτσι $\vec{E} = \frac{q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}$, $\vec{D} = \frac{\varepsilon_1 q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}$

για $z > 0$ και $\vec{D} = \frac{\varepsilon_2 q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}$ για $z < 0$,

$\vec{P} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\vec{E} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}$ για $z > 0$ και

$\vec{P} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}$ για $z < 0$.

[9]: (α) $V|_{r=R_1} = V_0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 + \frac{B_0}{R_1} = V_0 \text{ ①} \\ A_\ell + \frac{B_\ell}{R_1^{\ell+1}} = 0 \text{ για } \ell \neq 0 \text{ ②} \end{cases}$

$V|_{r=R_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 + \frac{B_0}{R_2} = 0 \text{ ③} \\ A_\ell + \frac{B_\ell}{R_2^{\ell+1}} = 0 \text{ για } \ell \neq 0 \text{ ④} \end{cases}$

①,③ $\leadsto \begin{cases} A_0 = -V_0 \frac{R_1}{R_2 - R_1} \\ B_0 = V_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \end{cases}$

②,④ $\leadsto A_\ell = B_\ell = 0$ για $\ell \neq 0$.

Αλλιώς, οι ①-② γράφονται συνεπτυγμένα $A_\ell + \frac{B_\ell}{R_1^{\ell+1}} = V_0 \delta_{\ell 0}$, οι ③-④ γράφονται $A_\ell + \frac{B_\ell}{R_2^{\ell+1}} = 0$ και η λύση του συστήματος $A_\ell = -V_0 \frac{R_1}{R_2 - R_1} \delta_{\ell 0}$,

$B_\ell = V_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \delta_{\ell 0}$.

Αντικαθιστώντας στη γενική λύση προκύπτει

$$V = V_0 \frac{R_1(R_2 - r)}{(R_2 - R_1)r}.$$

Αν δεν δινόταν ότι «δεν υπάρχουν χωρικά φορτία πόλωσης» θα μπορούσαμε να εργαστούμε ως εξής: Ψάχνουμε λύση της $\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla} V) = 0$ (η οποία προκύπτει από $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ με $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ και $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$), με $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$, που να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες $V|_{r=R_1} = V_0$ (αφού ο εσωτερικός οπλισμός είναι αγωγός και άρα έχει σταθερό δυναμικό) και $V|_{r=R_2} = 0$. Είναι $\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla} V) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d\varepsilon}{d\theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \varepsilon \vec{\nabla}^2 V = 0$. Δοκιμάζοντας λύση $V = V(r)$ προκύπτει η σφαιρικά συμμετρική λύση της εξίσωσης Laplace $V = A_0 + \frac{B_0}{r}$, η οποία μπορεί να ικανοποιήσει τις οριακές συνθήκες αν

$$\left. \begin{matrix} A_0 + \frac{B_0}{R_1} = V_0 \\ A_0 + \frac{B_0}{R_2} = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} A_0 = -V_0 \frac{R_1}{R_2 - R_1} \\ B_0 = V_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \end{matrix} \right. \quad \text{Σύμ-}$$

φωνα με το θεώρημα μοναδικότητας η λύση που προκύπτει $V = V_0 \frac{R_1(R_2 - r)}{(R_2 - R_1)r}$ (η οποία ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες - οι οριακές που σχετίζονται με τις $\hat{r}$ συνιστώσες των πεδίων $\vec{D}$ και $\vec{E}$ στις ακτίνες $r = a$ και $r = b$ προσδιορίζουν τις επιφανειακές πυκνότητες ελεύθερων και δέσμιων φορτίων) είναι η μοναδική λύση του προβλήματος.

$$\left. \begin{matrix} A_0 + \frac{B_0}{R_1} = V_0 \\ A_0 + \frac{B_0}{R_2} = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} A_0 = -V_0 \frac{R_1}{R_2 - R_1} \\ B_0 = V_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \end{matrix} \right. \quad \text{Σύμ-}$$

φωνα με το θεώρημα μοναδικότητας η λύση που προκύπτει $V = V_0 \frac{R_1(R_2 - r)}{(R_2 - R_1)r}$ (η οποία ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες - οι οριακές που σχετίζονται με τις $\hat{r}$ συνιστώσες των πεδίων $\vec{D}$ και $\vec{E}$ στις ακτίνες $r = a$ και $r = b$ προσδιορίζουν τις επιφανειακές πυκνότητες ελεύθερων και δέσμιων φορτίων) είναι η μοναδική λύση του προβλήματος.

(β) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{dV}{dr} \hat{r} = \frac{V_0 R_1 R_2}{(R_2 - R_1)r^2} \hat{r}$,

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 V_0 R_1 R_2 (2 + \cos \theta)}{(R_2 - R_1)r^2} \hat{r}$,

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 V_0 R_1 R_2 (1 + \cos \theta)}{(R_2 - R_1) r^2} \hat{r}.$$

(γ) Για $r < R_1$ είναι $\vec{D} = 0$ (εσωτερικό αγωγού),
 οπότε $\sigma_f|_{r=R_1} = D_r|_{r=R_1^+} = \frac{\varepsilon_0 V_0 R_2 (2 + \cos \theta)}{(R_2 - R_1) R_1}$.

Το ελεύθερο φορτίο είναι $Q = \iint \sigma_f|_{r=R_1} da$
 με $da = R_1^2 \sin \theta d\theta d\phi$, οπότε $Q = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\varepsilon_0 V_0 R_2 (2 + \cos \theta)}{(R_2 - R_1) R_1} R_1^2 \sin \theta d\theta d\phi$

$$2\pi \frac{\varepsilon_0 V_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left[-2 \cos \theta - \frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{8\pi \varepsilon_0 V_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Leftrightarrow$$

$$V_0 = \frac{Q(R_2 - R_1)}{8\pi \varepsilon_0 R_1 R_2} \text{ και } C = \frac{Q}{V_0} = \frac{8\pi \varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων στην επιφάνεια $r = R_1$ είναι $\sigma_b|_{r=R_1} = \vec{P}|_{r=R_1} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{\varepsilon_0 V_0 R_2 (1 + \cos \theta)}{(R_2 - R_1) R_1}$ και άρα η συνολική επιφανειακή πυκνότητα είναι σφαιρικά συμμετρική $\sigma|_{r=R_1} = \sigma_f|_{r=R_1} + \sigma_b|_{r=R_1} = \frac{\varepsilon_0 V_0 R_2}{(R_2 - R_1) R_1}$, όπως άλλωστε προκύπτει και από την ασυνέχεια του ηλεκτρικού πεδίου $\sigma|_{r=R_1} = \varepsilon_0 (E_r|_{r=R_1^+} - 0)$. Το ίδιο προκύπτει στην επιφάνεια $r = R_2$, όπου $\sigma_f|_{r=R_2} = 0 - D_r|_{r=R_2^-} = -\frac{\varepsilon_0 V_0 R_1 (2 + \cos \theta)}{(R_2 - R_1) R_2}$, $\sigma_b|_{r=R_2} = \vec{P}|_{r=R_2} \cdot \hat{r} = \frac{\varepsilon_0 V_0 R_1 (1 + \cos \theta)}{(R_2 - R_1) R_2}$, και $\sigma|_{r=R_2} = \sigma_f|_{r=R_2} + \sigma_b|_{r=R_2} = -\frac{\varepsilon_0 V_0 R_1}{(R_2 - R_1) R_2}$. Στο εσωτερικό του διηλεκτρικού δεν υπάρχουν δέσμια φορτία, αφού $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = 0$. Έτσι η κατανομή των φορτίων που δημιουργούν το ηλεκτρικό πεδίο είναι σφαιρικά συμμετρική (παρότι οι επιμέρους κατανομές των ελεύθερων και δέσμιων φορτίων δεν είναι σφαιρικά συμμετρικές) και αυτό συμφωνεί με το ότι και το $\vec{E}$ είναι σφαιρικά συμμετρικό.

[10]: (α) Λόγω συμμετρίας $\vec{D} = D(\varpi) \hat{\varpi}$. Ο νόμος Gauss σε κυλινδρική κλειστή επιφάνεια με άξονα την γραμμική κατανομή φορτίου, ακτίνα $\varpi < R$ και μήκος L δίνει $D(\varpi) 2\pi \varpi L = \lambda L \Leftrightarrow D(\varpi) = \frac{\lambda}{2\pi \varpi}$.

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varpi} \hat{\varpi}$ και το δυναμικό $V(\varpi) = V(R) - \int_R^{\varpi} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 - \int_R^{\varpi} \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varpi} d\varpi = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{\varpi}{R}$.

Αλλιώς: Το δυναμικό $V = V(\varpi)$ δίνεται από την αξιsymμετρική λύση της Laplace $V = a_0 + b_0 \ln \varpi$, οπότε $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{b_0}{\varpi} \hat{\varpi}$. Η απαίτηση να είναι

$V|_{r=R} = 0$ δίνει $a_0 = -b_0 \ln R$. Ο νόμος Gauss σε κυλινδρική επιφάνεια γύρω από τον άξονα δίνει $E 2\pi \varpi L = \lambda L / \varepsilon_0 \Leftrightarrow b_0 = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0}$.

Στο χώρο $\varpi > R$ η προφανής λύση της εξίσωσης Laplace είναι η μηδενική (μηδενίζονται και τα $\vec{E}$, $\vec{D}$).

(β) Από την οριακή $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{\varpi} = \vec{E}|_{\varpi=R^+} - \vec{E}|_{\varpi=R^-} = 0 - \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 R} \hat{\varpi}$ προκύπτει επιφανειακή πυκνότητα φορτίων $\sigma = -\frac{\lambda}{2\pi R}$ στο κέλυφος.

(γ) Το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο εξαρτώνται μόνο από την κυλινδρική απόσταση, δηλ. $V = V(\varpi)$ και $\vec{E} = E(\varpi) \hat{\varpi}$, ώστε να είναι συνεχής τόσο η εφαπτομενική συνιστώσα του $\vec{E}$ όσο και η κάθετη συνιστώσα του $\vec{D}$ (η οποία είναι μηδέν) στην διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ διηλεκτρικού - κενού. Αφού δεν υπάρχουν φορτία χώρου (ούτε μέσα στο διηλεκτρικό αφού $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \rho_f = 0$) το δυναμικό δίνεται από την αξιsymμετρική λύση της Laplace $V = a_0 + b_0 \ln \varpi$. Η απαίτηση να είναι $V|_{r=R} = 0$ δίνει $a_0 = -b_0 \ln R$, δηλ. $V = b_0 \ln \frac{\varpi}{R}$.

Είναι $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{b_0}{\varpi} \hat{\varpi}$, $\vec{D} = -\frac{b_0 \varepsilon_0}{\varpi} \hat{\varpi}$ στο κενό και $\vec{D} = -\frac{b_0 \varepsilon}{\varpi} \hat{\varpi}$ στο διηλεκτρικό. Ο νόμος Gauss $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{f, \varepsilon \gamma \kappa}$ σε κυλινδρική κλειστή επιφάνεια με άξονα την γραμμική κατανομή φορτίου, ακτίνα $\varpi < R$ και μήκος L δίνει $\left(-\frac{b_0 \varepsilon_0}{\varpi}\right) \pi \varpi L + \left(-\frac{b_0 \varepsilon}{\varpi}\right) \pi \varpi L = \lambda L \Leftrightarrow b_0 = -\frac{\lambda}{\pi (\varepsilon + \varepsilon_0)}$. Άρα $V = -\frac{\lambda}{\pi (\varepsilon + \varepsilon_0)} \ln \frac{\varpi}{R}$ για $\varpi < R$ (και μηδέν για $\varpi > R$).

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E} = \frac{\lambda}{\pi (\varepsilon + \varepsilon_0) \varpi} \hat{\varpi}$, και η ηλεκτρική μετατόπιση είναι $\vec{D} = \frac{\lambda \varepsilon_0}{\pi (\varepsilon + \varepsilon_0) \varpi} \hat{\varpi}$ στο κενό και $\vec{D} = \frac{\lambda \varepsilon}{\pi (\varepsilon + \varepsilon_0) \varpi} \hat{\varpi}$ στο διηλεκτρικό.

Θα μπορούσαμε να βρούμε πρώτα τα πεδία και μετά το δυναμικό ως εξής: Ηλεκτρικό πεδίο της μορφής $\vec{E} = E(\varpi) \hat{\varpi}$ σε όλο το χώρο $\varpi < R$ συνεπάγεται ηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D} = \varepsilon_0 E(\varpi) \hat{\varpi}$ στο κενό και $\vec{D} = \varepsilon E(\varpi) \hat{\varpi}$ στο διηλεκτρικό κι έτσι ικανοποιούνται η συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του $\vec{E}$ και της κάθετης συνιστώσας του $\vec{D}$ στην διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ διηλεκτρικού - κενού. Ο νόμος Gauss $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{f, \varepsilon \gamma \kappa}$ σε κυλινδρική κλειστή επιφάνεια με άξονα την γραμμική κατανομή φορ-

τίου, ακτίνα $\varpi < R$ και μήκος L δίνει $\varepsilon_0 E(\varpi) \pi \varpi L + \varepsilon E(\varpi) \pi \varpi L = \lambda L \Leftrightarrow E(\varpi) = \frac{\lambda}{\pi(\varepsilon + \varepsilon_0) \varpi}$. Το δυναμικό προκύπτει από $V = V(R) - \int_R^\varpi \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_R^\varpi E(\varpi) d\varpi = - \frac{\lambda}{\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)} \ln \frac{\varpi}{R}$ για $\varpi < R$ (και μηδέν για $\varpi > R$).

Η επιφανειακή πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων στο κέλυφος δίνεται από την οριακή $\sigma_f = 0 - D_\varpi|_{\varpi=R^-}$ και είναι $-\frac{\lambda \varepsilon_0}{\pi(\varepsilon + \varepsilon_0) R}$ στο μέρος που συνορεύει με το κενό και $-\frac{\lambda \varepsilon}{\pi(\varepsilon + \varepsilon_0) R}$ στο μέρος που συνορεύει με το διηλεκτρικό.

Στο μέρος που συνορεύει με το διηλεκτρικό υπάρχει και δέσμιο φορτίο με επιφανειακή πυκνότητα $\vec{P}|_{\varpi=R^-} \cdot \hat{\varpi} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}|_{\varpi=R^-} \cdot \hat{\varpi} = \frac{\lambda(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\pi(\varepsilon + \varepsilon_0) R}$. Το συνολικό φορτίο σε αυτό το μέρος του κελύφους (ελεύθερο και δέσμιο) είναι $\frac{-\lambda \varepsilon_0}{\pi(\varepsilon + \varepsilon_0) R}$, όσο και στο υπόλοιπο μέρος που συνορεύει με το κενό.

[11]: Αφού $d \ll R$ το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές και ίσο με $E = V/d$ όπου V η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών.¹

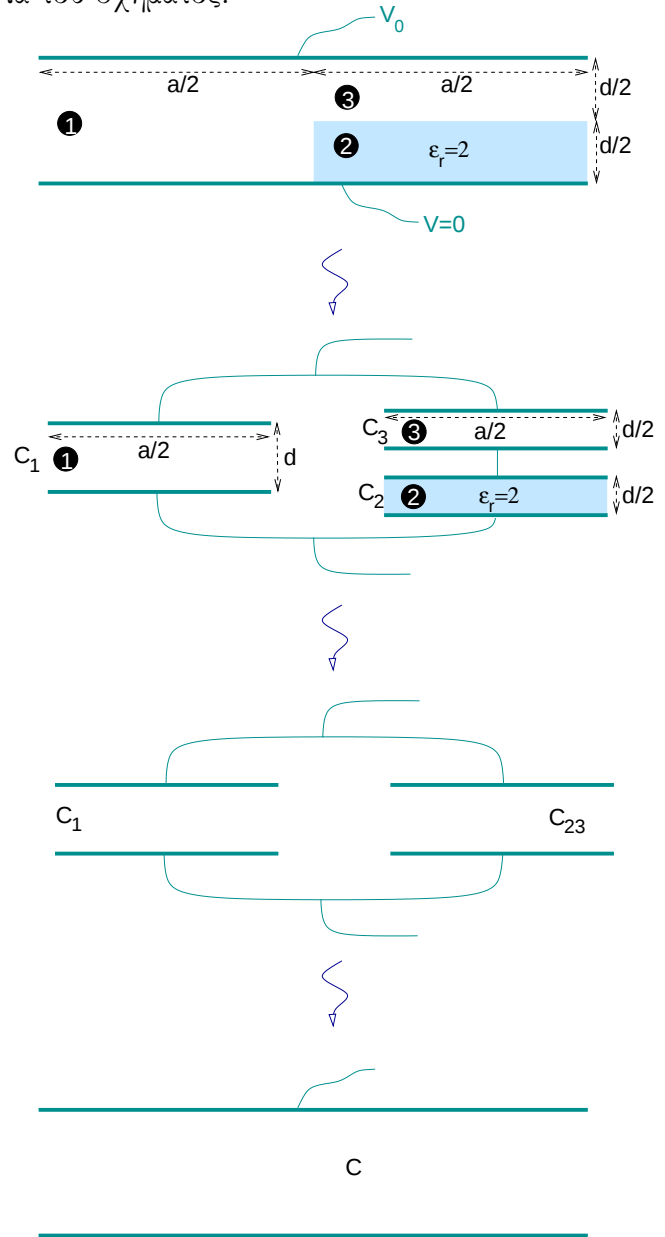
Αγνοώντας τα περατωτικά πεδία οι οριακές συνθήκες για το δυναμικό είναι $V|_{z=0} = V_1$ και $V|_{z=d} = V_2$, όπου θεωρήσαμε ότι οι οπλισμοί βρίσκονται στις θέσεις $z = 0, z = d$ και έχουν δυναμικά V_1, V_2 .

Η λύση της $\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla} V) = 0 \xLeftrightarrow{V=V(\varpi, z)} \frac{d\varepsilon}{d\varpi} \frac{\partial V}{\partial \varpi} + \varepsilon \left[\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial V}{\partial \varpi} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] = 0$ που τις ικανοποιεί (και είναι μοναδική σύμφωνα με το θεώρημα μοναδικότητας) είναι η $V = V_1 + (V_2 - V_1)z/d$, η οποία δίνει ομογενές πεδίο $\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{d} \hat{z}$.

$D = \varepsilon E = \left[\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{\varpi}{R} \right] \frac{V}{d}$ και $\sigma_f = D$, οπότε το ελεύθερο φορτίο στον θετικό οπλισμό είναι $Q = \int_0^R \sigma_f 2\pi \varpi d\varpi = 2\pi \frac{V}{d} \int_0^R \left[\varepsilon_1 \varpi + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{\varpi^2}{R} \right] d\varpi = 2\pi \frac{V}{d} \left[\varepsilon_1 \frac{\varpi^2}{2} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{\varpi^3}{3R} \right]_0^R = \frac{\pi R^2}{d} \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{3} V$.

Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι $C = \frac{Q}{V} = \frac{\pi R^2}{d} \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{3}$.

[12]: Αν αγνοηθούν τα περατωτικά πεδία ο πυκνωτής μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμος με την συνδεσμολογία του σχήματος.



Οι χωρητικότητες των επιμέρους πυκνωτών είναι γνωστές (βρίσκονται από $C_i = \frac{Q_i}{V_i} = \frac{\sigma_f A_i}{E_i d_i} = \frac{D_i A_i}{E_i d_i} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ri} A_i}{d_i}$ όπου A_i το εμβαδόν των πλακών και d_i η απόσταση μεταξύ τους): $C_1 = \frac{\varepsilon_0 A/2}{d} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{2d}$, $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A/2}{d/2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r a^2}{d}$, $C_3 = \frac{\varepsilon_0 A/2}{d/2} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}$. Οι C_2 και C_3 συνδεδεμένοι σε σειρά ισοδυναμούν με ένα πυκνωτή χωρητικότητας $C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r a^2}{(\varepsilon_r + 1)d}$. (Απόδειξη: Η διαφορά δυναμικού στον πυκνωτή C_{23} είναι το άθροισμα των επιμέρους διαφορών δυναμικού ενώ το φορτίο είναι ίδιο, οπότε $V_{23} =$

¹ Κατά την διάρκεια της εξέτασης είχε δοθεί προφορικά η υπόδειξη να θεωρηθεί το πεδίο $\vec{E}$ ομογενές.

$$V_2 + V_3 \Leftrightarrow \frac{Q_{23}}{C_{23}} = \frac{Q_{23}}{C_2} + \frac{Q_{23}}{C_3} \Leftrightarrow \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.)$$

Το ελεύθερο φορτίο στον πυκνωτή C_{23} είναι $Q_{23} = C_{23}V_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r a^2 V_0}{(\varepsilon_r + 1)d}$. Αυτό είναι το ελεύθερο φορτίο και στους πυκνωτές C_2 και C_3 . Επομένως οι επιμέρους διαφορές δυναμικού είναι $V_2 = \frac{Q_{23}}{C_2} = \frac{V_0}{\varepsilon_r + 1}$ και $V_3 = \frac{Q_{23}}{C_3} = \frac{V_0 \varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}$.

Οι C_1 και C_{23} συνδεόμενοι παράλληλα ισοδυναμούν με ένα πυκνωτή χωρητικότητας $C = C_1 + C_{23} = \frac{1 + 3\varepsilon_r \varepsilon_0 a^2}{1 + \varepsilon_r} \frac{1}{2d}$. (Απόδειξη: Η διαφορά δυναμικού είναι ίδια ενώ το φορτίο στον συνολικό πυκνωτή είναι το άθροισμα των επιμέρους φορτίων, οπότε $Q = Q_1 + Q_{23} \Leftrightarrow CV_0 = C_1 V_0 + C_{23} V_0 \Leftrightarrow C = C_1 + C_{23}$.) Στην περιοχή ❶ είναι $E_1 = \frac{V_0}{d}$ και $D_1 = \varepsilon_0 E_1$.

Στην περιοχή ❷ είναι $E_2 = \frac{V_2}{d/2} = \frac{2}{\varepsilon_r + 1} \frac{V_0}{d}$ και $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_2$.

Στην περιοχή ❸ είναι $E_3 = \frac{V_3}{d/2} = \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} \frac{V_0}{d}$ και $D_3 = \varepsilon_0 E_3$.

Για την περίπτωση με $\varepsilon_r = 2$ προκύπτει

$$E = \frac{V_0}{d} \times \begin{cases} 1, & \text{στο μέρος ❶} \\ 2/3, & \text{στο μέρος ❷} \\ 4/3, & \text{στο μέρος ❸} \end{cases}$$

$$D = \frac{\varepsilon_0 V_0}{d} \times \begin{cases} 1, & \text{στο μέρος ❶} \\ 4/3, & \text{στα μέρη ❷ και ❸} \end{cases}$$

Επιλέγοντας σύστημα $Oxyz$ με αρχή το μέσο της αρνητικής πλάκας και άξονα y κάθετο στις πλάκες έτσι ώστε η αρνητική πλάκα (με $V = 0$) να είναι στο $y = 0$ και η θετική (με $V = V_0$) να είναι στο $y = d$, η ένταση του πεδίου είναι

$$\vec{E} = -\hat{y} \frac{V_0}{d} \times \begin{cases} 1, & \text{στο μέρος ❶} \\ 2/3, & \text{στο μέρος ❷} \\ 4/3, & \text{στο μέρος ❸} \end{cases} \text{ και το}$$

δυναμικό προκύπτει $V = -\int_0^y \vec{E} \cdot \hat{y} dy = \frac{V_0}{d} \times \begin{cases} y, & \text{στο μέρος ❶} \\ \frac{2}{3}y, & \text{στο μέρος ❷} \\ \frac{4}{3}y - d, & \text{στο μέρος ❸} \end{cases}$

Κοιτάζοντας το αποτέλεσμα για τα πεδία $\vec{E}$, $\vec{D}$ και V παρατηρούμε ότι η κάθετη συνιστώσα του $\vec{D}$ στις επιφάνειες του διηλεκτρικού είναι συνεχής όπως θα έπρεπε. Η παράλληλη συνιστώσα όμως του $\vec{E}$ στην επιφάνεια $x = 0$, $y < d/2$ που χωρίζει τα μέρη ❶-❷ και στην επιφάνεια $x = 0$, $y > d/2$ που χωρίζει τα μέρη ❷-❸ δεν είναι συνεχής. Το ίδιο φαίνεται και από τη συνάρτηση του δυναμικού, η οποία δεν είναι συνεχής στην περιοχή $x \approx 0$ (για παράδειγμα είναι

$V(x = 0^-, y = d/4) = d/4$ ενώ $V(x = 0^+, y = d/4) = d/6$). Αυτό οφείλεται στο ότι έχουμε αγνοήσει τα περατωτικά πεδία στην περιοχή $x \approx 0$, μέσω των οποίων γίνεται ομαλά η μετάβαση από την μια στην άλλη τιμή της έντασης του πεδίου ή του δυναμικού.

Τα σχήματα της επόμενης σελίδας δείχνουν το πλήρες πεδίο στο εσωτερικό και το εξωτερικό του πυκνωτή, όπως προκύπτει από αριθμητική επίλυση της εξίσωσης $\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_r \vec{\nabla} V) = 0$ (η οποία προκύπτει από $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ με $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{\nabla} V$) στην περίπτωση όπου $V_0 = 1$, $a = 10$, $d = 1$. Η θετική πλάκα (με $V = 1$) αντιστοιχεί σε $1 \leq y \leq 1.1$, $-5 \leq x \leq 5$, η αρνητική (με $V = 0$) σε $-0.1 \leq y \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$, η διηλεκτρική σταθερά είναι $\varepsilon_r = 2$ για $0 < x < 5$, $0 < y < 0.5$ και $\varepsilon_r = 1$ στον υπόλοιπο χώρο, υπάρχει συμμετρία ως προς z , δηλ. $V = V(x, y)$, και έχει υποθεθεί ότι το δυναμικό είναι $V = 0$ στο άπειρο.

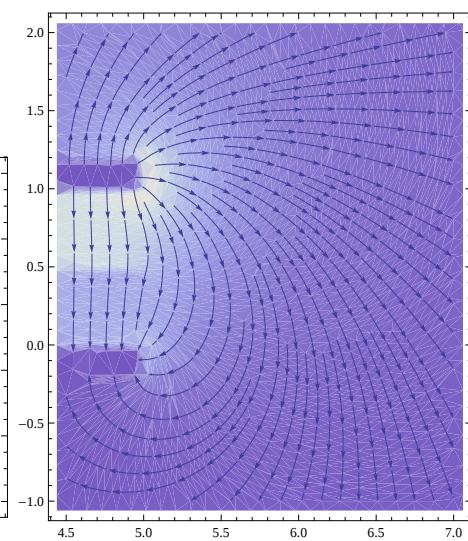
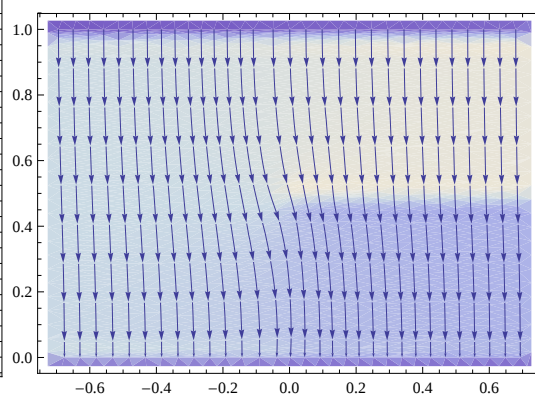
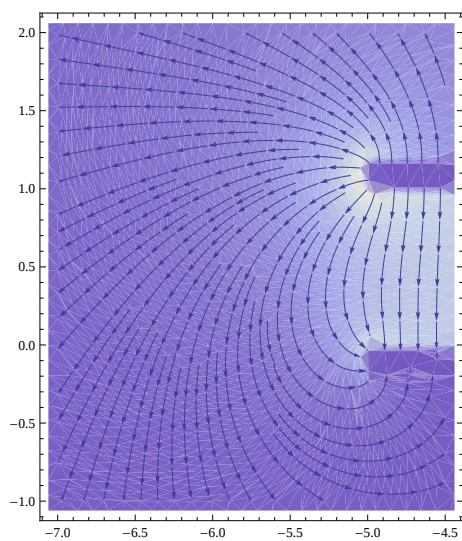
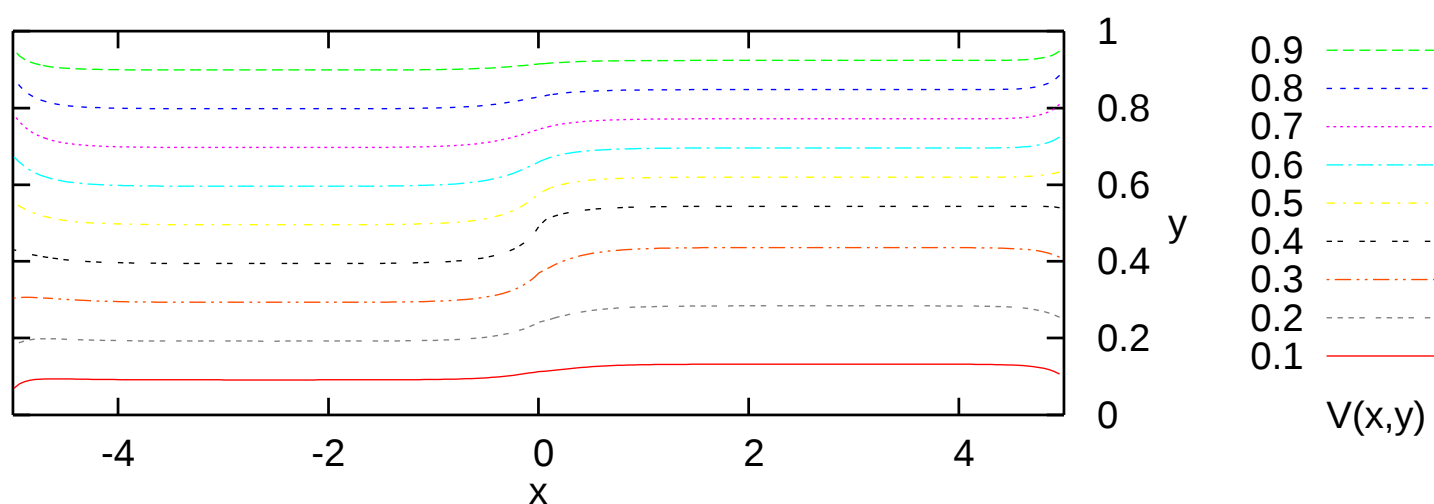
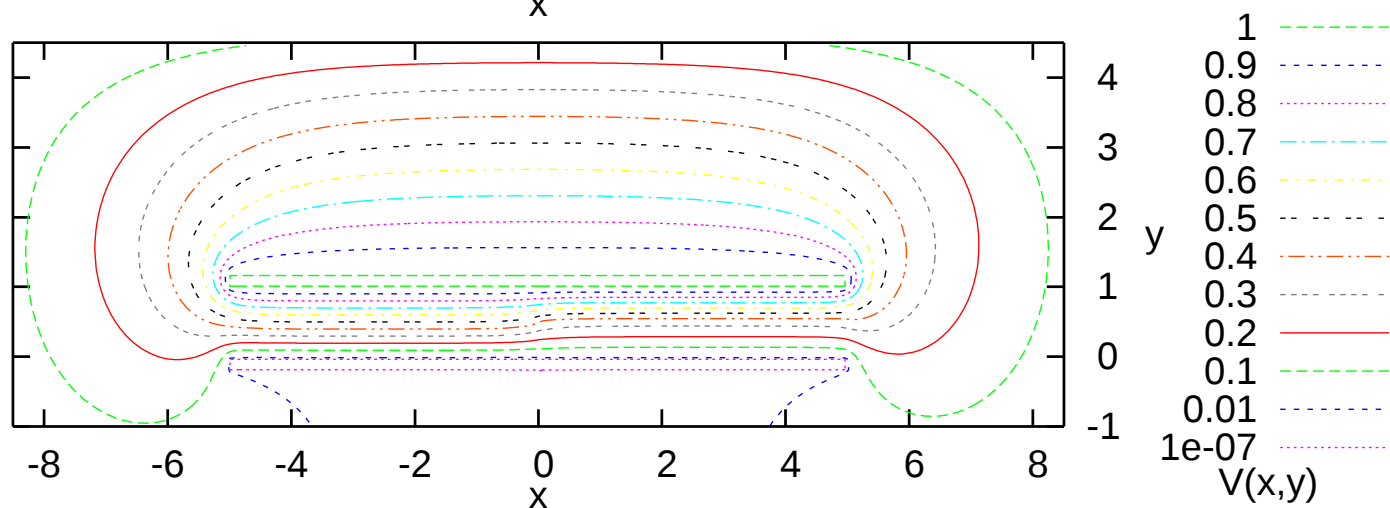
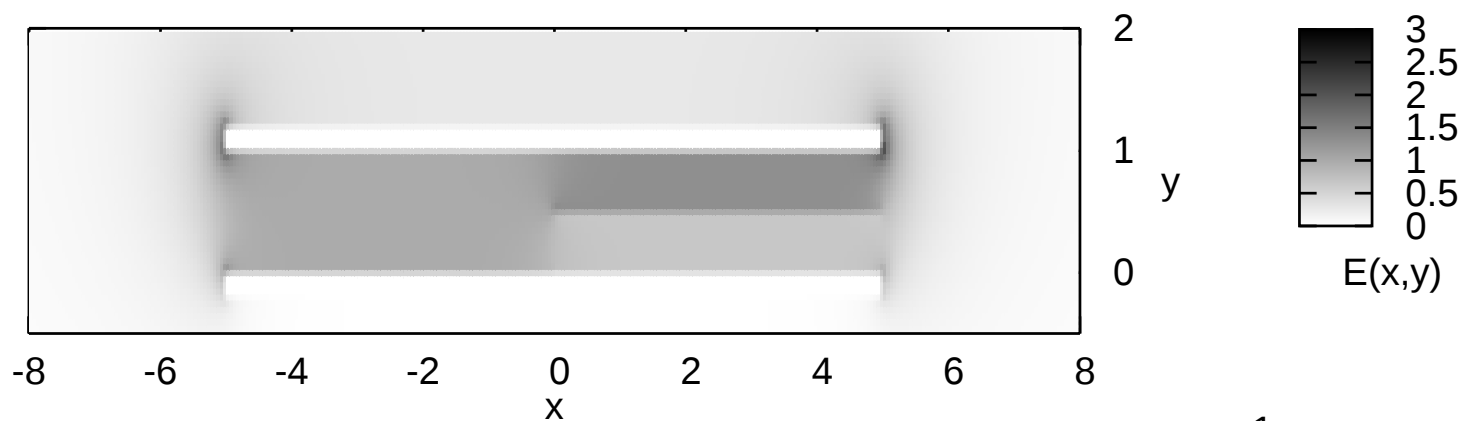
Το πρώτο σχήμα δείχνει το μέτρο της έντασης $|\vec{E}|$. Το δεύτερο και τρίτο σχήμα δείχνουν τις ισοδυναμικές επιφάνειες (σε όλο το χώρο και στο εσωτερικό του πυκνωτή, αντίστοιχα). Έμμεσα μπορούμε να σκεφτούμε το πεδίο $\vec{E}$ από αυτά, σαν κάθετο στις ισοδυναμικές και με φορά από μεγαλύτερο σε μικρότερο δυναμικό. Τα σχήματα αυτά δείχνουν ότι η αναλυτική λύση για το εσωτερικό του πυκνω-

τή $\vec{E} = -\hat{y} \times \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2/3, & x > 0, y < 1/2 \\ 4/3, & x > 0, y > 1/2 \end{cases}$ και $V =$

$$\begin{cases} y, & x \leq 0 \\ \frac{2}{3}y, & x \geq 0, y \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4y-1}{3}, & x \geq 0, y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ είναι καλή προσέγγιση.}$$

Τα τρία σχήματα της τελευταίας σειράς δείχνουν τα περατωτικά πεδία στα άκρα του πυκνωτή και στην κεντρική του περιοχή. Συγκεκριμένα, στα σχήματα αυτά φαίνονται οι δυναμικές γραμμές του $\vec{D}$, οι οποίες είναι παράλληλες με αυτές του $\vec{E}$, ενώ με χρώμα φαίνεται το μέτρο της έντασης $|\vec{E}|$.

Το πεδίο $\vec{D}$ είναι συνεχές στην κεντρική περιοχή (αφού δεν υπάρχει ελεύθερο φορτίο στο εσωτερικό του πυκνωτή). Αφού όμως υπάρχει $D_x \neq 0$ οι δυναμικές γραμμές διαθλώνται όταν τέμνουν την επιφάνεια του διηλεκτρικού. Η ύπαρξη $D_x > 0$ σημαίνει ότι υπάρχει και $P_x > 0$ στο εσωτερικό του διηλεκτρικού, οπότε η πλευρά $x = 0$ του διηλεκτρικού έχει αρνητικό δέσμιο φορτίο με $\sigma_b = \vec{P} \cdot (-\hat{x}) = -P_x$ (το φορτίο αυτό είναι πολύ μικρότερο του αρνητικού δέσμιου φορτίου της πλευράς $y = 1/2$ το οποίο έχει $\sigma_b = P_y|_{y=1/2} < 0$ και είναι σχεδόν αντίθετο του θετικού δέσμιου φορτίου της πλευράς $y = 0$ που έχει $\sigma_b = -P_y|_{y=0} < 0$).



Οι γραμμές του $\vec{E}$ επίσης διαθλώνται όταν τέμνουν την επιφάνεια του διηλεκτρικού. Επιπλέον, λόγω της ύπαρξης επιφανειακού φορτίου, η $\vec{E}$ είναι ασυνεχής: Ένα υποσύνολο των δυναμικών γραμμών του $\vec{E}$ που έχουν ξεκινήσει από την θετική πλάκα καταλήγουν στα αρνητικά φορτία των πλευρών $x = 0$ και $y = 1/2$ του διηλεκτρικού και οι υπόλοιπες, αφού διαθλαστούν, συνεχίζουν στο εσωτερικό του διηλεκτρικού και καταλήγουν στην πλευρά $y = 0$.

Μέσω των παραπάνω μπορούμε να καταλάβουμε πως παρακάμπτεται η ισότητα της E_y στα μέρη ❶ ❷ ❸ του πυκνωτή (αριστερά, δεξιά και κάτω, δεξιά και πάνω, αντίστοιχα): Το λεπτό σημείο είναι η ύπαρξη συνιστώσας E_x (έστω μικρής σε σχέση με την E_y), μέσω της οποίας το πεδίο μπορεί να «απλώνεται» οδηγώντας σε ομαλή μετάβαση της E_y από την τιμή -1 στο μέρος ❶ του πυκνωτή στην τιμή $-2/3$ στο μέρος ❷ και από την τιμή -1 στο μέρος ❶ στην τιμή $-4/3$ στο μέρος ❸.

Τελικά οι συνθήκες που καθορίζουν τα πεδία στις τρεις περιοχές του εσωτερικού του πυκνωτή (αγνοώντας τα περατωτικά πεδία) είναι αφενός η συνέχεια της D_y μεταξύ των μερών ❷ και ❸ και αφετέρου η απαίτηση η διαφορά δυναμικού $-\int_{x,y=0}^{x,y=d} E_y dy$ να

είναι V_0 και στα αρνητικά και στα θετικά x . (Η συνέχεια της E_y δεν πρέπει να ληφθεί υπόψη.)

Γράφοντας τα πεδία $\vec{E} = -\hat{y} \times \begin{cases} E_1, & \text{στο μέρος ❶} \\ E_2, & \text{στο μέρος ❷} \\ E_3, & \text{στο μέρος ❸} \end{cases}$

και $\vec{D} = -\varepsilon_0 \hat{y} \times \begin{cases} E_1, & \text{στο μέρος ❶} \\ \varepsilon_r E_2, & \text{στο μέρος ❷} \\ E_3, & \text{στο μέρος ❸} \end{cases}$

οι παραπάνω συνθήκες δίνουν

$$\begin{cases} \varepsilon_r E_2 = E_3 \\ E_1 d = V_0 \\ E_2 \frac{d}{2} + E_3 \frac{d}{2} = V_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{V_0}{d} \\ E_2 = \frac{2}{1 + \varepsilon_r} \frac{V_0}{d} \\ E_3 = \frac{2\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{V_0}{d} \end{cases}$$

Η επιφανειακή πυκνότητα του ελεύθερου φορτίου στην θετική πλάκα είναι $\sigma_f = D =$

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \frac{V_0}{d}, x < 0 \\ \varepsilon_0 \frac{2\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{V_0}{d}, x > 0 \end{cases} \quad \text{επομένως } Q = \varepsilon_0 \frac{V_0 A}{d} + \varepsilon_0 \frac{2\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{V_0 A}{d} \frac{2}{2} = \varepsilon_0 \frac{V_0}{d} \frac{1 + 3\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{a^2}{2} \quad \text{και η χωρητικό-} \\ \text{τητα } C = \frac{Q}{V_0} = \frac{1 + 3\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{\varepsilon_0 a^2}{2d}. \quad \text{Ειδικά για } \varepsilon_r = 2 \\ \text{προκύπτει } C = \frac{7\varepsilon_0 a^2}{6d}.$$