

[1]: (α) Πρόβλημα 3.26 από Griffiths:

Μια σφαίρα ακτίνας R , με κέντρο στην αρχή των αξόνων, φέρει πυκνότητα φορτίου $\rho(r, \theta) = k \frac{R}{r^2} (R - 2r) \sin \theta$, όπου k είναι μία σταθερά και r, θ είναι οι γνωστές σφαιρικές συντεταγμένες. Βρείτε το προσεγγιστικό δυναμικό για σημεία του άξονα z , μακριά από τη σφαίρα.

(β) Επαναλάβετε για σημεία πάνω στον x άξονα.

Δίνεται ο τετραπολικός όρος του πολυπολικού αναπτύγματος $V_{\text{τετρ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \iiint r'^2 P_2(\hat{r} \cdot \hat{r}') \rho(\vec{r}') d\tau'$

με $P_2(\hat{r} \cdot \hat{r}') = \frac{3(\hat{r} \cdot \hat{r}')^2 - 1}{2}$ και το ολοκλήρωμα $\int \sin^4 \theta' d\theta' = \frac{3\theta'}{8} - \frac{\sin(2\theta')}{4} + \frac{\sin(4\theta')}{32} + C$.

[2]: Σε Καρτεσιανό σύστημα έχουμε τρία φορτία $+q$ στις θέσεις $(0, 0, 0)$, $(-a, a, 0)$, $(a, -a, 0)$ και δύο φορτία $-q$ στις θέσεις $(a, a, 0)$, $(-a, -a, 0)$.

(α) Ποιος ο προσεγγιστικός τύπος για το δυναμικό $V \approx V_0(r)$ σε αποστάσεις $r \gg a$ από το $(0, 0, 0)$;

(β) Κρατώντας και την επόμενη διόρθωση, δείξτε ότι η έκφραση του δυναμικού σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $V \approx V_0(r) \left(1 - 12 \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi\right)$.

[3]: Σφαιρικός φλοιός απειροστού πάχους και ακτίνας R είναι φορτισμένος με φορτίο επιφανειακής πυκνότητας $\sigma(\theta)$ (όπου θ η σφαιρική συντεταγμένη συστήματος με αρχή το κέντρο του φλοιού).

(α) Αν η ακτινική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο επίπεδο του ισημερινού $\theta = \pi/2$ είναι μηδέν, δηλαδή $E_r(r, \theta = \pi/2) = 0$, ποιο είναι το συνολικό φορτίο του φλοιού;

(β) Αν έξω από το φλοιό η ακτινική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στον ημιάξονα συμμετρίας $\theta = 0$ είναι $E_r(r > R, \theta = 0) = E_0 \left(\frac{R}{r}\right)^5$, ποια η διπολική ροπή του φλοιού;

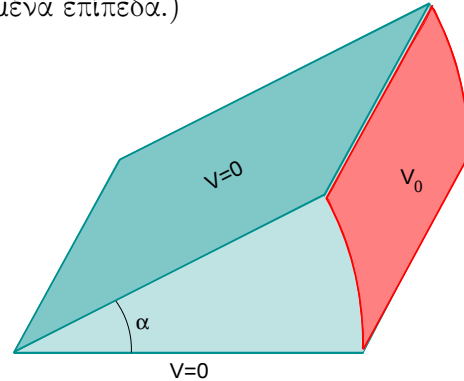
(γ) Ποια η επιφανειακή πυκνότητα $\sigma(\theta)$ αν ξέρουμε ότι $E_r(r < R, \theta = 0) = -\frac{3}{4} E_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2$;

Υπόδειξη: Η λύση της εξίσωσης Laplace $V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r^{\ell+1}} b_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$ έξω από κάποια αξι-συμμετρική κατανομή φορτίου είναι ισοδύναμη με το πολυπολικό ανάπτυγμα

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r^{\ell+1}} \int (r')^{\ell} P_{\ell}(\hat{r} \cdot \hat{r}') dq.$$

Δίνονται τα πολώνυμα Legendre $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ και η τιμή τους $P_{\ell}(1) = 1$.

[4]: Δύο γειωμένα αγωγίμα ημιεπίπεδα βρίσκονται στις θέσεις $\phi = 0$ και $\phi = a$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες (ϖ, ϕ, z) , δηλ. σχηματίζουν γωνία a μεταξύ τους. Στη θέση $\varpi = R$, δηλ. σε απόσταση R από τον κοινό άξονα των επιπέδων (τον άξονα z), βρίσκεται ηλεκτρόδιο σε δυναμικό V_0 . (Μονωτικά στρώματα εμποδίζουν το ηλεκτρόδιο να έρθει σε επαφή με τα γειωμένα επίπεδα.)



(α) Δείξτε ότι το δυναμικό στην περιοχή που περιχλείται από το ηλεκτρόδιο και τα επίπεδα είναι $V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{n\pi/a} \sin\left(\frac{n\pi\phi}{a}\right)$.

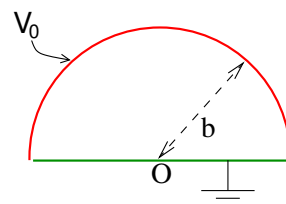
Υπόδειξη: Χωρίστε τις μεταβλητές στη συνάρτηση του δυναμικού $V = \Pi(\varpi) \Phi(\phi)$, δείτε τι δίνει η εξίσωση Laplace, αλλά μην απαιτήσετε η συνάρτηση $\Phi(\phi)$ να έχει περίοδο 2π . Αντ' αυτού απαιτήσετε $\Phi(\phi = 0) = 0$ και $\Phi(\phi = a) = 0$.

(β) Δείξτε ότι το αποτέλεσμα γράφεται σε κλειστή μορφή $V = \frac{2V_0}{\pi} \arctan \frac{2(\varpi/R)^{\pi/a} \sin(\pi\phi/a)}{1 - (\varpi/R)^{2\pi/a}}$.

Παρατήρηση: Το πρόβλημα είναι όμοιο με το παράδειγμα 3.3 του Griffiths, σχέση 3.36, με $y \rightarrow \phi$ και $x \rightarrow \ln(R/\varpi)$. Γενικότερα τα προβλήματα επίλυσης της εξίσωσης Laplace με κυλινδρική συμμετρία σε χωρίο $\{\phi_1 < \phi < \phi_2, \varpi_1 < \varpi < \varpi_2\}$ των κυλινδρικών συντεταγμένων είναι όμοια με αυτά των διδιάστατων καρτεσιανών σε χωρίο $\{y_1 < y < y_2, x_1 < x < x_2\}$ διότι η εξίσωση Laplace γράφεται όπως στις καρτεσιανές με $x = \ln \varpi$, $y = \phi$.

[5]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 2/10/2015:

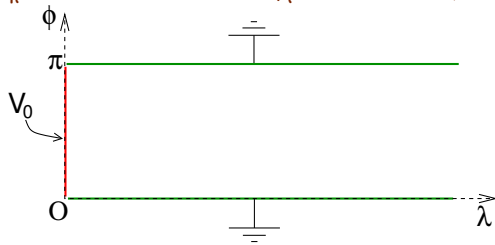
Ημικύλινδρος απείρου μήκους έχει ως συντεταγμένες $0 < \varpi < b$, $0 < \phi < \pi$, $-\infty < z < +\infty$ και δυναμικά στην επιφάνειά του όπως στο σχήμα (με $V_0 = \text{σταθ.}$).



Να βρεθεί το δυναμικό στο εσωτερικό του.

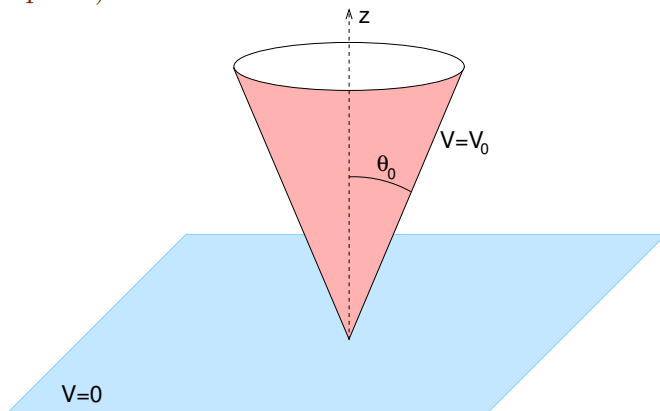
Υπόδειξη: Δείξτε ότι η εξίσωση Laplace

$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial V}{\partial \varpi} \right) + \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$ με τον μετασχηματισμό $\varpi = be^{-\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \ln \frac{b}{\varpi}$ γίνεται $\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$ και άρα προκύπτει το γνωστό πρόβλημα του επόμενου σχήματος στις συντεταγμένες λ και ϕ .



[6]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 1/10/2012:

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $V(\theta) = A \ln [\cot(\theta/2)] + B$ (σε σφαιρικές συντεταγμένες), όπου A και B σταθερές, είναι αρμονική (δηλ. ικανοποιεί την εξίσωση Laplace).



(β) Βρείτε το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο χώρο μεταξύ της επιφάνειας κώνου και άπειρης γειωμένης πλάκας. Ο κώνος έχει τον άξονά του κάθετο στην πλάκα, την κορυφή του σε μονωμένη επαφή με την πλάκα και έχει φορτιστεί σε σταθερό δυναμικό V_0 . Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε σαν γενική λύση την συνάρτηση του ερωτήματος (α).

[7]: Αγωγός με ελλειψοειδές σχήμα $\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ είναι φορτισμένος με φορτίο Q .

(α) Ποια η κατανομή φορτίου στην επιφάνειά του και ποιο το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί;

Υπόδειξη: Ανάλογα με το αν $b > c$ ή $b < c$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν γεωειδείς ή ωσειδείς σφαιροειδείς συντεταγμένες (δες παρακάτω).¹ Από τη μορφή που έχει η Laplacian φαίνεται ότι η λύση για το

πρόβλημα αυτό είναι της μορφής $V = V(\mu)$. Προσδιορίστε τη σταθερά ολοκλήρωσης στην έκφραση της $\frac{dV}{d\mu}$ από την συνθήκη πολύ μακριά από τον αγωγό

το πεδίο να είναι $\vec{E} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$.

Επιλέγοντας κατάλληλα τις σταθερές b και c βρείτε: (β) τη συνολική (και από τις δυο πλευρές) επιφανειακή πυκνότητα $\sigma(\varpi)$ σε αγωγίμο κυκλικό δίσκο ακτίνας R ,

(γ) τη συνολική γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda(z)$ σε ένα ραβδόμορφο αγωγό.

[8]: Σημειακό φορτίο q βρίσκεται σε θέση $\vec{r}$ από ένα ιδανικό δίπολο ροπής $\vec{p}$. Το δίπολο δημιουργεί πεδίο

$\vec{E}_d = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$ στη θέση του q , οπότε ασχέι

δύναμη $\vec{F}_q = q\vec{E}_d$ και ροπή $\vec{N}_q = \vec{r} \times \vec{F}_q$ στο φορτίο.

(α) Δείξτε ότι η δύναμη και η ροπή που ασχέι το φορτίο στο δίπολο είναι $\vec{F}_d = -\vec{F}_q$, $\vec{N}_d = -\vec{N}_q$.

(β) Έστω το $\vec{p}$ είναι στερεωμένο στην αρχή συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ του οποίου ο άξονας z είναι ομόρροπος με την $\vec{p}$. Σε ποιες θέσεις του φορτίου η δύναμη $\vec{F}_q$ είναι κάθετη στον άξονα z και έχει φορά προς σημείο του άξονα αυτού;

[9]: Ηλεκτρικό δίπολο $\vec{p}_1 = p_1\hat{y}$ είναι στερεωμένο στο κέντρο συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$. Ένα δεύτερο δίπολο $\vec{p}_2 = p_2\hat{x}$ είναι ελεύθερο να κινείται στην ευθεία $z = 0$, $y = b$ (με b =σταθερό) χωρίς να αλλάζει η διπολική του ροπή.

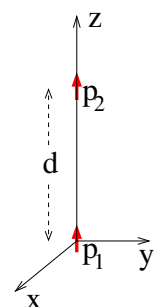
(α) Ποια η δύναμη που ασχέιται στο $\vec{p}_2$ στη διεύθυνση της ευθείας πάνω στην οποία κινείται;

(β) Ποια η ενέργεια αλληλεπίδρασης των διπόλων;

(γ) Ποιο σημείο της ευθείας αποτελεί σημείο ευσταθούς ισορροπίας του $\vec{p}_2$;

[10]: Θέμα 2^ο από εξέταση της 6/2/2012:

Ένα ηλεκτρικό δίπολο με διπολική ροπή $\vec{p}_1 = p_1\hat{z}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Ένα δεύτερο δίπολο διπολικής ροπής $\vec{p}_2 = p_2\hat{z}$ βρίσκεται πάνω στον άξονα z και σε απόσταση d από την αρχή. Βρείτε την δύναμη μεταξύ τους. Είναι ελκτική ή απωστική;



¹Μια άλλη μέθοδος επίλυσης μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο του William Ralph Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, 3rd edition, (McGraw-Hill Book Company), σελ. 121-124.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x, y, z)	Κυλινδρικές (ϖ, ϕ, z)	Σφαιρικές (r, θ, ϕ)
		$\begin{cases} x = \varpi \cos \phi \\ y = \varpi \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
$\vec{v}$	$v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$	$v_\varpi \hat{\varpi} + v_\phi \hat{\phi} + v_z \hat{z}$	$v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \varpi} \hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial (\varpi v_\varpi)}{\partial \varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
$\vec{\nabla} \times \vec{v}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{x} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{y} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{z}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi} \\ \frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial (\varpi v_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix} \hat{\varpi} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi} \\ \frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial (\varpi v_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix} \hat{\phi} +$ $\frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial (\varpi v_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} \right] \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$
$\vec{\nabla}^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial f}{\partial \varpi} \right) + \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$d\vec{l}$	$dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\varpi \hat{\varpi} + \varpi d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
$d\vec{a}$	$dydz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$	$\varpi d\phi dz \hat{\varpi} + d\varpi dz \hat{\phi} + \varpi d\varpi d\phi \hat{z}$	$r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$
$d\tau$	$dx dy dz$	$\varpi d\varpi d\phi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Γεωμετρικές σφαιροειδείς συντεταγμένες (μ, ϕ, ν)

Είναι ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες που ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις, με a θετική σταθερά και $\mu \geq 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $-\pi/2 \leq \nu \leq \pi/2$

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cosh \mu \cos \nu \cos \phi \\ y &= a \cosh \mu \cos \nu \sin \phi \\ z &= a \sinh \mu \sin \nu \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{a^2 \cosh^2 \mu} + \frac{z^2}{a^2 \sinh^2 \mu} &= 1 \text{ (ελλειψοειδές)} \\ y \cos \phi - x \sin \phi &= 0 \text{ (επίπεδο)} \\ \frac{x^2 + y^2}{a^2 \cos^2 \nu} - \frac{z^2}{a^2 \sin^2 \nu} &= 1 \text{ (μονόχωνο υπερβολοειδές)} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mu &= \operatorname{arcsinh} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{2a^2} \right)^2 + \frac{z^2}{a^2}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{2a^2}} \\ \phi &= \left\{ \text{κοινή λύση των } \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \\ \nu &= \frac{z}{|z|} \arcsin \sqrt{\sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{2a^2} \right)^2 + \frac{z^2}{a^2}} - \frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{2a^2}} \end{aligned} \right.$$

Τα στοιχεία μήκους και τα μοναδιαία γράφονται

$$\left. \begin{aligned} h_\mu &= a \sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}, & \hat{\mu} &= \frac{\sinh \mu \cos \nu (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) + \cosh \mu \sin \nu \hat{z}}{\sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}} \\ h_\phi &= a \cosh \mu \cos \nu, & \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ h_\nu &= a \sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}, & \hat{\nu} &= \hat{\mu} \times \hat{\phi} \end{aligned} \right\}$$

το στοιχειώδες μήκος είναι $d\vec{r} = h_\mu d\mu \hat{\mu} + h_\phi d\phi \hat{\phi} + h_\nu d\nu \hat{\nu}$

$$\text{ενώ η Laplacian } \nabla^2 V = \frac{1}{h_\mu h_\phi h_\nu} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{h_\phi h_\nu}{h_\mu} \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{h_\mu h_\nu}{h_\phi} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{h_\mu h_\phi}{h_\nu} \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{a^2 (\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu)} \left[\frac{1}{\cosh \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\cosh \mu \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\cos \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\cos \nu \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) \right] + \frac{1}{a^2 \cosh^2 \mu \cos^2 \nu} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

$$\text{και η κλίση } \vec{\nabla} V = \frac{1}{h_\mu} \frac{\partial V}{\partial \mu} \hat{\mu} + \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{h_\nu} \frac{\partial V}{\partial \nu} \hat{\nu}.$$

Ωοειδείς σφαιροειδείς συντεταγμένες (μ, ν, ϕ)

Είναι ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες που ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις, με a θετική σταθερά και $\mu \geq 0, 0 \leq \nu \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sinh \mu \sin \nu \cos \phi \\ y &= a \sinh \mu \sin \nu \sin \phi \\ z &= a \cosh \mu \cos \nu \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{a^2 \sinh^2 \mu} + \frac{z^2}{a^2 \cosh^2 \mu} &= 1 \text{ (ελλειψοειδές)} \\ \frac{z^2}{a^2 \cos^2 \nu} - \frac{x^2 + y^2}{a^2 \sin^2 \nu} &= 1 \text{ (δίκωνο υπερβολοειδές)} \\ y \cos \phi - x \sin \phi &= 0 \text{ (επίπεδο)} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mu &= \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{2a^2} + \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{2a^2}\right)^2 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}}} \\ \nu &= \arccos \left[\frac{z}{|z|} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2 + a^2}{2a^2} - \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{2a^2}\right)^2 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}}} \right] \\ \phi &= \left\{ \text{κοινή λύση των } \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \end{aligned} \right.$$

Τα στοιχεία μήκους και τα μοναδιαία γράφονται

$$\left. \begin{aligned} h_\mu &= a \sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}, & \hat{\mu} &= \frac{\cosh \mu \sin \nu (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) + \sinh \mu \cos \nu \hat{z}}{\sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}} \\ h_\nu &= a \sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}, & \hat{\nu} &= \frac{\sinh \mu \cos \nu (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) - \cosh \mu \sin \nu \hat{z}}{\sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}} \\ h_\phi &= a \sinh \mu \sin \nu, & \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} = \hat{\mu} \times \hat{\nu} \end{aligned} \right\}$$

το στοιχειώδες μήκος είναι $d\vec{r} = h_\mu d\mu \hat{\mu} + h_\nu d\nu \hat{\nu} + h_\phi d\phi \hat{\phi}$

ενώ η Laplacian $\nabla^2 V = \frac{1}{h_\mu h_\nu h_\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{h_\nu h_\phi}{h_\mu} \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{h_\mu h_\phi}{h_\nu} \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{h_\mu h_\nu}{h_\phi} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \right] =$

$$\frac{1}{a^2 (\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu)} \left[\frac{1}{\sinh \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sinh \mu \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sin \nu \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) \right] + \frac{1}{a^2 \sinh^2 \mu \sin^2 \nu} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

και η κλίση $\vec{\nabla} V = \frac{1}{h_\mu} \frac{\partial V}{\partial \mu} \hat{\mu} + \frac{1}{h_\nu} \frac{\partial V}{\partial \nu} \hat{\nu} + \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$.

ΛΥΣΕΙΣ:

[1]: (α)

(β) Για σημεία πάνω στον άξονα x , είναι $\vec{r} = x\hat{x}$ και $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \pm\hat{x}$. Άρα $\hat{r} \cdot \hat{r}' = \pm \sin\theta' \cos\phi'$

(διότι το μοναδιαίο προς τυχαίο σημείο της κατανομής με σφαιρικές συντεταγμένες (r', θ', ϕ') είναι $\hat{r}' = \sin\theta' \cos\phi' \hat{x} + \sin\theta' \sin\phi' \hat{y} + \cos\theta' \hat{z}$).

Μονοπολικός όρος δεν υπάρχει αφού $V_{\mu\text{ον}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \iiint P_0(\hat{r} \cdot \hat{r}') \rho(\vec{r}') d\tau'$ και με τις αντικατα-

στάσεις $P_0(\hat{r} \cdot \hat{r}') = 1$, $\rho(\vec{r}') = k \frac{R}{r'^2} (R - 2r') \sin\theta'$, $d\tau' = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$ και ολοκληρώνοντας στα διαστήματα $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ βρίσκουμε $V_{\mu\text{ον}} = \frac{kR}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^R (R - 2r') dr' \int_0^\pi \sin^2\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' = 0$.

Διπολικός όρος δεν υπάρχει γιατί $V_{\text{δι}\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iiint r' P_1(\hat{r} \cdot \hat{r}') \rho(\vec{r}') d\tau'$ και αντικαθιστώντας $P_1(\hat{r} \cdot \hat{r}') = \hat{r} \cdot \hat{r}' = \pm \sin\theta' \cos\phi'$ βρίσκουμε $V_{\text{δι}\pi} = \pm \frac{kR}{4\pi\epsilon_0 x^2} \int_0^R r' (R - 2r') dr' \int_0^\pi \sin^3\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = 0$.

Αντικαθιστώντας στην έκφραση του $V_{\text{τετρ}}$ το πολυώνυμο $P_2(\hat{r} \cdot \hat{r}') = \frac{3\sin^2\theta' \cos^2\phi' - 1}{2}$ βρίσκουμε

$$V_{\text{τετρ}} = \frac{kR}{8\pi\epsilon_0 |x|^3} \int_0^R \overbrace{(Rr'^2 - 2r'^3)}^{-R^4/6} dr' \times \left(\underbrace{3 \int_0^\pi \sin^4\theta' d\theta'}_{3\pi/8} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\phi' d\phi'}_{\pi} - \underbrace{\int_0^\pi \sin^2\theta' d\theta'}_{\pi/2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi'}_{2\pi} \right) = -\frac{k\pi R^5}{384\epsilon_0 |x|^3}.$$

Θα μπορούσαμε να βρούμε τους όρους του πολυπολικού αναπτύγματος του δυναμικού αφού πρώτα βρούμε το φορτίο, την διπολική ροπή και την τετραπολική ροπή της κατανομής.

Το φορτίο της κατανομής είναι $q = \iiint \rho(\vec{r}') d\tau' = kR \int_0^R (R - 2r') dr' \int_0^\pi \sin^2\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' = 0$, άρα δεν υπάρχει μονοπολικός όρος $V_{\mu\text{ον}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Η διπολική ροπή της κατανομής είναι $\vec{p} = \int \vec{r}' dq = 0$ λόγω συμμετρίας, αφού η πυκνότητα σε οποιαδήποτε ζεύγη θέσεων $\pm\vec{r}'$ είναι ίδια (αν η θέση $\vec{r}'$ αντιστοιχεί σε σφαιρικές συντεταγμένες r', θ', ϕ' , δηλ. $\vec{r}' = r' \sin\theta' \cos\phi' \hat{x} + r' \sin\theta' \sin\phi' \hat{y} + r' \cos\theta' \hat{z}$, τότε το αντίθετο διάνυσμα θέσης $-\vec{r}'$ αντιστοιχεί σε σφαιρικές συντεταγμένες $r', \pi - \theta', \phi' + \pi$), οπότε για κάθε $\vec{r}'$ η συνεισφορά $\vec{r}' \rho(\vec{r}') d\tau'$ στην διπολική ροπή αναιρείται από τη συνεισφορά από το αντίθετο

διάνυσμα θέσης).

Το ίδιο προκύπτει από $\vec{p} = \iiint \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\tau'$ αν αντικαταστήσουμε $\vec{r}' = r' \sin\theta' \cos\phi' \hat{x} + r' \sin\theta' \sin\phi' \hat{y} + r' \cos\theta' \hat{z}$, οπότε βρίσκουμε τις συνιστώσες $p_x = kR \int_0^R r' (R - 2r') dr' \int_0^\pi \sin^3\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = 0$, $p_y = kR \int_0^R r' (R - 2r') dr' \int_0^\pi \sin^3\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' = 0$, $p_z = kR \int_0^R r' (R - 2r') dr' \int_0^\pi \sin^2\theta' \cos\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' = 0$ και όλες προκύπτουν μηδέν.

Ο τετραπολικός όρος του δυναμικού μπορεί να γραφεί μέσω της τετραπολικής ροπής της κατανομής $Q_{ij} = \iiint (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') d\tau'$, όπου $x_1 = x$,

$x_2 = y$, $x_3 = z$, σαν $V_{\text{τετρ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} Q_{ij} x_i x_j$,

ή ισοδύναμα $V_{\text{τετρ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1}{2} \hat{r} \cdot \bar{\bar{Q}} \cdot \hat{r}$ με τον ταυιστή δεύτερης τάξης $\bar{\bar{Q}} = \iiint (3\vec{r} \otimes \vec{r} - r^2 \mathbf{I}) \rho(\vec{r}) d\tau$.

Αυτό γιατί $3(\hat{r} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2 = 3 \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{r} x'_i \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{r} x'_j - r'^2 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{x_j}{r}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^3 (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r}$, το οποίο γράφεται και σαν γινόμενο πινάκων

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 3z^2 - r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{bmatrix},$$

οπότε $V_{\text{τετρ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \iiint \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2}{2} \rho(\vec{r}') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r}$. Για τη δεδομένη κατανομή

$$\text{είναι } \bar{\bar{Q}} = \int \begin{bmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 3z^2 - r^2 \end{bmatrix} dq,$$

με στοιχεία:

$$Q_{11} = \iiint (3\sin^2\theta \cos^2\phi - 1) \rho(\vec{r}) r^4 \sin\theta dr d\theta d\phi = -\frac{\pi^2 k R^5}{48}, Q_{12} = \iiint 3\sin^3\theta \cos\phi \sin\phi \rho(\vec{r}) r^4 dr d\theta d\phi = 0,$$

$$Q_{13} = \iiint 3\sin^2\theta \cos\phi \cos\theta \rho(\vec{r}) r^4 dr d\theta d\phi = 0,$$

$$Q_{23} = \iiint 3\sin^2\theta \sin\phi \cos\theta \rho(\vec{r}) r^4 dr d\theta d\phi = 0,$$

$$Q_{33} = \iiint (3\cos^2\theta - 1) \rho(\vec{r}) r^4 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{\pi^2 k R^5}{24}, \text{ ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία προκύπτουν από}$$

το γεγονός ότι ο $\bar{\bar{Q}}$ είναι συμμετρικός και με μηδενικό ίχνος ($Q_{22} = -Q_{11} - Q_{33} = -\frac{\pi^2 k R^5}{48}$),

δηλ. $\bar{Q} = \frac{\pi^2 k R^5}{48} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Σε σημεία

του x άξονα είναι $x_i = x\delta_{i1}$, $r = |x|$, οπότε

$$V_{\text{τερ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x|^5} \frac{1}{2} Q_{11} x^2 = -\frac{k\pi R^5}{384\epsilon_0 |x|^3}.$$

Όμοια για σημεία του άξονα z (ερώτημα α), είναι

$$x_i = z\delta_{i3}, r = |z|, \text{ οπότε } V_{\text{τερ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|z|^5} \frac{1}{2} Q_{33} z^2 = \frac{k\pi R^5}{192\epsilon_0 |z|^3}.$$

Σε οποιοδήποτε σημείο (x, y, z) έξω από τη σφαίρα

$$\text{ο τετραπολικός όρος είναι } V_{\text{τερ}} = \frac{\vec{r} \cdot \bar{Q} \cdot \vec{r}}{8\pi\epsilon_0 r^5} =$$

$$\frac{\pi k R^5}{384\epsilon_0 r^5} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$\frac{\pi k R^5 (2z^2 - x^2 - y^2)}{384\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{\pi k R^5 (3\cos^2\theta - 1)}{384\epsilon_0 r^3}.$$

Όπως αναμενόταν μιας και η κατανομή φορτίου είναι αξισυμμετρική, το αποτέλεσμα είναι ανάλογο της αξισυμμετρικής λύσης της εξίσωσης Laplace $\frac{1}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$ με $\ell = 2$.

[2]: Έστω $q_1 = q_2 = q_3 = +q$, $q_4 = q_5 = -q$ και οι θέσεις $\vec{r}_1 = 0$, $\vec{r}_2 = -a\hat{x} + a\hat{y}$, $\vec{r}_3 = a\hat{x} - a\hat{y}$, $\vec{r}_4 = a\hat{x} + a\hat{y}$, $\vec{r}_5 = -a\hat{x} - a\hat{y}$, με $\vec{r}_3 = -\vec{r}_2$, $\vec{r}_5 = -\vec{r}_4$.

(α) Το συνολικό φορτίο δεν είναι μηδέν, επομένως σε μεγάλες αποστάσεις κυριαρχεί ο μονοπολικός όρος

$$V \approx V_{\text{μον}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^5 q_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

(β) Η διπολική ροπή είναι $\vec{p} = \sum_{i=1}^5 q_i \vec{r}_i = 0$, επομένως

$$\text{ο διπολικός όρος } V_{\text{διπ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \text{ μηδενίζεται.}$$

$$\text{Αλλιώς: } V_{\text{διπ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^5 q_i r_i \underbrace{P_1(\hat{r} \cdot \hat{r}_i)}_{\hat{r} \cdot \hat{r}_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \sum_{i=1}^5 q_i \vec{r}_i = 0.$$

$$\text{Ο τετραπολικός όρος } V_{\text{τερ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^5 q_i r_i^2 P_2(\hat{r} \cdot \hat{r}_i),$$

$$\text{με } r_i^2 P_2(\hat{r} \cdot \hat{r}_i) = r_i^2 \frac{3(\hat{r} \cdot \hat{r}_i)^2 - 1}{2} = \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{r}_i)^2 - r_i^2}{2},$$

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}, r_1 = 0,$$

$$r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = a\sqrt{2}, \hat{r} \cdot \vec{r}_1 = 0,$$

$$\hat{r} \cdot \vec{r}_2 = -a \sin\theta \cos\phi + a \sin\theta \sin\phi, \hat{r} \cdot \vec{r}_3 = -\hat{r} \cdot \vec{r}_2,$$

$$\hat{r} \cdot \vec{r}_4 = a \sin\theta \cos\phi + a \sin\theta \sin\phi, \hat{r} \cdot \vec{r}_5 = -\hat{r} \cdot \vec{r}_4, \text{ γράφεται}$$

$$V_{\text{τερ}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (-12a^2 \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi) =$$

$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(-12 \frac{a^2}{r^2} \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi \right)$, οπότε η προσεγγιστική έκφραση του δυναμικού είναι το άθροισμα του μονοπολικού και του τετραπολικού όρου, δηλ.

$$V \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - 12 \frac{a^2}{r^2} \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi \right).$$

Το ίδιο μπορεί να βρεθεί κατευθείαν από το ανάπτυγμα Taylor της έκφρασης του δυναμικού $V =$

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_i + r_i^2}} =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=1}^5 \frac{q_i}{\sqrt{1 - 2\hat{r} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r} + \frac{r_i^2}{r^2}}} \text{ ως προς } \frac{a}{r}.$$

[3]: Απαιτώντας το δυναμικό να μην απειρίζεται στα $r = 0$ και $r = \infty$, να μηδενίζεται για $r = \infty$ και να είναι συνεχές στην ακτίνα $r = R$ έχουμε

$$V = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_\ell}{R^{2\ell+1}} r^\ell P_\ell(\cos\theta), & \text{αν } r \leq R \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta), & \text{αν } r \geq R \end{cases}$$

Η άλλη οριακή συνθήκη στην ακτίνα $r = R$ σχετίζεται με την ασυνέχεια της E_r συνιστώσας του πεδίου

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \begin{cases} -\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell b_\ell}{R^{2\ell+1}} r^{\ell-1} P_\ell(\cos\theta), & \text{αν } r < R \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+1)b_\ell}{r^{\ell+2}} P_\ell(\cos\theta), & \text{αν } r > R \end{cases}$$

Η ασυνέχεια της E_r δίνει την ακόλουθη έκφραση της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου του φλοιού

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)b_\ell}{R^{\ell+2}} P_\ell(\cos\theta).$$

(α) Πρέπει $-\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell b_\ell}{R^{2\ell+1}} r^{\ell-1} P_\ell(0)$ για κάθε $r < R$

και $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+1)b_\ell}{r^{\ell+2}} P_\ell(0) = 0$ για κάθε $r > R$, οπότε

πρέπει να είναι $b_\ell P_\ell(0) = 0$ για κάθε ℓ . Για $\ell = 0$ είναι $a_0 = 0$ (αφού $P_0(0) = 1 \neq 0$).² Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ο μονοπολικός όρος στο πολυπολικό ανάπτυγμα του δυναμικού $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ (που αντιστοιχεί

στον όρο $\left[\frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \right]_{\ell=0}$ της λύσης για $r > R$,

με $b_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$) και άρα το συνολικό φορτίο της κατανομής (του φλοιού) είναι μηδέν.

Αλλιώς: Το συνολικό φορτίο του φλοιού είναι

$$Q = \iint \sigma da = R^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

²Γενικότερα η σχέση $b_\ell P_\ell(0) = 0$ συνεπάγεται ότι όλα τα b_ℓ με άρτια ℓ πρέπει να μηδενίζονται. Αυτό γιατί η τιμή των πολυωνύμων Legendre $P_\ell(0)$ είναι μηδέν για περιττό ℓ (τα $P_\ell(x)$ είναι περιττά αν ℓ περιττό) και μη μηδενική για άρτιο ℓ .

$$= 2\pi\epsilon_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)b_{\ell}}{R^{\ell}} \underbrace{\int_0^{\pi} P_{\ell}(\cos\theta) \sin\theta d\theta}_{\int_{-1}^1 P_{\ell}(x)P_0(x)dx}$$

Από τη σχέση ορθογωνιότητας των πολωνύμων Legendre το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μη μηδενικό μόνο για $\ell = 0$, οπότε το συνολικό φορτίο προκύπτει $Q = 4\pi\epsilon_0 b_0$.

$$(\beta) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+1)b_{\ell}}{r^{\ell+2}} P_{\ell}(1) = E_0 \left(\frac{R}{r}\right)^5 \Leftrightarrow$$

$$b_{\ell} = \frac{R^5 E_0}{4} \delta_{\ell 3}. \text{ Ο διπολικός όρος στο πολυπολικό}$$

ανάπτυγμα του δυναμικού $\frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ αντιστοιχεί στον

$$\text{όρο } \left[\frac{b_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos\theta) \right]_{\ell=1} \text{ της λύσης για } r > R, \text{ με}$$

$$b_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}. \text{ Αφού } b_1 = 0 \text{ η διπολική ροπή του φλοιού είναι μηδέν.}$$

Αλλιώς: Η διπολική ροπή του φλοιού είναι $\vec{p} = \iint \vec{r} \sigma da$. Αντικαθιστώντας

$$\vec{r} = R \sin\theta \cos\phi \hat{x} + R \sin\theta \sin\phi \hat{y} + R \cos\theta \hat{z} \text{ βρίσκουμε}$$

$$p_x = \vec{p} \cdot \hat{x} = R^3 \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = 0,$$

$$p_y = \vec{p} \cdot \hat{y} = R^3 \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = 0,$$

$$p_z = \vec{p} \cdot \hat{z} = R^3 \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= 2\pi\epsilon_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)b_{\ell}}{R^{\ell-1}} \underbrace{\int_0^{\pi} P_{\ell}(\cos\theta) \sin\theta \cos\theta d\theta}_{\int_{-1}^1 P_{\ell}(x)P_1(x)dx}$$

Από τη σχέση ορθογωνιότητας των πολωνύμων Legendre το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μη μηδενικό μόνο για $\ell = 1$, οπότε η διπολική ροπή προκύπτει $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 b_1 \hat{z}$.

$$(\gamma) - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell b_{\ell}}{R^{2\ell+1}} r^{\ell-1} P_{\ell}(\cos\theta) = -\frac{3}{4} E_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$b_{\ell} = \frac{R^5 E_0}{4} \delta_{\ell 3}. \text{ Άρα } \sigma = \frac{7}{4} \epsilon_0 E_0 P_3(\cos\theta) = \frac{7}{8} \epsilon_0 E_0 (5 \cos^3\theta - 3 \cos\theta).$$

[4]: (α) Η εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες και για κυλινδρικά συμμετρικό δυναμικό $V = V(\varpi, \phi)$ γράφεται

$$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial V}{\partial \varpi} \right) + \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0.$$

Με χωρισμό μεταβλητών $V = \Pi(\varpi) \Phi(\phi)$ καταλήγουμε στην $\underbrace{\frac{\varpi}{\Pi} \frac{d}{d\varpi} \left(\varpi \frac{d\Pi}{d\varpi} \right)}_C + \underbrace{\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}}_{-C} = 0$. Η εξί-

$$\text{σωση ως προς } \Phi \text{ είναι } \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -C \Leftrightarrow \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + C\Phi =$$

0. Για $C = 0$ έχει λύσεις 1 και ϕ , για $C < 0$ έχει λύσεις $e^{\sqrt{-C}\phi}$ και $e^{-\sqrt{-C}\phi}$ και για $C > 0$ έχει λύσεις $\sin(\sqrt{C}\phi)$ και $\cos(\sqrt{C}\phi)$. Η απαίτηση να μηδενίζεται η λύση για $\phi = 0$, αλλά και

για $\phi = a$ μας οδηγεί να επιλέξουμε τη σταθερά C θετική και σαν λύση μόνο το ημίτονο. Η λύση αυτή $\sin(\sqrt{C}\phi)$ μηδενίζεται ταυτοτικά στο $\phi = 0$. Απαιτούμε να μηδενίζεται και στη γωνία $\phi = a$, δηλ. $\sin(\sqrt{C}a) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{C}a = n\pi$ με $n \in \mathbb{N}^*$, οπότε $C = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ και η λύση είναι $\eta \sin \frac{n\pi\phi}{a}$.

Θα μπορούσαμε αμέσως να γράψουμε τη λύση σαν επαλληλία των $\sin \frac{n\pi\phi}{a}$, αφού από τη θεωρία Fourier ξέρουμε ότι κάθε συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $\phi \in (0, a)$ μπορεί να επεκταθεί σαν περιττή στο $\phi \in (-a, 0)$ και στη συνέχεια περιοδική με περίοδο $2a$, οπότε αναπτύσσεται στα παραπάνω ημίτονα.

$$\text{Για κάθε } C, \text{ η λύση της } \varpi \frac{d}{d\varpi} \left(\varpi \frac{d\Pi}{d\varpi} \right) = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \Pi$$

είναι επαλληλία των δυνάμεων $\varpi^{\pm n\pi/a}$. Αυτό μπορεί ναδειχθεί είτε δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής ϖ^{ξ} οπότε καταλήγουμε στο ότι η σταθερά ξ ικανοποιεί το πολώνυμο $\xi^2 = n^2\pi^2/a^2 \Leftrightarrow \xi = \pm n\pi/a$, είτε αφού κάνουμε πρώτα το μετασχηματισμό $x = \ln \varpi$ οπότε $\varpi \frac{d}{d\varpi} = \frac{dx}{d\varpi} \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}$ και η διαφορική απλο-

$$\text{ποιείται σε } \frac{d^2 \Pi}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \Pi = 0 \text{ η οποία είναι γραμμική ομογενής και έχει λύσεις } e^{\xi x} \text{ με } \xi^2 - n^2\pi^2/a^2 = 0. \text{ Αφού } e^{\xi x} = \varpi^{\xi} \text{ και οι δύο μέθοδοι δίνουν λύση } \Pi = A_n \varpi^{n\pi/a} + B_n \varpi^{-n\pi/a} \text{ και για το δυναμικό } V = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \varpi^{n\pi/a} + B_n \varpi^{-n\pi/a}) \sin \frac{n\pi\phi}{a}.$$

Αλλιώς: Μπορούμε να θέσουμε $x = \ln \varpi$ και $\frac{\partial}{\partial \varpi} = \frac{dx}{d\varpi} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial x}$, στην εξίσωση Laplace $\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial V}{\partial \varpi} \right) + \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$, οπότε αυτή αποκτά μορφή $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$, ίδια με την αντίστοιχη εξίσωση σε Καρτεσιανές (και λύνεται με χωρισμό μεταβλητών κατά τα γνωστά).

Οι συντελεστές A_n και B_n θα βρεθούν από τις υπόλοιπες οριακές συνθήκες για το δυναμικό.

Για να μην απειρίζεται το δυναμικό στον άξονα $\varpi = 0$ πρέπει $B_n = 0$.

$$\text{Η συνθήκη } V|_{\varpi=R} = V_0 \text{ δίνει } \sum_{n=1}^{\infty} A_n R^{n\pi/a} \sin \frac{n\pi\phi}{a} =$$

$$V_0 \text{ η οποία με τέχνασμα Fourier δίνει } \sum_{n=1}^{\infty} A_n R^{n\pi/a} \underbrace{\int_0^a \sin \frac{n\pi\phi}{a} \sin \frac{m\pi\phi}{a} d\phi}_{\frac{a}{2} \delta_{nm}} = V_0 \underbrace{\int_0^a \sin \frac{m\pi\phi}{a} d\phi}_{\frac{a}{m\pi} [1 - (-1)^m]}$$

$$\Leftrightarrow A_m R^{m\pi/a} \frac{a}{2} = V_0 \frac{a}{m\pi} [1 - (-1)^m] \text{ οπότε μόνο οι συντελεστές με περιττό } m \text{ επιζούν και έχουν τιμή } A_m = \frac{4V_0}{m\pi} R^{-m\pi/a}. \text{ Αντικαθιστώντας στη γενική}$$

λύση βρίσκουμε τη ζητούμενη μορφή

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{m\pi/a} \sin \frac{m\pi\phi}{a}.$$

(β) Γράφοντας $\sin \frac{m\pi\phi}{a} = \text{Im } e^{im\pi\phi/a}$ και τους περιττούς φυσικούς αριθμούς $m = 2n + 1$ έχουμε

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \text{Im} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{(2n+1)\pi/a} e^{i(2n+1)\pi\phi/a} \right] = \frac{4V_0}{\pi} \text{Im} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \right) \text{ όπου } z = \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{\pi/a} e^{i\pi\phi/a}.$$

$$\text{Το άθροισμα } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z z^{2n} dz =$$

$$\int_0^z \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}}_{\frac{1}{1-z^2}} dz \text{ διότι προέκυψε άθροισμα όρων γεω-}$$

μετρικής προόδου με λόγο μέτρου $|z|^2 < 1$

$$\text{για } \varpi < R. \text{ Άρα } V = \frac{4V_0}{\pi} \text{Im} \int_0^z \frac{dz}{1-z^2} =$$

$$\frac{2V_0}{\pi} \text{Im} \left(\int_0^z \frac{dz}{1-z} + \int_0^z \frac{dz}{1+z} \right) = \frac{2V_0}{\pi} \text{Im} \left(\ln \frac{1+z}{1-z} \right).$$

$$\text{Γράφοντας τον μιγαδικό } \frac{1+z}{1-z} = re^{i\vartheta} \text{ το}$$

$$\text{αποτέλεσμα είναι } V = \frac{2V_0}{\pi} \text{Im} (\ln r + i\vartheta) =$$

$$\frac{2V_0}{\pi} \vartheta. \text{ Αρκεί λοιπόν να βρούμε τη φάση του}$$

$$\frac{1+z}{1-z}. \text{ Είναι } \frac{1+z}{1-z} = \frac{1 + \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{\pi/a} e^{i\pi\phi/a}}{1 - \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{\pi/a} e^{i\pi\phi/a}} =$$

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{\pi/a} e^{i\pi\phi/a}\right] \left[1 - \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{\pi/a} e^{-i\pi\phi/a}\right]}{\left[1 - \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{\pi/a} e^{i\pi\phi/a}\right] \left[1 - \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{\pi/a} e^{-i\pi\phi/a}\right]} =$$

$$\frac{1 - \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{2\pi/a} + 2i \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{\pi/a} \sin \frac{\pi\phi}{a}}{1 + \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{2\pi/a} - 2 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{\pi/a} \cos \frac{\pi\phi}{a}} \text{ επομένως } \vartheta =$$

$$\arctan \frac{2 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{\pi/a} \sin \frac{\pi\phi}{a}}{1 - \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{2\pi/a}} \text{ και η κλειστή μορφή του}$$

$$\text{δυναμικού είναι } V = \frac{2V_0}{\pi} \arctan \frac{2 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{\pi/a} \sin \frac{\pi\phi}{a}}{1 - \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{2\pi/a}}.$$

$$\boxed{5}: \text{ Με } \frac{\partial V}{\partial \varpi} = \frac{d\lambda}{d\varpi} \frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{1}{d\varpi} \frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{1}{-be^{-\lambda}} \frac{\partial V}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial V}{\partial \varpi} \right) = \frac{d\lambda}{d\varpi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{be^{-\lambda}} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \text{ βρί-}$$

σκουμε την ζητούμενη $\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$, που είναι η εξίσωση Laplace στις «καρτεσιανές» συντεταγμένες λ και ϕ . Ο ημικύλινδρος μετασχηματίζεται στο χώρο $0 < \lambda < +\infty$, $0 < \phi < \pi$, $-\infty < z < +\infty$ με δυναμικά στα όρια όπως στο δεύτερο σχήμα.

Ο χωρισμός μεταβλητών οδηγεί σε λύση της μορφής $V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\lambda} \sin(n\phi)$, η οποία ικανοποιεί τις σωστές οριακές συνθήκες στις πλευρές $\phi = 0$, $\phi = \pi$ και $\lambda = +\infty$. Οι σταθερές C_n προκύπτουν από την οριακή $V|_{\lambda=0} = V_0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\phi) = V_0$. Με

$$\text{τέχνασμα Fourier βρίσκουμε } C_n = \frac{2V_0}{\pi n} [1 - (-1)^n].$$

$$\text{;ρα η λύση είναι } V = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_0}{\pi n} e^{-n \ln(b/\varpi)} \sin(n\phi),$$

$$\text{ή } V = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_0}{\pi n} \left(\frac{\varpi}{b}\right)^n \sin(n\phi).$$

Το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί όπως την άσκηση [\[4\]](#) (είναι υποπερίπτωσή της για $a = \pi$).

Η λύση μπορεί να γραφεί σε κλειστή μορφή $V = \frac{2V_0}{\pi} \arctan \frac{2b\varpi \sin \phi}{b^2 - \varpi^2}$ (για $r < b$, $0 \leq \phi \leq \pi$).

Ένας άλλος τρόπος λύσης βασίζεται στο θεώρημα μοναδικότητας. Έστω πρόβλημα I είναι αυτό της παρούσας άσκησης και πρόβλημα II η εύρεση του δυναμικού στο εσωτερικό δύο ημικυλινδρών, $0 < \phi < \pi$ και $\pi < \phi < 2\pi$, φορτισμένων σε δυναμικά $\pm V_0$ αντίστοιχα, που φτιάχνουν ένα κενό κυλινδρικό φλοιό (όπως στο θέμα 1 της εξέτασης 28/2/2011). Λόγω συμμετρίας το δυναμικό στο πρόβλημα II μηδενίζεται στο επίπεδο που χωρίζει τους ημικυλινδρούς ($\phi = 0, \pi$). Επομένως στα όρια του χώρου $r < b$, $0 \leq \phi \leq \pi$ τα προβλήματα I και II έχουν ίδια δυναμικά και το θεώρημα μοναδικότητας μας εξασφαλίζει ότι και στο εσωτερικό του χώρου αυτού η λύση θα είναι κοινή.

Το πρόβλημα II μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας την γενική λύση της εξίσωσης Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Κρατώντας τους όρους που είναι περιττοί και πεπερασμένοι στον

$$\text{άξονα } \varpi = 0 \text{ γράφουμε } V = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varpi^n \sin(n\phi).$$

$$\text{Η οριακή } V|_{\varpi=b} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n \sin(n\phi) =$$

$$\begin{cases} +V_0, 0 < \phi < \pi \\ -V_0, \pi < \phi < 2\pi \end{cases} \text{ με τέχνασμα Fourier δίνει}$$

$$\text{τους συντελεστές } a_n = \frac{2V_0 [1 - (-1)^n]}{\pi n b^n}, \text{ οπότε}$$

$$V = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_0}{\pi n} \left(\frac{\varpi}{b}\right)^n \sin(n\phi).$$

[6]: (α) Αντικαθιστώντας την δοσμένη $V = V(\theta)$ στην $\vec{\nabla}^2 V = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right)$ βλέπουμε ότι δίνει μηδέν (είναι $\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A \frac{\sin \theta}{\cot(\theta/2)} \frac{d \cot(\theta/2)}{d\theta} = -A \frac{\sin \theta}{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} = -A$).

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλ. αν θέλουμε $\vec{\nabla}^2 V = 0$ με $V = V(\theta)$ τότε $\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin \theta \frac{dV}{d\theta} = -A \Leftrightarrow V = -A \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = A \ln [\cot(\theta/2)] + B$.

(β) Ψάχνουμε λύση της μορφής $V(\theta) = A \ln [\cot(\theta/2)] + B$ που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες $V|_{\theta=\pi/2} = 0$ και $V|_{\theta=\theta_0} = V_0$.

Θέλουμε λύση της Laplace στο χώρο $\theta \in (\theta_0, \pi/2)$ με σταθερά δυναμικά στα όρια $\theta = \theta_0$ και $\theta = \pi/2$, οπότε είναι λογικό να περιμένουμε η λύση να είναι συνάρτηση μόνο του θ .

Η πρώτη οριακή δίνει $A \ln [\cot(\pi/4)] + B = 0 \Leftrightarrow B = 0$, ενώ η δεύτερη δίνει $A \ln [\cot(\theta_0/2)] = V_0$. Άρα η λύση είναι $V = V_0 \frac{\ln [\cot(\theta/2)]}{\ln [\cot(\theta_0/2)]}$.

[7]: (α) Έστω $b > c$, οπότε ο αγωγός έχει σχήμα γεωειδούς ελλειψοειδούς. Θέτοντας $a^2 = b^2 - c^2$, $b = a \cosh \mu_0$, $c = a \sinh \mu_0$ η εξίσωση του ελλειψοειδούς γράφεται $\frac{x^2 + y^2}{a^2 \cosh^2 \mu_0} + \frac{z^2}{a^2 \sinh^2 \mu_0} = 1$, δηλ. $\mu = \mu_0$ σε γεωειδείς σφαιροειδείς συντεταγμένες. Στις συντεταγμένες αυτές η λύση της Laplacian η οποία πρέπει να ικανοποιεί οριακές συνθήκες $V(\mu_0) = \text{σταθερό}$ (το δυναμικό του αγωγού) και $V(\mu \rightarrow \infty) = 0$ (θεωρώντας το δυναμικό στο άπειρο μηδέν - γενικότερα μπορεί να είναι μια σταθερά), είναι της μορφής $V = V(\mu)$. Από το τυπολόγιο προκύπτει ότι $\nabla^2 V(\mu) = 0 \Leftrightarrow \frac{dV}{d\mu} = -\frac{C}{a \cosh \mu}$ όπου C σταθερά ολοκλήρωσης. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{C}{h_\mu a \cosh \mu} \hat{\mu}$. Πολύ μακριά από τον αγωγό είναι $\hat{\mu} \approx \hat{r}$, $r \approx a \cosh \mu \approx \frac{1}{2} a e^\mu$, $h_\mu \approx r$, οπότε $\vec{E} \approx \frac{C}{r^2} \hat{r}$. Για να ισούται αυτό το πεδίο με το πεδίο φορτίου Q (όπως «φαίνεται» ο αγωγός από μεγάλες αποστάσεις) πρέπει $C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$.

Σε κάθε σημείο έξω από τον αγωγό είναι $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h_\mu a \cosh \mu} \hat{\mu} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2 \cosh \mu \sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}} \hat{\mu}$. Μετά από πράξεις μπορούμε να δείξουμε ότι $h_\mu = a^2 \sinh \mu \cosh \mu \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^4 \cosh^4 \mu} + \frac{z^2}{a^4 \sinh^4 \mu}}$,

οπότε μια άλλη έκφραση του πεδίου είναι $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3 \cosh^2 \mu \sinh \mu \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^4 \cosh^4 \mu} + \frac{z^2}{a^4 \sinh^4 \mu}}} \hat{\mu}$.

Μια τρίτη έκφραση του πεδίου προκύπτει χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εκφράσεις (που προκύπτουν από αυτές του τυπολόγιου)

$$\cosh \mu = \frac{\sqrt{(\varpi + a)^2 + z^2} + \sqrt{(\varpi - a)^2 + z^2}}{2a},$$

$$\cos \nu = \frac{\sqrt{(\varpi + a)^2 + z^2} - \sqrt{(\varpi - a)^2 + z^2}}{2a},$$

$$h_\mu = [(\varpi - a)^2 + z^2]^{1/4} [(\varpi + a)^2 + z^2]^{1/4},$$

όπου βέβαια $\varpi = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στον αγωγό είναι

$$\sigma = \epsilon_0 (\vec{E} \cdot \hat{\mu})_{\mu=\mu_0^+} = \frac{Q}{4\pi a^2 \cosh \mu_0 \sqrt{\sinh^2 \mu_0 + \sin^2 \nu}}$$

Θέτοντας $\cosh \mu_0 = b/a$, $\sinh \mu_0 = c/a$, $a = \sqrt{b^2 - c^2}$ και $\sin \nu = z/c$ βρίσκουμε $\sigma = \frac{Q}{4\pi b c \sqrt{1 + (b^2 - c^2) z^2 / c^4}}$. Μια ισοδύναμη έκφραση όπως άμεσα μπορεί να επαληθευτεί (αφού $\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$) είναι η $\sigma = \frac{Q}{4\pi b^2 c \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$.

Αν $b < c$, οπότε ο αγωγός έχει σχήμα ωοειδούς ελλειψοειδούς, θέτουμε $a^2 = c^2 - b^2$, $c = a \cosh \mu_0$, $b = a \sinh \mu_0$ και χρησιμοποιούμε ωοειδείς σφαιροειδείς συντεταγμένες. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν καταλήγουμε στην έκφραση του πεδίου $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h_\mu a \sinh \mu} \hat{\mu} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2 \sinh \mu \sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}} \hat{\mu}$.

Όπως και πριν, μπορούμε να δείξουμε ότι $h_\mu = a^2 \sinh \mu \cosh \mu \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^4 \sinh^4 \mu} + \frac{z^2}{a^4 \cosh^4 \mu}}$, οπότε μια έκφραση του πεδίου είναι $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3 \cosh \mu \sinh^2 \mu \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^4 \sinh^4 \mu} + \frac{z^2}{a^4 \cosh^4 \mu}}} \hat{\mu}$.

Η επιφανειακή πυκνότητα του αγωγού προκύπτει $\sigma = \frac{Q}{4\pi h_\mu a \sinh \mu} \Big|_{\mu=\mu_0} = \frac{Q}{4\pi b^2 \sqrt{1 + (c^2 - b^2)(x^2 + y^2)/b^4}}$ ή $\sigma = \frac{Q}{4\pi b^2 c \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$.

Μια δεύτερη λύση του προβλήματος στην περίπτωση $b < c$ βασίζεται στο ότι μια γραμμική κατανομή φορτίου σταθερής πυκνότητας λ και (πεπερασμένου) μήκους $2a$, δημιουργεί πεδίο του οποίου οι ισοδυναμικές

επιφάνειες είναι ωσειδή ελλειψοειδή, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των ειδώλων.

Για το πεδίο της γραμμικής κατανομής φορτίου, την οποία τοποθετούμε στον άξονα z , στο τμήμα $-a < z < a$, είναι $V(\varpi, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\underbrace{\vec{r}}_{\varpi\hat{\omega}+z\hat{z}} - \underbrace{\vec{r}'}_{z'\hat{z}}|} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dz'}{\sqrt{\varpi^2 + (z' - z)^2}}$.

Θέτοντας $z' - z = \varpi \tan \theta$ (με $-\pi/2 < \theta < \pi/2$) υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{dz'}{\sqrt{\varpi^2 + (z' - z)^2}} =$

$$\int \frac{d\theta}{\cos \theta} = \int \frac{d \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}} = \ln \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \ln \left(\sqrt{1 + \tan^2 \theta} + \tan \theta \right) = \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{z' - z}{\varpi} \right)^2} + \frac{z' - z}{\varpi} \right].$$

Επομένως το δυναμικό σε σημείο (ϖ, ϕ, z) προκύπτει

$$V(\varpi, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\varpi^2 + (a - z)^2} + a - z}{\sqrt{\varpi^2 + (a + z)^2} - a - z}.$$

Με $\ell_1 = \sqrt{\varpi^2 + (a + z)^2}$ και $\ell_2 = \sqrt{\varpi^2 + (a - z)^2}$ τις αποστάσεις του σημείου (ϖ, ϕ, z) από τα άκρα της γραμμικής κατανομής φορτίου το δυναμικό γράφεται $V(\varpi, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\ell_2 + a - z}{\ell_1 - a - z}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } z &= \frac{(\ell_1 - \ell_2)(\ell_1 + \ell_2)}{4a} \text{ και } \frac{\ell_2 + a - z}{\ell_1 - a - z} = \\ &= \frac{\frac{\ell_1 + \ell_2}{2} + \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} + a - \frac{(\ell_1 - \ell_2)(\ell_1 + \ell_2)}{4a}}{\frac{\ell_1 + \ell_2}{2} - \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} - a - \frac{(\ell_1 - \ell_2)(\ell_1 + \ell_2)}{4a}} = \\ &= \frac{(\ell_1 + \ell_2 + 2a) \frac{2a - (\ell_1 - \ell_2)}{4a}}{(\ell_1 + \ell_2 - 2a) \frac{2a - (\ell_1 - \ell_2)}{4a}} = \frac{\ell_1 + \ell_2 + 2a}{\ell_1 + \ell_2 - 2a}. \end{aligned}$$

Άρα το δυναμικό γράφεται $V(\varpi, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\ell_1 + \ell_2 + 2a}{\ell_1 + \ell_2 - 2a}$ και οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι πράγματι ελλειψοειδή $\ell_1 + \ell_2 = \text{σταθερό} = 2a \coth \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}$, ή ισοδύναμα (αφού αντι-καταστήσουμε τα $\ell_{1,2} = \sqrt{\varpi^2 + (a \pm z)^2}$ και μετά από κάποιες πράξεις), $\left(\frac{\varpi}{a} \sinh \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{z}{a} \tanh \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda} \right)^2 = 1$.

Αν θεωρήσουμε τώρα τον αγωγό με ελλειψοειδές σχήμα $\frac{\varpi^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, αν αυτός αποτελεί μια ισοδυναμική επιφάνεια $V = V_0$ του προηγούμενου προβλήματος, το δυναμικό έξω από τον αγωγό είναι ίδιο στα δυο προβλήματα (σύμφωνα με το θεώ-

ρημα μοναδικότητας). Αρκεί λοιπόν οι επιφάνειες $\left(\frac{\varpi}{a} \sinh \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{z}{a} \tanh \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda} \right)^2 = 1$ και $\frac{\varpi^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ να ταυτίζονται, κάτι που συμβαίνει αν $\frac{a}{\sinh \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}} = b$ και $\frac{a}{\tanh \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}} = c$. Πρέ-

πει επίσης το φορτίο που περικλείει η επιφάνεια του ελλειψοειδούς να είναι ίδιο στις δύο κατανομές (από νόμο Gauss), δηλ. $Q = 2a\lambda$. Οι τρεις τελευταίες σχέσεις δίνουν τα στοιχεία του φορτισμένου τμήματος-ειδώλου που τοποθετούμε στο εσωτερικό του αγωγού $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $\lambda = \frac{Q}{2a}$ και το δυναμικό του αγωγού $V_0 = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{c + a}{c - a}$.

Η λύση λοιπόν στο εξωτερικό του αγωγού είναι

$$V = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{\sqrt{\varpi^2 + (a - z)^2} + a - z}{\sqrt{\varpi^2 + (a + z)^2} - a - z},$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a \varpi} \left[\frac{(z + a) \hat{\omega} - \varpi \hat{z}}{\sqrt{(z + a)^2 + \varpi^2}} - \frac{(z - a) \hat{\omega} - \varpi \hat{z}}{\sqrt{(z - a)^2 + \varpi^2}} \right],$$

όπου $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ (στο εσωτερικό του αγωγού είναι $V = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{c + a}{c - a}$ και $\vec{E} = 0$).

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ίδιο με αυτό που προέκυψε χρησιμοποιώντας ωσειδείς σφαιροειδείς συντεταγμένες, δηλ. το $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h_\mu a \sinh \mu} \hat{\mu}$, κάτι που φαίνεται χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες σχέσεις (που προκύπτουν από το τυπολόγιο)

$$\begin{aligned} \cosh \mu &= \frac{\sqrt{(z + a)^2 + \varpi^2} + \sqrt{(z - a)^2 + \varpi^2}}{2a}, \\ \cos \nu &= \frac{\sqrt{(z + a)^2 + \varpi^2} - \sqrt{(z - a)^2 + \varpi^2}}{2a}, \\ h_\mu &= \left[\frac{(z - a)^2 + \varpi^2}{1} \right]^{1/4} \left[\frac{(z + a)^2 + \varpi^2}{1} \right]^{1/4}, \\ \frac{2a \cos \nu}{h_\mu^2} &= \frac{1}{\sqrt{(z - a)^2 + \varpi^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z + a)^2 + \varpi^2}}, \\ \frac{2a \varpi \sin \nu}{h_\mu^2 \tanh \mu} &= \frac{z + a}{\sqrt{(z + a)^2 + \varpi^2}} - \frac{z - a}{\sqrt{(z - a)^2 + \varpi^2}}. \end{aligned}$$

(β) Είναι $b = R$ και $c \ll b$, δηλ. υποπερίπτωση του γεωειδούς ελλειψοειδούς για το οποίο βρήκαμε ότι η επιφανειακή πυκνότητα είναι $\sigma = \frac{Q}{4\pi b c \sqrt{1 + (b^2 - c^2)z^2/c^4}}$. Είναι $c \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$,

αλλά ο λόγος z/c είναι πεπερασμένος και προκύπτει από την εξίσωση του ελλειψοειδούς $\frac{\varpi^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\varpi^2}{R^2}$. Επομένως η συνολική (και από τις δύο πλευρές) επιφανειακή πυκνότητα του δίσκου είναι

$$\sigma(\varpi) = 2 \frac{Q}{4\pi b \sqrt{\underbrace{c^2}_0 + \underbrace{(b^2 - c^2)}_{R^2} \underbrace{z^2/c^2}_{1 - \frac{\varpi^2}{R^2}}}}$$

$$\Leftrightarrow \sigma(\varpi) = \frac{Q}{2\pi R \sqrt{R^2 - \varpi^2}}.$$

(γ) Είναι $b < c$ και $2c$ το μήκος του ραβδόμορφου αγωγού. Ο αγωγός είναι ωσειδές ελλειψοειδές με επιφάνεια $x = b \sin \nu \cos \phi$, $y = b \sin \nu \sin \phi$, $z = c \cos \nu$. Το στοιχείο επιφάνειας πάνω στο ελλειψοειδές (το οποίο έχει σταθερό μ) είναι $da = h_\nu d\nu h_\phi d\phi$, ή ολοκληρώνοντας ως προς την γωνία ϕ (αφού πρόκειται για αξισυμμετρική επιφάνεια η ολοκλήρωση $\int_0^{2\pi} d\phi$ δίνει απλά 2π), $da = 2\pi h_\nu d\nu h_\phi$. Επομένως το φορτίο σε ένα τμήμα της επιφάνειας από $z = c \cos \nu$ ως $z + dz$ με $dz = -c \sin \nu d\nu > 0$ είναι $dq = \sigma 2\pi h_\nu h_\phi |d\nu|$.

Το φορτίο ανά μήκος είναι $\lambda = \frac{dq}{dz} = \sigma 2\pi h_\nu h_\phi \left| \frac{d\nu}{dz} \right|$

και αφού $dz = -c \sin \nu d\nu$ και $\sigma = \frac{Q}{4\pi h_\mu a \sinh \mu}$,

προκύπτει σταθερή γραμμική πυκνότητα $\lambda = \frac{Q}{2c}$.³

Αλλιώς: $\lambda = \frac{dq}{dz} = \frac{\sigma da}{dz}$ και η στοιχειώδης επιφάνεια μπορεί να γραφτεί $da = 2\pi \varpi ds$ όπου

$$ds = \sqrt{(d\varpi)^2 + (dz)^2} = dz \sqrt{\left(\frac{d\varpi}{dz}\right)^2 + 1}.$$

Η κλίση της επιφάνειας μπορεί να βρεθεί από την εξίσωσή της $\frac{\varpi^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{\varpi}{b^2} d\varpi + \frac{z}{c^2} dz = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{d\varpi}{dz} = -\frac{b^2 z}{c^2 \varpi}, \text{ ενώ } \sigma = \frac{Q}{4\pi b^2 c \sqrt{\frac{\varpi^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $\lambda = 2\pi \varpi \sigma \sqrt{\left(\frac{d\varpi}{dz}\right)^2 + 1} = \frac{Q}{2c}$.

Παρατηρήστε ότι στη δεύτερη απόδειξη δεν χρησιμοποιήσαμε κάπου ότι $b < c$. Πράγματι το αποτέλεσμα ισχύει και για αγωγό με σχήμα γεωειδές ελλειψοειδές με $b > c$, κάτι που μπορεί εύκολα να αποδειχθεί και με τον πρώτο τρόπο, χρησιμοποιώντας όμως γεωειδείς (και όχι ωσειδείς) σφαιροειδείς συντεταγμένες.

[8]: (α) Η δύναμη που ασκεί το φορτίο στο δίπολο είναι $\vec{F}_d = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_q$ όπου $\vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_d - \vec{r}_q}{|\vec{r}_d - \vec{r}_q|^3} =$

$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3}$ το πεδίο που δημιουργεί το φορτίο στη θέση του διπόλου. Παρότι το διάνυσμα από το φορτίο στο δίπολο $\vec{R}$ ισούται με $-\vec{r}$, δεν είναι βολικό να κάνουμε την αντικατάσταση πριν την παραγώγιση, γιατί ο διαφορικός τελεστής $\vec{p} \cdot \vec{\nabla}$ δρα στο $\vec{R}$ και όχι στο $\vec{r}$. Στο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το

φορτίο έχουμε λοιπόν $\vec{F}_d = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right)$ με

$$(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \frac{1}{R^3} \underbrace{(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{R}}_{\vec{p}} - \frac{3}{R^4} \left(\vec{p} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \vec{R}}_{\vec{R}/R} \right) \vec{R} = \frac{R^3 \vec{p} - 3(\vec{p} \cdot \vec{R}) \vec{R}}{R^5}.$$

Αντικαθιστώντας τώρα $\vec{R} = -\vec{r}$ προκύπτει πράγματι $\vec{F}_d = -q\vec{E}_d$ όπως αναμενόταν από τον τρίτο νόμο Newton.

Οι παραγωγίσεις μπορούν να γίνουν και σε συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς, αποφεύγοντας διανυσματική ανάλυση. Θεωρώντας σύστημα $qXYZ$ με κέντρο το φορτίο και φορά του άξονα Z ίδια με τη φορά της διπολικής ροπής του διπόλου, $\vec{p} = p\hat{Z}$, είναι

$$\vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{X\hat{X} + Y\hat{Y} + Z\hat{Z}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} \text{ και } \vec{F}_d = p \frac{\partial}{\partial Z} \vec{E}_q =$$

$$\frac{qp}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\hat{Z}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} - 3Z \frac{X\hat{X} + Y\hat{Y} + Z\hat{Z}}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{5/2}} \right] =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{p}}{R^3} - 3\vec{p} \cdot \vec{R} \frac{\vec{R}}{R^5} \right] \vec{R} \equiv -q\vec{E}_d.$$

Ένας άλλος τρόπος να βρεθεί η δύναμη είναι μέσω της δυναμικής ενέργειας αλληλεπίδρασης μεταξύ διπόλου και φορτίου. Αυτή είναι $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_q = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}_d - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_d - \vec{r}_q|^3}$. (Η U προκύπτει και από τη

σχέση $U = qV_d$ με το δυναμικό του διπόλου στη θέση του φορτίου $V_d = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}_q - \vec{r}_d)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_q - \vec{r}_d|^3}$.)

Είναι $\vec{F}_q = -\vec{\nabla}_q U = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_q \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}_q - \vec{r}_d)}{|\vec{r}_q - \vec{r}_d|^3}$ όπου ο δείκτης q δείχνει ότι ο τελεστής δρα στο $\vec{r}_q$.

$$\text{Όμοια } \vec{F}_d = -\vec{\nabla}_d U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_d \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}_d - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_d - \vec{r}_q|^3}.$$

Οι παραγωγίσεις δίνουν $-\vec{\nabla}_q \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}_q - \vec{r}_d)}{|\vec{r}_q - \vec{r}_d|^3} =$

$$3 \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}_q - \vec{r}_d)}{|\vec{r}_q - \vec{r}_d|^4} \vec{\nabla}_q |\vec{r}_q - \vec{r}_d| - \frac{\vec{\nabla}_q (\vec{p} \cdot \vec{r}_q)}{|\vec{r}_q - \vec{r}_d|^3} =$$

$$3 \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}_q - \vec{r}_d)}{|\vec{r}_q - \vec{r}_d|^4} \frac{\vec{r}_q - \vec{r}_d}{|\vec{r}_q - \vec{r}_d|} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}_q - \vec{r}_d|^3} \text{ και όμοια (αντι-}$$

³Ισοδύναμος τρόπος: Το φορτίο στο μήκος του αγωγού από $z = 0$ σε z , ή στις ωσειδείς σφαιροειδείς συντεταγμένες από $\nu = \pi/2$ σε ν , είναι $q(z) = \iint \sigma da = \int_\nu^{\pi/2} d\nu \frac{Q}{4\pi h_\mu a \sinh \mu} h_\nu h_\phi \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{Q}{2} \int_\nu^{\pi/2} d\nu \sin \nu = \frac{Q}{2} \cos \nu = \frac{Q}{2c} z$. Άρα το φορτίο ανά μήκος είναι $\lambda = \frac{dq}{dz} = \frac{Q}{2c}$.

$$\text{μεταθέτοντας τα } q \text{ και } d) \quad -\vec{\nabla}_d \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}_d - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_d - \vec{r}_q|^3} = 3 \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}_d - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_d - \vec{r}_q|^4} \frac{\vec{r}_d - \vec{r}_q}{|\vec{r}_d - \vec{r}_q|} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}_d - \vec{r}_q|^3}.$$

Άρα προκύπτει $\vec{F}_q = q\vec{E}_d$ και $\vec{F}_d = -\vec{F}_q$.

Το γεγονός ότι οι δυνάμεις είναι αντίθετες μπορεί να ειπωθεί σαν συνέπεια του ότι $U = U(\vec{r}_d - \vec{r}_q)$, οπότε $\vec{\nabla}_q U = -\vec{\nabla}_d U$.

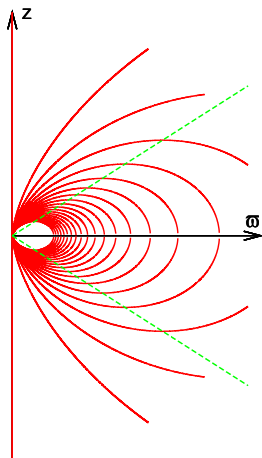
Η ροπή που ασκεί το φορτίο στο δίπολο, ως προς το κέντρο του διπόλου, είναι $\vec{N}_d = \vec{p} \times \vec{E}_q$. Αφού $\vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-\vec{r})}{r^3}$ είναι $\vec{N}_d = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \times \vec{p}}{r^3}$. Αυτή είναι αντίθετη της $\vec{N}_q = \vec{r} \times \vec{F}_d$, αφού η τελευταία είναι $\vec{N}_q = \vec{r} \times q\vec{E}_d = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{r} \times \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \times \vec{p}}{r^3}$. Όπως αναμενόταν λοιπόν από τον τρίτο νόμο Newton, οι ροπές ως προς το ίδιο σημείο είναι αντίθετες.

(β) Πρέπει $\vec{F}_q \cdot \hat{z} = 0$ και $\vec{F}_q \cdot \hat{\omega} < 0$. Αφού $\vec{F}_q = q \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5} \stackrel{\vec{p}=\vec{p}\hat{z}}{=} qp \frac{3z\vec{r} - r^2\hat{z}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$ η πρώτη

συνθήκη δίνει $3z^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ όπου θ η σφαιρική συντεταγμένη. Δηλ. $\vec{F}_q \cdot \hat{z} = 0$ στους δύο κώνους $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = 54^\circ 44' 8''$ και $\theta = \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = 125^\circ 15' 52''$.

Σε κυλινδρικές $r^2 = \varpi^2 + z^2$ και άρα $\vec{F}_q \cdot \hat{z} = 0 \Leftrightarrow 2z^2 = \varpi^2 \Leftrightarrow z = \pm \frac{\varpi}{\sqrt{2}}$ οι εξισώσεις των δύο κώνων.

Στους δύο αυτούς κώνους είναι $\vec{F}_d \cdot \hat{\omega} = qp \frac{3z\vec{r} \cdot \hat{\omega}}{4\pi\epsilon_0 r^5} = qp \frac{3 \cos\theta \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. Το πρόσημο καθορίζεται από το πρόσημο του φορτίου q και από τη γωνία θ . Αν το φορτίο είναι θετικό είναι $\vec{F}_q \cdot \hat{\omega} < 0$ στον κώνο $\theta = 125^\circ 15' 52''$, ενώ αν το φορτίο είναι αρνητικό είναι $\vec{F}_q \cdot \hat{\omega} < 0$ στον κώνο $\theta = 54^\circ 44' 8''$.



Το σχήμα δείχνει τις δυναμικές γραμμές του διπολικού πεδίου και τους κώνους όπου το πεδίο είναι κάθετο στον άξονα z (δηλ. παράλληλο στο $\hat{\omega}$). Στον πάνω κώνο το $\vec{E}_d$ είναι ομόρροπο στο $\hat{\omega}$ (οπότε η δύναμη είναι αντίρροπη του $\hat{\omega}$ αν $q < 0$), ενώ στον κάτω κώνο το $\vec{E}_d$ είναι αντίρροπο στο $\hat{\omega}$ (οπότε η δύναμη είναι αντίρροπη του $\hat{\omega}$ αν $q > 0$).

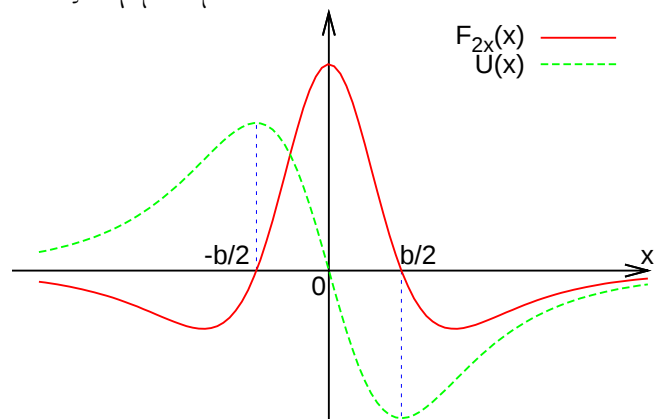
Οι συνθήκες $\vec{F}_q \cdot \hat{z} = 0$ και $\vec{F}_q \cdot \hat{\omega} < 0$ σημαίνουν ότι η δύναμη από το δίπολο μπορεί να παίξει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης αν δώσουμε στο φορτίο κατάλληλη αρχική ταχύτητα, οπότε αυτό θα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με κέντρο σημείο του άξονα z . Συγκεκριμένα, η διεύθυνση της ταχύτητας πρέπει να είναι η $\hat{\phi}$ και από την απαίτηση $\frac{mv^2}{\varpi} = |\vec{F}_q \cdot \hat{\omega}| = \left| qp \frac{3 \cos\theta \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right|$ (όπου m η μάζα του φορτίου), με $r = \varpi / \sin\theta$, $|\cos\theta| = 1/\sqrt{3}$ και $\sin\theta = \sqrt{2/3}$, προκύπτει ότι η στροφορμή του φορτίου πρέπει να είναι $m\varpi v = \sqrt{\frac{m|q|p}{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0}}$.

[9]: (α) $F_{2x} = \vec{F}_2 \cdot \hat{x} = [(\vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_1]_{x=x, y=b, z=0} \cdot \hat{x} = p_2 \left[\frac{\partial E_{1x}}{\partial x} \right]_{x=x, y=b, z=0}$. (Η παραγώγιση γίνεται ως προς x , οπότε μπορούμε να θέσουμε τις τελικές τιμές των y και z πριν την κάνουμε.)

Στη θέση $\vec{r} = x\hat{x} + b\hat{y}$ που βρίσκεται το $\vec{p}_2$ το $\vec{p}_1$ δημιουργεί πεδίο $\vec{E}_1|_{x=x, y=b, z=0} = \left[\frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \right]_{x=x, y=b, z=0} =$

$$\frac{p_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3bx\hat{x} + (2b^2 - x^2)\hat{y}}{(x^2 + b^2)^{5/2}}. \quad \text{Άρα } F_{2x} = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dx} \left[\frac{3bx}{(x^2 + b^2)^{5/2}} \right] = \frac{3bp_1 p_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{b^2 - 4x^2}{(x^2 + b^2)^{7/2}}.$$

(β) $U = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = -\frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{4\pi\epsilon_0 r^5} = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3bx}{(x^2 + b^2)^{5/2}}$. Παρατηρούμε ότι $F_{2x} = -\frac{dU}{dx}$ όπως περιμέναμε.



(γ) Σημεία ισορροπίας το $x = \pm b/2$ στο οποίο $F_{2x} = 0$.

Ισοδύναμα, σημεία ισορροπίας είναι τα ακρότατα της δυναμικής ενέργειας, αφού $F_{2x} = -\frac{dU}{dx}$.

Για $x = (b/2)^+$ είναι $F_{2x} < 0$ και για $x = (b/2)^-$ είναι $F_{2x} > 0$, δηλ. η F_{2x} προσπαθεί και στις δύο περιπτώσεις να επαναφέρει το δίπολο στη θέση ισορροπίας (δύναμη επαναφοράς). Επομένως το $x = b/2$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Το ότι η F_{2x} είναι δύναμη επαναφοράς, δηλ. $\left. \frac{dF_{2x}}{dx} \right|_{x=b/2} < 0$, είναι ισοδύναμο με το ότι η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη, αφού $\frac{dF_{2x}}{dx} = -\frac{d^2U}{dx^2}$

και άρα στο σημείο $x = b/2$ είναι $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=b/2} = 0$ και $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=b/2} > 0$.

Για $x = (-b/2)^+$ είναι $F_{2x} > 0$ και για $x = (-b/2)^-$ είναι $F_{2x} < 0$, δηλ. η F_{2x} προσπαθεί και στις δύο περιπτώσεις να απομακρύνει το δίπολο από τη θέση ισορροπίας (δύναμη απωστική). Επομένως το $x = -b/2$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

Το ότι η F_{2x} είναι απωστική δύναμη, δηλ. $\left. \frac{dF_{2x}}{dx} \right|_{x=-b/2} > 0$, είναι ισοδύναμο με το ότι η δυναμική

ενέργεια είναι μέγιστη, αφού $\frac{dF_{2x}}{dx} = -\frac{d^2U}{dx^2}$ και άρα στο σημείο $x = -b/2$ είναι $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=-b/2} = 0$ και $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=-b/2} < 0$.

[10]: Η δύναμη που ασκεί το $\vec{p}_1 = p_1 \hat{z}$ στο $\vec{p}_2 = p_2 \hat{z}$ είναι $\vec{F}_2 = \left[(\vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_1 \right]_{x=y=0, z=d} = \left[\left(p_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}_1 \right]_{x=y=0, z=d} = \left[\frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \right]_{\vec{r}=z\hat{z}} = \frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0 z^3} \hat{z}$, άρα προκύπτει ελκτική δύναμη $\vec{F}_2 = -\frac{3p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 d^4} \hat{z}$.

(Το $\vec{p}_2$ ασκεί στο $\vec{p}_1$ αντίθετη δύναμη $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.) Μπορούμε να βρούμε τη δύναμη και μέσω της δυναμικής ενέργειας αλληλεπίδρασης, δηλ. σαν $\vec{F}_2 = -\vec{\nabla}U$, όπου $U = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1$. Λόγω συμμετρίας η δύναμη έχει μόνο $\hat{z}$ συνιστώσα, οπότε αρκεί να βρούμε την $U = U(z)$ σε θέσεις $\vec{r} = z\hat{z}$ του $\vec{p}_2$ γύρω από την $z = d$.

Είναι $\vec{E}_1|_{x=y=0, z=z} = \frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0 z^3} \hat{z}$, $U = -p_2 \hat{z} \cdot \vec{E}_1 = -\frac{2p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 z^3}$ και $\vec{F}_2 = -\left. \frac{dU}{dz} \right|_{z=d} \hat{z} = -\frac{3p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 d^4} \hat{z}$.