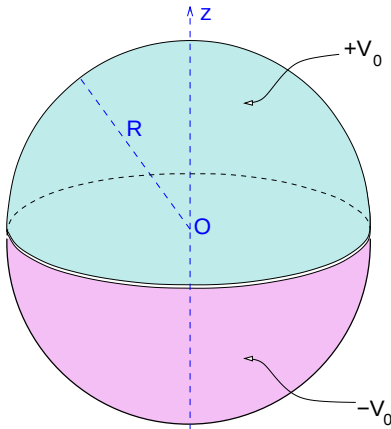


[1]: Δύο αγωγίμα συμπαγή ημισφαίρια ακτίνας R τοποθετούνται όπως στο σχήμα και χωρίζονται από ένα λεπτό μονωτικό στρώμα. Φορτίζουμε τα ημισφαίρια ώστε να αποκτήσουν δυναμικό $\pm V_0$ με σημείο αναφοράς το ∞ , δηλ. $V = +V_0$ στο πάνω ημισφαίριο, $V = -V_0$ στο κάτω ημισφαίριο, με $\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0$. Να βρεθεί το δυναμικό σε όλο το χώρο.



Για τα πολυώνυμα Legendre δίνονται:

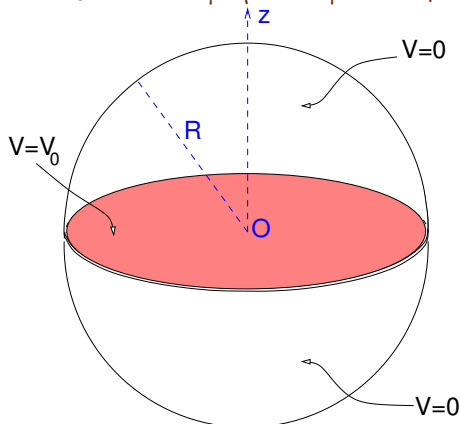
$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \int_0^1 P_{2n}(x) dx = \delta_{n0},$$

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x) dx = \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n+1} (n+1) (n!)^2}.$$

[2]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 9/9/2013:

Το εσωτερικό λεπτού σφαιρικού αγωγίμου φλοιού, ακτίνας R , χωρίζεται σε δύο ημισφαίρια από λεπτό αγωγίμο δίσκο, ίδιας περίπου ακτίνας, που φέρει στην περιφέρειά του λεπτή μόνωση. Ο δίσκος φορτίζεται σε δυναμικό V_0 ενώ ο σφαιρικός φλοιός γειώνεται.



(α) Δικαιολογήστε γιατί το δυναμικό στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού είναι της μορφής $V_0 \left[1 - \sum_n a_n r^n P_n(\cos \theta) \right]$ για $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ και $V_0 \left[1 + \sum_n a_n r^n P_n(\cos \theta) \right]$ για $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, όπου n περιττός.

(β) Εφαρμόστε τη συνοριακή συνθήκη $V|_{r=R} = 0$ για να υπολογίσετε τους συντελεστές a_n .

Για τα πολυώνυμα Legendre δίνονται

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_\ell(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n\ell},$$

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \frac{1}{n(n+1)} P'_n(0) \text{ για } n \neq 0$$

(τα $P'_n(0)$ θεωρούνται γνωστά).

[3]: Σε κάθε ένα από τα ακόλουθα τρία προβλήματα (α), (β), (γ), δεν υπάρχουν φορτία στους χώρους $r < R$ και $r > R$, αλλά υπάρχει συνολικό φορτίο Q πάνω στη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R . Ζητείται σε κάθε περίπτωση το δυναμικό σε όλο το χώρο και η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

(α) Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R είναι ανάλογη του $1 + \cos(3\theta)$, όπου θ η σφαιρική συντεταγμένη.

(β) Στη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R γνωρίζουμε το δυναμικό $C + V_0 \cos^2 \theta$.

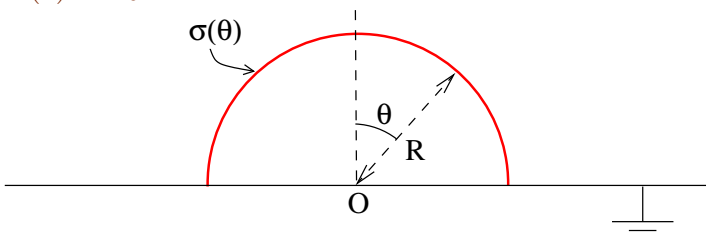
Ποια η σταθερά C αν το δυναμικό είναι μηδέν στο άπειρο;

(γ) Η $\hat{\theta}$ συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην ακτίνα R είναι $E_0 \sin(2\theta)$.

Δίνονται τα πολυώνυμα Legendre : $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$ και οι ταυτότητες $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

[4]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 26/2/2013:

Λεπτό ημισφαιρικό κέλυφος ακτίνας R από μονωτικό υλικό τοποθετείται πάνω σε άπειρη γειωμένη πλάκα. Το κέλυφος φέρει φορτίο επιφανειακής πυκνότητας $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$.



(α) Να βρεθεί το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο μέσα και έξω από το κέλυφος.

(β) Να βρεθεί η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην πλάκα και το ολικό επαγόμενο φορτίο.

Δίνεται το πολυώνυμο Legendre $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$.

[5]: (α) Στο κέντρο ενός αγωγίμου, αφόρτιστου σφαιρικού φλοιού με εσωτερική ακτίνα R και εξωτερική R' τοποθετείται ηλεκτρικό δίπολο ροπής $\vec{p}$. Να βρεθεί το πεδίο σε όλο το χώρο και τα φορτία που επάγονται στο φλοιό.

(β) Επαναλάβετε στην περίπτωση όπου το σύστημα δίπολο-φλοιός τοποθετείται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_0$ (τα $\vec{p}$ και $\vec{E}$ δεν είναι απαραίτητα παράλληλα).

[6]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 18/9/2008:

Άπειρη αγώγιμη πλάκα γειώνεται. Από την πλάκα αποκολλάται τμήμα σχήματος δίσκου ακτίνας R . Στη θέση του τοποθετείται δίσκος από το ίδιο μέταλλο και ίδιας ακτίνας που διαχωρίζεται από τη πλάκα με λεπτή μόνωση. Ο δίσκος φορτίζεται σε δυναμικό V_0 . Θεωρώντας σύστημα συντεταγμένων με κέντρο O το κέντρο του δίσκου και άξονα $z'Oz$ κάθετο στο επίπεδό του, το δυναμικό στον πάνω ημιχώρο ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) είναι

$$V(r, \theta) = \begin{cases} V_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell}(\cos \theta), & r \geq R \\ V_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & r \leq R \end{cases}$$

Να προσδιοριστούν οι συντελεστές b_{ℓ} και a_{ℓ} αν γνωρίζεται ότι πάνω στον ημιάξονα Oz , δηλ. για $\theta = 0$, $r = z$, το δυναμικό είναι $V(r, 0) = V(z) = V_0 \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$.

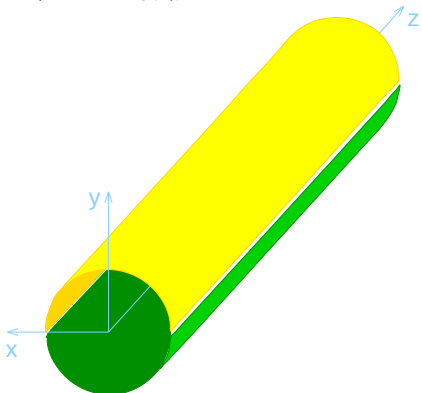
Δίνεται το ανάπτυγμα $\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}u^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}u^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n, 0 \leq u < 1$.

Επίσης $P_{\ell}(1) = 1$.

Παρατήρηση: Οι συντελεστές b_{ℓ} και a_{ℓ} δεν είναι ίσοι μεταξύ τους παρότι η συνάρτηση $V(r, \theta)$ είναι συνεχής στο $r = R$.

[7]: Βρείτε το δυναμικό στο εσωτερικό και εξωτερικό κυλινδρικού κελύφους απείρου μήκους και ακτίνας R , στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) Το κέλυφος είναι φορτισμένο, το μισό με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ_1 και το υπόλοιπο με επίσης σταθερή σ_2 (βλέπε σχήμα).



Συγκεκριμένα, σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

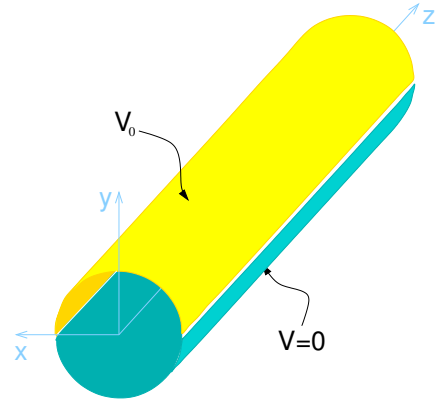
$$\sigma(\phi) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{αν } 0 < \phi < \pi \\ \sigma_2 & \text{αν } \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

(β) Όμοια με πριν, αλλά με $\sigma(\phi) = \sigma_0 \left[\frac{1}{2} - \sin^2(5\phi)\right]$.

(γ) Το συνολικό φορτίο ανά μήκος του κελύφους είναι λ και το δυναμικό για $\varpi = R$ είναι $V_0 \sin(5\phi)$. Βρείτε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στο κέλυφος.

[8]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 5/6/2015:

Δύο μεταλλικά ημικυλινδρικά κελύφη ακτίνας R προσκολλώνται με λεπτή μόνωση, δημιουργώντας έτσι ένα κυλινδρικό κέλυφος. Το δυναμικό του ενός ημικυλίνδρου είναι V_0 και του άλλου 0 όπως στο σχήμα.



(α) Να βρεθεί το δυναμικό στην κεντρική περιοχή του κελύφους, παραλείποντας όρους που φθίνουν πιο γρήγορα από $(\varpi/R)^2$.

(β) Ποιο το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα του κελύφους;

[9]: Τρεις ομοαξονικοί κυλινδρικοί φλοιοί απειροστού πάχους έχουν ακτίνες $R_1 = 1/2$, $R_2 = 1$ και $R_3 = 2$ σε κατάλληλες μονάδες. Ο φλοιός ακτίνας R_1 είναι αφόρτιστος αγωγός, ο R_2 είναι από μονωτικό υλικό και φέρει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \epsilon_0 (1 + 10 \cos \phi)$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες συστήματος με άξονα z τον άξονα των φλοιών, ενώ ο R_3 είναι γειωμένος αγωγός. Ζητείται το δυναμικό σε όλο το χώρο.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x, y, z)	Κυλινδρικές (ϖ, ϕ, z)	Σφαιρικές (r, θ, ϕ)
		$\begin{cases} x = \varpi \cos \phi \\ y = \varpi \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
$\vec{v}$	$v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$	$v_\varpi \hat{\varpi} + v_\phi \hat{\phi} + v_z \hat{z}$	$v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \varpi} \hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial (\varpi v_\varpi)}{\partial \varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
$\vec{\nabla} \times \vec{v}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{x} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{y} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{z}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi} \end{pmatrix} \hat{\varpi} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi} \end{pmatrix} \hat{\phi} +$ $\frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial (\varpi v_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} \right] \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$
$\vec{\nabla}^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial f}{\partial \varpi} \right) + \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$d\vec{l}$	$dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\varpi \hat{\varpi} + \varpi d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
$d\vec{a}$	$dydz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$	$\varpi d\phi dz \hat{\varpi} + d\varpi dz \hat{\phi} + \varpi d\varpi d\phi \hat{z}$	$r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$
$d\tau$	$dx dy dz$	$\varpi d\varpi d\phi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

ΛΥΣΕΙΣ:

[1]: Για $r > R$ δεν υπάρχουν φορτία, άρα ισχύει η εξίσωση Laplace. Η κατάλληλη λύση της σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $V = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_{\ell} r^{\ell} + \frac{b_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$.

Θέτουμε $a_{\ell} = 0$ για $\ell \neq 0$ ώστε το δυναμικό να μην απειρίζεται σε $r \rightarrow \infty$. Επίσης, αφού δίνεται ότι $V \rightarrow 0$ για $r \rightarrow \infty$, πρέπει $a_0 = 0$. Οι συντελεστές b_{ℓ} θα βρεθούν από την οριακή συνθήκη

$$V|_{r=R} = \begin{cases} +V_0, & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -V_0, & \pi/2 \leq \theta < \pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_{\ell}}{R^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) = \begin{cases} +V_0, & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -V_0, & \pi/2 \leq \theta < \pi \end{cases} \text{ ή αντιστοίχως } x = \cos \theta,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(x) = \begin{cases} +V_0, & 0 < x \leq 1 \\ -V_0, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Αφού το δεξί μέλος δεν μπορεί να γραφεί άμεσα σαν επαλληλία πολυωνύμων Legendre πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το «τέχνασμα Fourier», δηλ. να πλασιάσουμε με $P_m(x)$ και να ολοκληρώσουμε στο διάστημα $x \in [-1, 1]$.

$$\text{Έτσι έχουμε } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} \underbrace{\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx}_{\frac{2}{2m+1} \delta_{nm}} =$$

$$V_0 \left[\int_0^1 P_m(x) dx - \int_{-1}^0 P_m(x) dx \right]. \text{ Το τελευταίο ολοκλήρωμα με } x = -y \text{ γράφεται } \int_0^1 P_m(-y) dy =$$

$$(-1)^m \int_0^1 P_m(y) dy. \text{ Άρα το «τέχνασμα Fourier» δίνει } b_m = (2m+1) R^{m+1} V_0 \frac{1 - (-1)^m}{2} \int_0^1 P_m(x) dx,$$

$$\text{επομένως οι άρτιοι συντελεστές μηδενίζονται, } b_{2n} = 0, \text{ ενώ οι περιττοί είναι } b_{2n+1} = V_0 R^{2n+2} \frac{(-1)^n (4n+3) (2n)!}{2^{2n+1} (n+1) (n!)^2}.$$

$$V = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n+3) (2n)!}{2^{2n+1} (n+1) (n!)^2} \frac{R^{2n+2}}{r^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos \theta) =$$

$$V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+3) \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{R^{2n+2}}{r^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos \theta),$$

$$\text{όπου } (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \text{ και } (2n+2)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2).$$

Με την παραπάνω διαδικασία ουσιαστικά αναλύσαμε την συνάρτηση $\begin{cases} +1, & 0 < x \leq 1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ σε πολυώνυμα Legendre (τα οποία αποτελούν βάση στο χώρο των συναρτήσεων στο διάστημα $x \in [-1, 1]$) και δείξαμε

$$\text{ότι είναι ίση με } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+3) \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} P_{2n+1}(x).$$

Το δυναμικό στο εσωτερικό των ημισφαιρίων είναι

σταθερό, $\pm V_0$, στο πάνω και στο κάτω, αντίστοιχα.

Αν τα ηλεκτρόδια δεν ήταν συμπαγή ημισφαίρια, αλλά ημισφαιρικοί φλοιοί, το δυναμικό στο χώρο $r < R$ θα μπορούσε άμεσα να βρεθεί επεκτείνοντας την έκφραση του δυναμικού για $r = R$, δηλ. την $V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+3) \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} P_{2n+1}(\cos \theta)$, αντικαθι-

στώντας το $P_{2n+1}(\cos \theta)$ με $\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+1}} P_{2n+1}(\cos \theta)$ (κάθε τέτοιος όρος είναι λύση της Laplace και εξισώνεται με τον αντίστοιχο όρο της έκφρασης του δυναμικού στην $r = R$). Θα είχαμε δηλ. για $r < R$ την λύση $V = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+3) \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{r^{2n+1}}{R^{2n+1}} P_{2n+1}(\cos \theta)$.

Στην κεντρική περιοχή $r \ll R$ το δυναμικό είναι $V \approx \frac{3}{2} \frac{V_0}{R} r \cos \theta = \frac{3}{2} \frac{V_0}{R} z$. Το πεδίο στο κέντρο είναι

$$\vec{E} = -\frac{3}{2} \frac{V_0}{R} \hat{z} \text{ (το αποτέλεσμα αυτό είναι ακριβές γιατί οι υπόλοιποι όροι του δυναμικού δεν συνεισφέρουν στο } r=0).$$

[2]: (α) Αν γράφαμε τη λύση στο εσωτερικό του πάνω ημισφαιρίου σαν $\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$ η οριακή

$$V|_{\theta=\pi/2} = V_0 \text{ θα έδινε } \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(0) = V_0 \text{ για κάθε } r.$$

Άρα θα είχαμε $A_0 = V_0$ και $A_n P_n(0) = 0$ για $n \neq 0$. Τα περιττά πολυώνυμα μηδενίζονται στο $\theta = \pi/2 \Leftrightarrow x = \cos \theta = 0$, αφού $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, ενώ τα άρτια όχι. Άρα η $A_n P_n(0) = 0$ ισχύει αυτόματα για περιττά n , ενώ για άρτια $n \neq 0$ δίνει $A_n = 0$. Αλλάζοντας την σταθερά από A_n σε $-V_0 a_n$ καταλήγουμε στη δοσμένη μορφή για τον πάνω χώρο.

Οι συντελεστές των περιττών πολυωνύμων στον κάτω χώρο είναι αντίθετοι σε σχέση με τον πάνω, ώστε το δυναμικό να προκύψει άρτιο. Δηλ. η απαίτηση το δυναμικό να είναι άρτιο δίνει για κάθε γωνία $\theta \in (\pi/2, \pi)$ του κάτω χώρου (οπότε η γωνία $\pi - \theta \in (0, \pi/2)$ ανήκει στον πάνω χώρο) $V(r, \theta) =$

$$V(r, \pi - \theta) = V_0 \left[1 - \sum_n a_n r^n P_n(-\cos \theta) \right] =$$

$$V_0 \left[1 + \sum_n a_n r^n P_n(\cos \theta) \right], \text{ αφού για περιττά } n \text{ είναι } P_n(-\cos \theta) = -P_n(\cos \theta).$$

(β) Η οριακή $V|_{r=R} = 0$ δίνει $\sum_n a_n R^n P_n(\cos \theta) = 1$ για $0 \leq \theta < \pi/2$ και $\sum_n a_n R^n P_n(\cos \theta) = -1$ για $\pi/2 < \theta \leq \pi$.

$$\text{Ισοδύναμα } \sum_n a_n R^n P_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ -1, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας με περιττά πολυώνυμα $P_\ell(x)$ και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $x \in [-1, 1]$ βρίσκουμε $\sum_n a_n R^n \int_{-1}^1 P_n(x) P_\ell(x) dx = \int_0^1 P_\ell(x) dx - \int_{-1}^0 P_\ell(x) dx$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα με αλλαγή μεταβλητής $x = -y$ γράφεται $\int_{-1}^0 P_\ell(x) dx = -\int_1^0 P_\ell(-y) dy = -\int_0^1 P_\ell(y) dy$ (αφού για περιττά ℓ κάθε $P_\ell(y)$ είναι περιττό). Έτσι, χρησιμοποιώντας και τις δοσμένες σχέσεις $\int_{-1}^1 P_n(x) P_\ell(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{n\ell}$ και $\int_0^1 P_\ell(x) dx = \frac{1}{\ell(\ell+1)} P'_\ell(0)$, βρίσκουμε $a_\ell = R^{-\ell} \frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)} P'_\ell(0)$.

Αλλιώς: Θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την λύση του προηγούμενου προβλήματος [1] στο εσωτερικό των ημισφαιρίων. Καταρχήν το πρόβλημα στο πάνω ημισφαίριο του παρόντος προβλήματος μπορεί να λυθεί από μόνο του, αφού ξέρουμε το δυναμικό σε όλα τα όρια του συγκεκριμένου χώρου. Αν λύσουμε το πρόβλημα στο πάνω ημισφαίριο η λύση στο κάτω είναι προφανώς η άρτια επέκτασή του.

Το πάνω ημισφαίριο μπορεί να θεωρηθεί επαλληλία ενός σταθερού δυναμικού V_0 και ενός νέου προβλήματος σε κενό ημισφαίριο, του οποίου η ημισφαιρική επιφάνεια βρίσκεται σε δυναμικό $-V_0$ και η βάση σε μηδενικό δυναμικό. Οι οριακές αυτού του νέου προβλήματος ικανοποιούνται από το πρόβλημα [1] για $r < R$, απλά αντικαθιστώντας $V_0 \rightarrow -V_0$, διότι στο πρόβλημα [1] το δυναμικό είναι περιττό και άρα μηδενίζεται στο επίπεδο που χωρίζει τα δύο ημισφαίρια. Επομένως η λύση στο πάνω ημισφαίριο $r < R$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ του παρόντος προβλήματος είναι $V = V_0 + (-V_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+3) \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{r^{2n+1}}{R^{2n+1}} P_{2n+1}(\cos \theta)$. Στο κάτω ημισφαίριο ισχύει η άρτια επέκταση του παραπάνω, άρα σε όλο το χώρο $r < R$ είναι $V = V_0 - V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+3) \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{r^{2n+1}}{R^{2n+1}} P_{2n+1}(|\cos \theta|)$.

Οι δύο μορφές της λύσης είναι ισοδύναμες γιατί για τα πολυώνυμα Legendre ισχύει $P'_\ell(0) = (-1)^{(\ell-1)/2} \frac{\ell!!}{(\ell-1)!!}$ για περιττό $\ell = 2n+1$.

[3]: (α) Είναι $\sigma(\theta) = \sigma_0 [1 + \cos(3\theta)] = \sigma_0 (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 1)$ διότι $\cos(3\theta) = \cos(2\theta +$

$\theta) = \cos(\theta + \theta) \cos \theta - \sin(\theta + \theta) \sin \theta = \cos^3 \theta - \sin^2 \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$. Η $\sigma(\theta)$ μπορεί να γραφεί σαν επαλληλία πολυωνύμων Legendre. Είναι $x^3 = \frac{2P_3(x) + 3x}{5}$, $x = P_1(x)$, $1 = P_0(x)$, οπότε $4x^3 - 3x + 1 = \frac{8}{5} P_3(x) - \frac{3}{5} P_1(x) + P_0(x)$, δηλ. $\sigma(\theta) = \sigma_0 \left[\frac{8}{5} P_3(\cos \theta) - \frac{3}{5} P_1(\cos \theta) + P_0(\cos \theta) \right]$. Η σταθερά σ_0 θα βρεθεί από το δεδομένο συνολικό φορτίο του φλοιού:

$$Q = \iint \sigma da = R^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi R^2 \sigma_0 \int_{\cos \theta = -1}^{\cos \theta = 1} (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 1) d(\cos \theta) = 4\pi R^2 \sigma_0 \Leftrightarrow \sigma_0 = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Αλλιώς: $Q = R^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi R^2 \sigma_0 \int_{-1}^1 \left[\frac{8}{5} P_3(x) - \frac{3}{5} P_1(x) + P_0(x) \right] P_0(x) dx = 2\pi R^2 \sigma_0 \int_{-1}^1 [P_0(x)]^2 dx$ αφού τα πολυώνυμα Legendre είναι ορθογώνια, άρα $Q = 4\pi R^2 \sigma_0$.

Λόγω της μορφής της $\sigma(\theta)$ η λύση θα έχει μόνο τους όρους $\ell = 0, 1, 3$, δηλ. θα είναι (αφού διώχνουμε τους όρους που δίνουν απειρισμούς στα $r = 0$ και $r = \infty$ και υποθέσουμε ότι $V \rightarrow 0$ για $r \rightarrow \infty$ - το τελευταίο δεν είναι απαραίτητο) $V = \begin{cases} a_0 P_0(\cos \theta) + a_1 r P_1(\cos \theta) + a_3 r^3 P_3(\cos \theta), & r \leq R \\ \frac{b_0}{r} P_0(\cos \theta) + \frac{b_1}{r^2} P_1(\cos \theta) + \frac{b_3}{r^4} P_3(\cos \theta), & r \geq R \end{cases}$ Η συνέχεια του δυναμικού στην ακτίνα $r = R$ δίνει (εξισώνουμε τους συντελεστές των $P_\ell(\cos \theta)$ στις δυο εκφράσεις) $b_0 = a_0 R$, $b_1 = a_1 R^3$, $b_3 = a_3 R^7$.

Η ασυνέχεια της συνιστώσας $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ συνδέεται με την $\sigma(\theta)$: $-\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R^+} + \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R^-} = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \frac{a_0}{R} P_0(\cos \theta) + 3a_1 P_1(\cos \theta) + 7a_3 R^2 P_3(\cos \theta) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left[P_0(\cos \theta) - \frac{3}{5} P_1(\cos \theta) + \frac{8}{5} P_3(\cos \theta) \right]$, οπότε $a_0 = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0}$, $a_1 = -\frac{\sigma_0}{5\epsilon_0}$, $a_3 = \frac{8\sigma_0}{35\epsilon_0 R^2}$. Τελικά η λύση είναι (αφού ικανοποιεί όλες τις οριακές είναι η μόνη λύση, δηλ. σωστά υποθέσαμε ότι μένουν μόνο οι όροι με $\ell = 0, 1, 3$) $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \times$

$\begin{cases} 1 - \frac{r}{5R} \cos \theta + \frac{8r^3}{35R^3} \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2}, & r \leq R \\ \frac{R}{r} - \frac{R^2}{5r^2} \cos \theta + \frac{8R^4}{35r^4} \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2}, & r \geq R \end{cases}$
(β) Το δυναμικό στην ακτίνα $r = R$ γράφεται $C + V_0 \cos^2 \theta = \left(C + \frac{V_0}{3} \right) P_0(\cos \theta) + \frac{2V_0}{3} P_2(\cos \theta)$.

$$\text{Άρα } V = \begin{cases} a_0 P_0(\cos \theta) + a_2 r^2 P_2(\cos \theta), & r \leq R \\ \left(A_0 + \frac{B_0}{r} \right) P_0(\cos \theta) + \frac{B_2}{r^3} P_2(\cos \theta), & r \geq R \end{cases}$$

(Στην εξωτερική περιοχή δεν επιτρέπεται να μηδενίσουμε τη σταθερά A_0 διότι το πρόβλημα μας έχει δώσει κάποιο δυναμικό χωρίς να μας λείπει που είναι το σημείο αναφοράς – θα χαθεί η γενικότητα αν υποθέσουμε ότι το σημείο αναφοράς είναι στο $r = \infty$.)

$$\text{Από } V|_{r=R^-} = \left(C + \frac{V_0}{3} \right) P_0(\cos \theta) + \frac{2V_0}{3} P_2(\cos \theta) \\ \text{έχουμε } a_0 = C + \frac{V_0}{3} \text{ και } a_2 = \frac{2V_0}{3R^2}, \text{ ενώ η} \\ V|_{r=R^+} = \left(C + \frac{V_0}{3} \right) P_0(\cos \theta) + \frac{2V_0}{3} P_2(\cos \theta) \text{ δίδει} \\ A_0 = C + \frac{V_0}{3} - \frac{B_0}{R} \text{ και } B_2 = \frac{2V_0 R^3}{3}.$$

Η απαίτηση το συνολικό φορτίο να είναι Q , δίνει ότι ο μονοπολικός όρος σε μεγάλες αποστάσεις πρέπει να είναι ίσος με $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, δηλ. $B_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$.

Αλλιώς: Σε κάθε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r > R$ πρέπει να είναι (από νόμο Gauss) $Q = \epsilon_0 \iint E_r da = 2\pi\epsilon_0 \int_0^\pi \left[B_0 P_0(\cos \theta) + \frac{3B_2}{r^2} P_2(\cos \theta) \right] \sin \theta d\theta = 4\pi\epsilon_0 B_0$ (είτε κάνοντας άμεσα το ολοκλήρωμα είτε εκμεταλλευόμενοι τη σχέση ορθογωνιότητας $\int_0^\pi P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 P_n(x) P_0(x) dx = 0$ αν $n \neq 0$, ενώ για $n = 0$, $\int_0^\pi P_0(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 2$).

Ένας άλλος τρόπος να υπολογίσουμε το B_0 είναι να βρούμε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην επιφάνεια $r = R$ από $\sigma_R(\theta) = \epsilon_0 (E_r|_{r=R^+} - E_r|_{r=R^-})$ και να απαιτήσουμε $\iint \sigma_R R^2 \sin \theta d\theta d\phi = Q$.

$$\text{Τελικά } V = \begin{cases} C + \frac{V_0}{3} + \frac{V_0 r^2}{R^2} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right), & r \leq R \\ C + \frac{V_0}{3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{V_0 R^3}{r^3} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right), & r \geq R \end{cases}$$

Προκύπτει $V_\infty = C + \frac{V_0}{3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$. Αν το δυναμικό μηδενίζεται στο $r = \infty$ είναι $C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{V_0}{3}$.

Ακολουθεί ένας πολύ πιο γρήγορος τρόπος λύσης: Από τη στιγμή που γράψαμε το δυναμικό στην ακτίνα $r = R$ σαν επαλληλία όρων $C_\ell P_\ell(\cos \theta)$, μπορούμε να επεκτείνουμε τους όρους αυτούς στην περιοχή

$r \leq R$ σαν $C_\ell \frac{r^\ell}{R^\ell} P_\ell(\cos \theta)$. Αυτή η επιλογή γίνεται αφενός για να ικανοποιεί κάθε όρος την εξίσωση Laplace και αφετέρου για να είναι ίσος με την δεδομένη τιμή για $r = R$. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι $V|_{r=R} = \left(C + \frac{V_0}{3} \right) P_0(\cos \theta) + \frac{2V_0}{3} P_2(\cos \theta)$, οπότε $V = \left(C + \frac{V_0}{3} \right) P_0(\cos \theta) + \frac{2V_0}{3} \frac{r^2}{R^2} P_2(\cos \theta)$

για $r \leq R$.

Όμοια στην εξωτερική περιοχή κάθε όρος $C_\ell P_\ell(\cos \theta)$ με $\ell \neq 0$ επεκτείνεται στον $C_\ell \frac{R^{\ell+1}}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta)$. Για $\ell = 0$ χρειάζεται περισσότερη προσοχή, γιατί υπάρχουν δύο όροι που ικανοποιούν την Laplace και αποτελούν επέκταση του σταθερού όρου $C_0 P_0(\cos \theta)$. Ο ένας όρος είναι μια σταθερά A_0 και ο άλλος είναι ο $\frac{B_0}{r}$, με την απαίτηση το άθροισμά τους να δίνει το C_0 για $r = R$, δηλ. $A_0 = C_0 - \frac{B_0}{R}$. Ο όρος $\frac{B_0}{r}$ σχετίζεται με το συνολικό φορτίο Q για $r \leq R$: Σε κάθε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r > R$ πρέπει να είναι (από νόμο Gauss) $Q = \epsilon_0 \iint E_r da$. Κάθε όρος $C_\ell \frac{R^{\ell+1}}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta)$ του δυναμικού με $\ell \neq 0$ δίνει

πεδίο $(E_r)_\ell = (\ell + 1) C_\ell \frac{R^{\ell+1}}{r^{\ell+2}} P_\ell(\cos \theta)$ με αντίστοιχη συνεισφορά στο ολοκλήρωμα που δίνει το φορτίο $Q_\ell = 2\pi\epsilon_0 (\ell + 1) C_\ell \frac{R^{\ell+1}}{r^\ell} \int_0^\pi P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0$,

γιατί $\int_0^\pi P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_0(x) dx = 0$ για $\ell \neq 0$, εκμεταλλευόμενοι τη σχέση ορθογωνιότητας. Άρα στο ολοκλήρωμα $Q = \epsilon_0 \iint E_r da$ μένει μόνο η συνεισφορά από τον $\ell = 0$ όρο του δυναμικού $C_0 - \frac{B_0}{R} + \frac{B_0}{r}$, ο οποίος δίνει πεδίο

$(E_r)_{\ell=0} = \frac{B_0}{r^2}$, σταθερό πάνω στη σφαίρα ακτίνας r . Άρα $Q = \epsilon_0 \iint (E_r)_{\ell=0} da = 4\pi\epsilon_0 B_0 \Leftrightarrow B_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$. Επομένως ο όρος C_0 επεκτείνεται σαν $C_0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι

$V|_{r=R} = \left(C + \frac{V_0}{3} \right) P_0(\cos \theta) + \frac{2V_0}{3} P_2(\cos \theta)$, οπότε $V = C + \frac{V_0}{3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{2V_0}{3} \frac{R^3}{r^3} P_2(\cos \theta)$ για $r \geq R$.

(γ) Η συνάρτηση του δυναμικού είναι τέτοια ώστε πάνω στην σφαιρική επιφάνεια $r = R$ (και για $r = R^+$ και για $r = R^-$ αφού η εφαπτομενική συνιστώσα του πεδίου είναι συνεχής) να είναι $E_\theta|_{r=R} = E_0 \sin(2\theta) \Leftrightarrow - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right]_{r=R} = 2E_0 \sin \theta \cos \theta$. Αφού η προηγούμενη ισχύει για κάθε θ μπορεί να ολοκληρωθεί $V|_{r=R} = -2RE_0 \int \sin \theta \cos \theta d\theta \Leftrightarrow V|_{r=R} = C + RE_0 \cos^2 \theta$.

Αλλιώς: Αν θεωρήσουμε δυναμικό αναφοράς C σε σημείο της σφαίρας $r = R$, έστω στον ισημερινό $\theta = \pi/2$, η $V(r = R, \theta) - V(r = R, \theta = \pi/2) =$

$\int_{(r=R, \theta)}^{(r=R, \theta=\pi/2)} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ διαλέγοντας διαδρομή πάνω στη σφαίρα με $d\vec{r} = R d\theta \hat{\theta}$ δίνει $V(r = R, \theta) - C = \int_{\theta}^{\pi/2} E_{\theta} R d\theta = R E_0 \cos^2 \theta$, οπότε καταλήγουμε ξανά στην $V|_{r=R} = C + R E_0 \cos^2 \theta$. Το πρόβλημα ανάγεται σε αυτό του προηγούμενου ερωτήματος με $V_0 = R E_0$ (C είναι τώρα αυθαίρετη σταθερά και μπορούμε να τη διαλέξουμε ώστε να μηδενίζεται το δυναμικό στο ∞). Η λύση είναι

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{E_0 r^2}{R} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right), & r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{E_0 R^4}{r^3} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right), & r \geq R \end{cases}$$

Ένας δεύτερος τρόπος ακολουθεί:

Η γενική λύση της Laplace (ισχύει στους χώρους $r > R$, $r < R$ όπου δεν υπάρχουν φορτία):

$$V = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_{\ell} r^{\ell} + \frac{b_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta), & r < R \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta), & r > R \end{cases}$$

Πρέπει $b_{\ell} = 0$ ώστε το δυναμικό να μην απειρίζεται στο $r = 0$. Πρέπει $A_{\ell} = 0$ για $\ell \neq 0$ ώστε το δυναμικό να μην απειρίζεται στο $r = \infty$. Μπορούμε να διαλέξουμε αυθαίρετα την προσθετική σταθερά $A_0 = 0$ ώστε το δυναμικό να μηδενίζεται για $r \rightarrow \infty$. Η οριακή συνθήκη $V_{r=R^+} = V_{r=R^-}$ δίνει $\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} R^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) =$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \Leftrightarrow B_{\ell} = a_{\ell} R^{2\ell+1} \text{ Άρα}$$

$$V = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & r \leq R \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a_{\ell} R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta), & r \geq R \end{cases}$$

Η $\hat{\theta}$ συνιστώσα του πεδίου είναι $E_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} =$

$$\begin{cases} -\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} r^{\ell-1} \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{d\theta}, & r \leq R \\ -\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a_{\ell} R^{2\ell+1}}{r^{\ell+2}} \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{d\theta}, & r \geq R \end{cases}$$

Στην ακτίνα $r = R$ η συνιστώσα αυτή είναι συνεχής (όπως όφειλε αφού η συνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου είναι ισοδύναμη με την συνέχεια του δυναμικού, κάτι που έχουμε ήδη απαιτήσει να ισχύει) και πρέπει να ισούται με τη δεδομένη, δηλ. $-\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} R^{\ell-1} \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{d\theta} = E_0 \sin(2\theta)$. Ο

ευκολότερος τρόπος να αντιμετωπίσουμε την προηγούμενη ισότητα είναι να την ολοκληρώσουμε ως προς θ , μετατρέποντας το αριστερό μέλος σε γραμμικό συνδυασμό πολωνύμων Legendre (και όχι των παραγώγων τους). Είναι $\int \sin(2\theta) d\theta = C' - \cos^2 \theta$

οπότε η ισότητα γίνεται $-\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta) =$

$E_0(C' - \cos^2 \theta)$. Αποφεύγουμε το «τέχνασμα Fourier» γράφοντας και το δεξί μέλος σαν επαλληλία

πολυωνύμων Legendre. Από $P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2P_2(x) + 1}{3}$, οπότε $E_0(C' - \cos^2 \theta) =$

$E_0 \left(C' - \frac{1}{3} \right) P_0(\cos \theta) - \frac{2}{3} E_0 P_2(\cos \theta)$. Εξισώνον-

τας τους συντελεστές του κάθε P_{ℓ} στα δύο μέλη βρίσκουμε ότι τα μόνα μη μηδενικά a_{ℓ} είναι τα $a_0 = -E_0 R \left(C' - \frac{1}{3} \right)$ και $a_2 = \frac{2E_0}{3R}$, οπότε $V =$

$$\begin{cases} -E_0 R \left(C' - \frac{1}{3} \right) + \frac{2E_0}{3R} r^2 P_2(\cos \theta), & r \leq R \\ -E_0 R^2 \left(C' - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{r} + \frac{2E_0 R^4}{3} \frac{1}{r^3} P_2(\cos \theta), & r \geq R \end{cases}$$

Ο μονοπολικός όρος της περιοχής που εκτείνεται σε μεγάλες αποστάσεις (δηλ. της $r > R$) πρέπει να ισούται με $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, οπότε

$$-E_0 R^2 \left(C' - \frac{1}{3} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}. \text{ Τελική έκφραση λύσης}$$

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{2E_0 r^2}{3R} P_2(\cos \theta), & r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{2E_0 R^4}{3r^3} P_2(\cos \theta), & r \geq R \end{cases}$$

[4]: (α) Λόγω της μορφής του $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ υποθέτουμε ότι η κατάλληλη λύση της Laplace έχει μόνο τον $\ell = 1$ όρο, με το $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ (δεν έχει τον $\ell = 0$ όρο αφού το δυναμικό πρέπει να μηδενίζεται για $\theta = \pi/2$). Είναι για $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\text{δηλ. } V = \begin{cases} a_1 r \cos \theta, & r \leq R \\ \frac{b_1}{r^2} \cos \theta, & r \geq R \end{cases} \text{ και το αντί-}$$

$$\text{στοιχο ηλεκτρικό πεδίο } \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} =$$

$$\begin{cases} -a_1 \cos \theta \hat{r} + a_1 \sin \theta \hat{\theta}, & r < R \\ \frac{2b_1}{r^3} \cos \theta \hat{r} + \frac{b_1}{r^3} \sin \theta \hat{\theta}, & r > R \end{cases}$$

Αυτή η μορφή ικανοποιεί την οριακή $V|_{\theta=\pi/2} = 0$ σε όλα τα r , ενώ η συνέχεια του δυναμικού στην επιφάνεια $r = R$ δίνει $b_1 = a_1 R^3$. Τέλος, η οριακή

$$E_r|_{r=R^+} - E_r|_{r=R^-} = \frac{\sigma_0 \cos \theta}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \frac{2b_1}{R^3} + a_1 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}. \text{ Το}$$

$$\text{σύστημα δίνει } a_1 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \text{ και } b_1 = \frac{\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0}.$$

$$\text{Η λύση } V = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r \cos \theta, & r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos \theta, & r \geq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες άρα είναι η

μοναδική λύση του προβλήματος (σωστά υποθέσαμε ότι η κατάλληλη λύση της Laplace έχει μόνο τον $\ell = 1$ όρο).

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}), & r < R, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}), & r > R, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

(β) Το πεδίο λίγο πάνω από την πλάκα (για $\theta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$) είναι $\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \hat{\theta}$ για $r < R$ και $\frac{\sigma_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} \hat{\theta}$ για $r > R$.

Το πεδίο λίγο έξω από την επιφάνεια της αγωγίμης πλάκας είναι $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$, επομένως η επιφανειακή πυκνότητα

της πλάκας είναι $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{z}$. Για $r < R$ προκύπτει

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma_0}{3} \text{ και για } r > R \text{ προκύπτει } \sigma_2 = -\frac{\sigma_0 R^3}{3r^3}$$

(είναι $\hat{\theta} \cdot \hat{z} = -1$ στην επιφάνεια $\theta = \pi/2$).

Το ολικό επαγόμενο φορτίο στην πλάκα είναι $Q =$

$$\int_0^R \sigma_1 2\pi r dr + \int_R^\infty \sigma_2 2\pi r dr = -\sigma_0 \pi R^2.$$

Θα μπορούσαμε να βρούμε το ολικό φορτίο Q σαν αντίθετο του φορτίου του κελύφους, δηλ. $Q =$

$$-\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sigma_0 \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\phi = -\sigma_0 \pi R^2, \text{ αφού}$$

το συνολικό φορτίο πλάκας και κελύφους είναι μηδενικό, σαν το έγκλειστο φορτίο μιας επιφάνειας ως το άπειρο, στην οποία η ροή του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδενική (μιας και το πεδίο ελαττώνεται σαν $1/r^3$ στον πάνω ημιχώρο και είναι μηδενικό στον κάτω).

Για να λύσουμε το πρόβλημα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία ειδώλων. Το είδωλο του ημισφαιρικού κελύφους το οποίο έχει επιφανειακό φορτίο $\sigma_0 \cos \theta$ για $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ είναι ένα κατοπτρικό κέλυφος με αντίθετο φορτίο, δηλ. κέλυφος με επιφανειακό φορτίο $\sigma_0 \cos \theta$ για $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$. Έτσι θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα σφαιρικού κελύφους φορτισμένου με επιφανειακό φορτίο $\sigma_0 \cos \theta$. Το πλαστό αυτό πρόβλημα και το πραγματικό έχουν ίδιες οριακές και άρα ίδια λύση στον χώρο $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

[5]: (α) Στο χώρο $0 < r < R$ ισχύει η Laplace. Σε σύστημα με κέντρο το κέντρο του φλοιού και άξονα z στη φορά του $\vec{p}$ το δυναμικό είναι αξιsymμετρικό.

Από τη γενική λύση $V = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_\ell r^\ell + \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos \theta)$

διώχνουμε τους όρους που απειρίζονται για $r \rightarrow 0$, εκτός τον $\ell = 1$ ο οποίος θα πρέπει να δίνει το δυναμικό του διπόλου $V \approx \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ για $r \ll R$, δηλ. πρέπει

$b_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}$. Υποθέτουμε ότι οι όροι με $\ell = 0$ και $\ell = 1$ θα είναι αρκετοί για να περιγράψουν το δυναμικό (κρατάμε τον όρο $\ell = 1$, δηλ. το $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$ ο οποίος «επιλέγεται» από τη μορφή του δυναμικού σε $r \ll R$ και τον όρο με $\ell = 0$ ο οποίος δίνει την αυθαίρετη προσθετική σταθερά που πάντα κρατάμε μέχρι να επιλέξουμε σημείο αναφοράς μηδενικού δυναμικού). Άρα η λύση είναι της μορφής $V = a_0 + a_1 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Αν το δυναμικό του αγωγίμου φλοιού είναι C (σταθερό) η οριακή συνθήκη $V|_{r=R^-} = C$ δίνει $a_0 + \left(a_1 R + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) \cos \theta =$

$$C \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = C \\ a_1 = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \end{cases} \text{ Το δυναμικό λοιπόν είναι}$$

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \cos \theta + C \text{ για } 0 < r \leq R.$$

Η λύση ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες και σύμφωνα με το θεώρημα μοναδικότητας είναι η μόνη λύση του προβλήματος (σωστά υποθέσαμε δηλαδή ότι μένουν μόνο οι όροι $\ell = 0$ και $\ell = 1$).

Ακόμα και πριν βρούμε το πεδίο $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ μπορούμε να αναγνωρίσουμε τι πεδία δίνει ο κάθε όρος της λύσης: Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο πεδίο του διπόλου $\vec{p}$. Ο δεύτερος όρος γράφεται $-\frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{z}$ και αντιστοιχεί σε ομογενές πεδίο $\frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{z}$ το οποίο δημιουργείται από τα επαγόμενα φορτία.

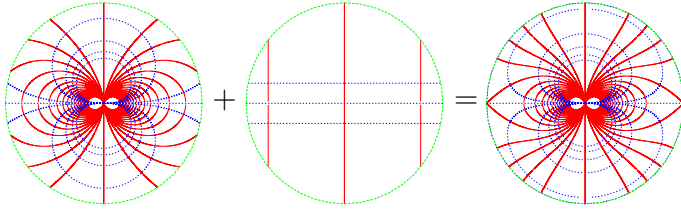
Ένας δεύτερος τρόπος να βρούμε εξ αρχής το δυναμικό βασίζεται στην αρχή της επαλληλίας. Το δυναμικό μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα $V = V_p + V_1$ του δυναμικού του διπόλου $V_p = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ και του δυναμικού V_1 από τα επαγόμενα φορτία. Η V_1 ικανοποιεί την εξίσωση Laplace με οριακή συνθήκη $V_1|_{r=R^-} = C - V_p|_{r=R^-} = C - \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. Επίσης, η V_1 δεν πρέπει να απειρίζεται για $r \rightarrow 0$, επομένως καταλήγουμε στη μορφή $V_1 = a_0 + a_1 r \cos \theta$, κρατώντας πάλι όρους μέχρι $\ell = 1$ (ο όρος $\ell = 1$ «επιλέγεται» τώρα από την οριακή συνθήκη για $r = R$). Η οριακή συνθήκη $V_1|_{r=R^-} = C - \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ δίνει τις σταθερές a_0 και a_1 οπότε καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Το πεδίο $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ για $0 < r < R$ είναι $\vec{E} = \frac{p (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$.

Ο πρώτος όρος είναι το πεδίο του διπόλου ενώ ο δεύτερος είναι ομογενές πεδίο $\frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{z}$ διότι $\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} = (\hat{z} \cdot \hat{r}) \hat{r} + (\hat{z} \cdot \hat{\theta}) \hat{\theta} = \hat{z}$.

Το παρακάτω σχήμα δείχνει τις ισοδυναμικές επιφά-

νεις (μπλε) και τις δυναμικές γραμμές (κόκκινο) για το πεδίο διπόλου (αριστερά), το ομογενές πεδίο (κέντρο) και το ολικό πεδίο (δεξιά), στο επίπεδο (r, θ) των σφαιρικών συντεταγμένων.



Η εξίσωση των δυναμικών γραμμών προκύπτει είτε σαν κάθετη στις ισοδυναμικές επιφάνειες, είτε με ολοκλήρωση της $\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin \theta d\phi}{E_\phi}$. Για αξι-συμμετρικά πεδία με $E_\phi = 0$ η τελευταία ισότητα συνεπάγεται απλά ότι κάθε δυναμική γραμμή βρίσκεται σε επίπεδο σταθερού ϕ , ενώ η πρώτη ισότητα δίνει την σχέση μεταξύ r και θ . Έτσι για το διπολικό πεδίο προκύπτει $\frac{dr}{d\theta} = \frac{2r \cos \theta}{\sin \theta} \Leftrightarrow \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta} - \frac{dr}{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \theta}{r} = \text{σταθερό}$. Η σταθερά μπορεί να συνδεθεί με την ροή Φ του ηλεκτρικού πεδίου που διέρχεται μέσα από το τμήμα σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r , από τον άξονα $\theta = 0$ μέχρι κάποια γωνία θ . Είναι $\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_0^\theta E_r(r, \theta) r^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{p}{2\epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r}$, επομένως η εξίσωση κάθε δυναμικής γραμμής είναι $\frac{\sin^2 \theta}{r} = \frac{2\epsilon_0}{p} \Phi$.

(Παρατηρήστε ότι η εξίσωση της δυναμικής γραμμής προέκυψε και σαν $\Phi(r, \theta) = \Phi = \text{σταθερή}$, όπου $\Phi(r, \theta)$ η έκφραση του ολοκληρώματος $\iint \vec{E} \cdot d\vec{a}$. Αυτό συμβαίνει όταν το δυναμικό είναι αξισυμμετρικό και στο χώρο που θέλουμε να βρούμε τις δυναμικές γραμμές δεν υπάρχουν φορτία, οπότε η ροή διατηρείται. Σε αυτή την περίπτωση η $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ συνεπάγεται $\vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\Phi}{2\pi r \sin \theta} \hat{\phi} \right)$ με την συνάρτηση Φ να είναι η ροή αφού $\iint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iint \vec{\nabla} \times \left(\frac{\Phi}{2\pi r \sin \theta} \hat{\phi} \right) \cdot d\vec{a} = \oint \frac{\Phi}{2\pi r \sin \theta} \hat{\phi} \cdot d\vec{\ell} = \Phi$.)

Για το ολικό πεδίο προκύπτει όμοια $\frac{dr}{d\theta} = \frac{2r \left(1 + \frac{r^3}{2R^3} \right) \cos \theta}{\left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \sin \theta} \Leftrightarrow \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta} - \frac{1 - \frac{r^3}{R^3}}{1 + \frac{r^3}{2R^3}} \frac{dr}{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{r^3}{2R^3}}{r} \sin^2 \theta = \frac{2\epsilon_0}{p} \Phi$, διότι $\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{a} =$

$$\int_0^\theta E_r(r, \theta) r^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{p}{2\epsilon_0} \frac{1 + \frac{r^3}{2R^3}}{r} \sin^2 \theta.$$

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην ακτίνα $r = R$ είναι $\sigma_R = \epsilon_0 (E_r|_{r=R^+} - E_r|_{r=R^-}) = \epsilon_0 \left(0 - \frac{3p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 R^3} \right) = -\frac{3p \cos \theta}{4\pi R^3}$.

Το συνολικό φορτίο στην ακτίνα $r = R$ είναι μηδέν διότι το δίπολο επάγει αρνητικά φορτία στο «πάνω» μέρος $0 \leq \theta < \pi/2$ και θετικά στο «κάτω» μέρος $\pi/2 < \theta \leq \pi$, τα οποία όμως είναι αντίθετα λόγω συμμετρίας και εξουδετερώνονται. Πράγματι $\iint \sigma_R da = \int_0^\pi \sigma_R(\theta) R^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 0$.

Αφού ο αγωγός έχει μηδενικό συνολικό φορτίο, στην εξωτερική επιφάνεια $r = R'$ το συνολικό φορτίο είναι επίσης μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι $\sigma_{R'} = 0$ (δεν υπάρχει αίτιο να διαχωρίσει τα φορτία στην εξωτερική επιφάνεια).

Στο εσωτερικό του αγωγού το δυναμικό είναι C και το πεδίο μηδέν.

Σε ακτίνες $r > R'$ το δυναμικό είναι σφαιρικά συμμετρικό οπότε $V = A_0 + \frac{B_0}{r}$. Οι οριακές συνθήκες συνέχειας του δυναμικού, $V|_{r=R'^+} = V|_{r=R'^-} (= C)$ και του ηλεκτρικού πεδίου (αφού $\sigma_{R'} = 0$), $E_r|_{r=R'^+} = E_r|_{r=R'^-} (= 0)$, δίνουν $A_0 = C$ και $B_0 = 0$. Έχουμε λοιπόν σε όλο το χώρο:

$$\Delta \text{ναμικό } V = \begin{cases} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi \epsilon_0 R^2} \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{r}{R} \right) + C, & r \leq R \\ C, & r \geq R \end{cases}$$

(Επιλέγοντας $V = 0$ για $r \rightarrow \infty$ προκύπτει $C = 0$.)

$$\text{Πεδίο } \vec{E} = \begin{cases} \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}}{4\pi \epsilon_0 r^3} + \frac{\vec{p}}{4\pi \epsilon_0 R^3}, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Επαγόμενα φορτία $\sigma_R = -\frac{3\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi R^3}$ στην ακτίνα $r = R$ και $\sigma_{R'} = 0$ στην ακτίνα $r = R'$.

(β) Έστω σύστημα αναφοράς $Ox'y'z'$ με κέντρο το κέντρο του φλοιού και άξονα z' στη φορά του εξωτερικού πεδίου, δηλ. $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}'$. Το πεδίο $\vec{E}_0$ επάγει φορτία στην επιφάνεια $r = R'$ του φλοιού, θετικά στο μέρος $0 \leq \theta' < \pi/2$ και αρνητικά στο μέρος $\pi/2 < \theta' \leq \pi$, τα οποία όμως είναι αντίθετα λόγω συμμετρίας, οπότε το συνολικό επαγόμενο φορτίο είναι μηδέν. Τα επαγόμενα αυτά φορτία θα έχουν τέτοια κατανομή ώστε να μηδενίζεται το συνολικό πεδίο στο εσωτερικό του φλοιού. Επομένως οι χώροι $r \leq R$ και $r \geq R'$ είναι ανεξάρτητοι, διότι τα φορτία που υπάρχουν στον ένα χώρο δεν δημιουργούν πεδίο στον άλλο χώρο.

Στον χώρο $r > R'$ η λύση είναι αξισυμμετρική με άξονα συμμετρίας τον άξονα z' . Από τη γενική λύση

$V = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a'_{\ell} r^{\ell} + \frac{b'_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta')$ διώχνουμε τους όρους $a'_{\ell} r^{\ell}$ με $\ell > 0$ που απειρίζονται για $r \rightarrow \infty$, εκτός τον $\ell = 1$ ο οποίος, μαζί με το σταθερό όρο a'_0 , θα πρέπει να δίνει το δυναμικό του ομογενούς πεδίου $V \approx - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int E_0 dz' = C' - E_0 z'$ για $r \gg R$, δηλ. πρέπει $a'_1 = -E_0$ και $a'_0 = C'$. Υποθέτουμε ότι οι όροι με $\ell = 0$ και $\ell = 1$ θα είναι αρκετοί για να περιγράψουν το δυναμικό (κρατάμε τον όρο $\ell = 1$, δηλ. το $\cos \theta' = P_1(\cos \theta')$ ο οποίος «επιλέγεται» από το ομογενές πεδίο σε $r \gg R$ και τον όρο με $\ell = 0$ ο οποίος δίνει την αυθαίρετη προσθετική σταθερά και το μονοπολικό όρο $\propto 1/r$ που περιμένουμε να μηδενίζεται γιατί το συνολικό φορτίο για $r = R'$ είναι μηδέν). Άρα η λύση είναι της μορφής $V = C' - E_0 r \cos \theta' + \frac{b'_0}{r} + \frac{b'_1}{r^2} \cos \theta'$.

Η προηγούμενη μορφή θα μπορούσε επίσης να προκύψει από την αρχή επαλληλίας, γράφοντας το δυναμικό $V = V_0 + V_1$ σαν άθροισμα του δυναμικού ομογενούς πεδίου $V_0 = C' - E_0 r \cos \theta'$ συν το δυναμικό V_1 από τα επαγόμενα φορτία στην επιφάνεια $r = R'$. Το V_1 δεν πρέπει να απειρίζεται σε μεγάλες αποστάσεις και στην επιφάνεια $r = R'$ ικανοποιεί τη συνθήκη $V_1|_{r=R'+} = C - C' + E_0 R' \cos \theta'$ (ώστε το συνολικό $V = V_0 + V_1$ να είναι C). Η οριακή $V|_{r=R'+} = C$ δίνει $C' - E_0 R' \cos \theta' + \frac{b'_0}{R'} + \frac{b'_1}{R'^2} \cos \theta' = C \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} C' = C - \frac{b'_0}{R'} \\ b'_1 = E_0 R'^3 \end{cases}$$

Η συνθήκη ότι το συνολικό φορτίο στην επιφάνεια $r = R'$ είναι μηδέν δίνει $b'_0 = 0$. Πράγματι, $\sigma_{R'} = \epsilon_0 (E_r|_{r=R'+} - 0) = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}|_{r=R'+} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta' + \frac{\epsilon_0 b'_0}{R'^2}$ και άρα $\iint \sigma_{R'} da = 0 \Leftrightarrow 2\pi R'^2 \int_0^{\pi} \left(3\epsilon_0 E_0 \cos \theta' + \frac{\epsilon_0 b'_0}{R'^2} \right) \sin \theta' d\theta' = 0 \Leftrightarrow b'_0 = 0$.

Το δυναμικό λοιπόν είναι

$$V = C - E_0 r \cos \theta' + \frac{E_0 R'^3 \cos \theta'}{r^2} \text{ για } r \geq R'.$$

Η λύση ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες και σύμφωνα με το θεώρημα μοναδικότητας είναι η μόνη λύση του προβλήματος (σωστά υποθέσαμε δηλαδή ότι μένουν μόνο οι όροι $\ell = 0$ και $\ell = 1$).

Η μορφή της λύσης δείχνει ότι το πεδίο είναι επαλληλία του ομογενούς $\vec{E}_0$ που αντιστοιχεί στον όρο $C - E_0 r \cos \theta' = C - E_0 z'$ και σε πεδίο διπόλου διπολικής ροπής $\vec{p}' = 4\pi\epsilon_0 R'^3 \vec{E}_0$ που αντιστοιχεί στον όρο $\frac{E_0 R'^3 \cos \theta'}{r^2}$. Η έκφραση του πεδίου είναι

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{R'^3}{r^3} \left[3 (\vec{E}_0 \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{E}_0 \right] \text{ για } r > R'.$$

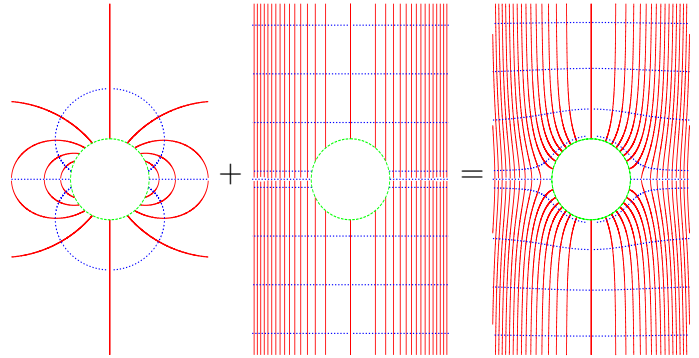
Έχουμε λοιπόν σε όλο το χώρο:

$$\Delta \text{υναμικό } V = \begin{cases} \frac{\vec{p}' \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 R'^2} \left(\frac{R'^2}{r^2} - \frac{r}{R'} \right) + C, & r \leq R \\ C, & R < r < R' \\ R' \vec{E}_0 \cdot \hat{r} \left(\frac{R'^2}{r^2} - \frac{r}{R'} \right) + C, & r > R' \end{cases}$$

(Επιλέγοντας $V = 0$ στο επίπεδο που περνά από το κέντρο του φλοιού και είναι κάθετο στο πεδίο $\vec{E}_0$, δηλ. σε σημεία $\vec{E}_0 \cdot \vec{r} = 0$, προκύπτει $C = 0$.)

$$\text{Πεδίο } \vec{E} = \begin{cases} \frac{3(\vec{p}' \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}'}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{\vec{p}'}{4\pi\epsilon_0 R'^3}, & r < R \\ 0, & R < r < R' \\ \vec{E}_0 + \frac{R'^3}{r^3} \left[3 (\vec{E}_0 \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{E}_0 \right], & r > R' \end{cases}$$

Επαγόμενα φορτία $\sigma_R = -\frac{3\vec{p}' \cdot \hat{r}}{4\pi R^3}$ στην ακτίνα $r = R$ και $\sigma_{R'} = 3\epsilon_0 \vec{E}_0 \cdot \hat{r}$ στην ακτίνα $r = R'$.



Το σχήμα δείχνει τις ισοδυναμικές επιφάνειες (μπλε) και τις δυναμικές γραμμές (κόκκινο) για το πεδίο διπόλου (αριστερά), το ομογενές πεδίο (κέντρο) και το ολικό πεδίο σε ακτίνες $r > R'$ (δεξιά), στο επίπεδο (r, θ) των σφαιρικών συντεταγμένων.

Οι δυναμικές γραμμές, όμοια με την περίπτωση του (α) ερωτήματος, προκύπτουν να έχουν εξίσωση $\frac{1 + \frac{r^3}{2R'^3} \sin^2 \theta}{r} = \frac{\Phi}{2\pi R'^3 E_0}$.

[6]: Πάνω στον ημιάξονα Oz και για $z < R$ το ανάπτυγμα του δοσμένου δυναμικού (χρησιμοποιώντας το δοσμένο ανάπτυγμα της $\frac{1}{\sqrt{1+u}}$ με $u = \frac{z^2}{R^2} < 1$) είναι $V_0 \left(1 - \frac{z}{R} \frac{1}{\sqrt{1+z^2/R^2}} \right) = V_0 \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{z}{R} \right)^{2n+1} \right]$. Συγκρίνοντας με το αποτέλεσμα της γενικής λύσης, με τη μορφή που δίνεται, για $\theta = 0$ οπότε $P_{\ell}(1) = 1$ και $r = z$, δηλ. την $V_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \left(\frac{z}{R} \right)^{\ell}$, προκύπτουν οι τιμές των

a_ℓ :

$$a_\ell = \begin{cases} 1 & \text{για } \ell = 0 \\ 0 & \text{για } \ell \text{ άρτια εκτός του } 0 \\ \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} & \text{για } \ell = 2n + 1 \text{ (περιττά)} \end{cases}$$

Αλλιώς: Το δυναμικό πάνω στον ημιάξονα $\theta = 0$ για $r < R$ γράφεται $V(r, \theta = 0) = V_0 \left[P_0(1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(1) \right]$ και μπορεί να επεκταθεί στα υπόλοιπα θ σαν $V(r, \theta) = V_0 \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta) \right]$. (Η επέκταση γίνεται με τρόπο ώστε η συνάρτηση να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και να έχει τη σωστή τιμή για $\theta = 0$.)

Όμοια, πάνω στον ημιάξονα Oz και για $z > R$ το ανάπτυγμα του δοσμένου δυναμικού (χρησιμοποιώντας το δοσμένο ανάπτυγμα της $\frac{1}{\sqrt{1+u}}$ με

$$u = \frac{R^2}{z^2} < 1) \text{ είναι } V_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}} \right) =$$

$$V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{R}{z} \right)^{2n}. \text{ Συγκρίνοντας με το αποτέλεσμα της γενικής λύσης, με τη μορφή που δίνεται, για } \theta = 0 \text{ οπότε } P_\ell(1) = 1 \text{ και } r = z, \text{ δηλ. την } V_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \left(\frac{R}{z} \right)^{\ell+1}, \text{ προκύπτουν οι τιμές των } b_\ell:$$

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{για } \ell \text{ άρτια} \\ \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} & \text{για } \ell = 2n - 1 \text{ (περιττά)} \end{cases}$$

Αλλιώς: Το δυναμικό πάνω στον ημιάξονα $\theta = 0$ για $r > R$ γράφεται $V(r, \theta = 0) = V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{R}{r} \right)^{2n-1+1} P_{2n-1}(1)$ και μπορεί άμεσα να επεκταθεί στα υπόλοιπα θ σαν $V(r, \theta) = V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{R}{r} \right)^{2n-1+1} P_{2n-1}(\cos \theta)$. (Η επέκταση γίνεται με τρόπο ώστε η συνάρτηση να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και να έχει τη σωστή τιμή για $\theta = 0$.)

Η λύση λοιπόν στον ημικύκλιο $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ είναι (αλλάζοντας $n \rightarrow n+1$ στη λύση της περιοχής $r \geq R$)

$$V \left(r, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) = V_0 \times \begin{cases} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta), & r \leq R \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} \left(\frac{R}{r} \right)^{2n+2} P_{2n+1}(\cos \theta), & r \geq R \end{cases}$$

Αφού δεν υπάρχουν φορτία στην επιφάνεια $r = R$ για $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, πρέπει η $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ συνι-

στώσα του πεδίου να είναι συνεχής. Πράγματι η παραγωγή και των δυο κλάδων της λύσης δίνει μετά από πράξεις ότι $E_r \left(r = R, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right) =$

$$\frac{V_0}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} P_{2n+1}(\cos \theta).$$

Το δυναμικό πρέπει επίσης να είναι συνεχές στην επιφάνεια $r = R$, δηλ. οι δύο κλάδοι της $V(r = R, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}) = V_0 \times$

$$\begin{cases} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} P_{2n+1}(\cos \theta), & r = R^-, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} P_{2n+1}(\cos \theta), & r = R^+, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

πρέπει να ταυτίζονται. Πρέπει δηλ. να είναι

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} P_{2n+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} P_{2n+1}(x) \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

Αυτό δεν είναι προφανές πως υλοποιείται (αν και πρέπει, αφού οι κλάδοι της λύσης προέκυψαν από την επέκταση της δοσμένης $V(z)$ η οποία είναι συνεχής στο $z = R$). Συγκρίνοντας μάλιστα τους συντελεστές του $P_{2n+1}(x)$, στους δύο κλάδους προκύπτουν διαφορετικοί. Μια άλλη διαφορά είναι η ύπαρξη σταθερού όρου στον ένα μόνο κλάδο.

Το λεπτό μαθηματικό σημείο που πρέπει να λάβουμε υπόψη είναι ότι τα αναπτύγματα των συναρτήσεων του θ σε πολυώνυμα Legendre είναι μοναδικά μόνο αν γράφονται στο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$. Στο διάστημα $0 < x \leq 1$ ο τρόπος γραφής δεν είναι μοναδικός, επομένως δυο γραμμικοί συνδυασμοί των πολυωνύμων Legendre μπορεί να είναι ίσοι παρότι έχουν διαφορετικούς συντελεστές. Για παράδειγμα, η μονάδα γράφεται σαν $P_0(x)$, αλλά στο πρόβλημα [1] είδαμε ότι γράφεται και σαν

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(4n+3) \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} P_{2n+1}(x) \text{ με } x \text{ οποια-}$$

δήποτε τιμή στο διάστημα $(0, 1]$.

Οι δυο συνήθεις επιλογές βάσης συναρτήσεων στο διάστημα $(0, 1]$ που αποτελούνται από πολυώνυμα Legendre είναι το σύνολο των άρτιων πολυωνύμων – το οποίο αντιστοιχεί στην άρτια επέκταση της συνάρτησης στο διάστημα $[-1, 1]$ – ή το σύνολο των περιττών πολυωνύμων – το οποίο αντιστοιχεί στην περιττή επέκταση της συνάρτησης στο διάστημα $[-1, 1]$.

Στην περίπτωση μας, οι δυο κλάδοι που δίνουν τη λύση στο διάστημα $x \in (0, 1]$ είναι γραμμένοι σαν επαλληλία περιττών πολυωνύμων Legendre, με μόνη εξαίρεση την μονάδα. Για να συγκρίνουμε λοιπόν τους δυο κλάδους πρέπει πρώτα να γράψουμε και την μονάδα σαν επαλληλία περιττών πολυωνύμων (επεκτείνοντάς την δηλ. με περιττό τρόπο στο $[-1, 1]$).

Αυτό ακριβώς έχει γίνει στο πρόβλημα [1], με το αποτέλεσμα να γράφεται και σαν

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)! (4n+3)}{2^{2n+1} (n!)^2 (n+1)} P_{2n+1}(x)$$

(διότι $\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2 (n+1)}$). Εκφράζοντας και τους δυο κλάδους σαν επαλληλία περιττών πολυωνύμων Legendre (αντικαθιστώντας την μονάδα από την παραπάνω σχέση) προκύπτει ισότητα.

Παρότι η μαθηματική επέκταση της συνάρτησης στο διάστημα $x \in [-1, 0)$ ή στο αντίστοιχο διάστημα $\theta \in (\pi/2, \pi)$ αφού $x = \cos \theta$, βόλεψε να είναι περιττή, η φυσική επέκταση του δυναμικού στον ημιχώρο $z < 0$ είναι προφανώς άρτια, λόγω της συμμετρίας του προβλήματος του οποίου όλες οι οριακές συνθήκες είναι άρτιες $V(0 \leq r < R, z = 0) = V_0$, $V(r > R, z = 0) = 0$, $V(r \rightarrow \infty) = 0$. Άρα η λύση σε όλο το χώρο είναι $V(r, \theta) = V_0 \times$

$$\begin{cases} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(|\cos \theta|), & r \leq R \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2)!}{2^{2n+2} [(n+1)!]^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(|\cos \theta|), & r \geq R \end{cases}$$

Η συνολική (και από τις δύο πλευρές) επιφανειακή πυκνότητα του δίσκου προκύπτει $\sigma_\delta(r) =$

$$2\varepsilon_0 E_z|_{z=0+} = -2\varepsilon_0 E_\theta|_{\theta=(\pi/2)-} = \frac{2\varepsilon_0}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \Big|_{\theta=(\pi/2)-} =$$

$$\frac{\varepsilon_0 V_0}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n-1} (n!)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} \frac{dP_{2n+1}(0)}{dx}.$$

Από τη θεωρία των πολυωνύμων Legendre προκύπτει $\frac{dP_{2n+1}(x)}{dx} \Big|_{x=0} = (2n+1)P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2}$,

$$\text{οπότε } \sigma_\delta(r) = \frac{2\varepsilon_0 V_0}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! (2n+1)!}{2^{4n} (n!)^4} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n}.$$

Όμοια για την πλάκα η συνολική (και από τις δύο πλευρές) επιφανειακή πυκνότητα είναι $\sigma_\pi(r) = -\frac{2\varepsilon_0 V_0}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)! (2n+2)!}{2^{4n+2} (n!)^2 [(n+1)!]^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{2n+3}.$

[7]: Η γενική λύση της εξίσωσης Laplace για προβλήματα με κυλινδρική συμμετρία σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $V(\varpi, \phi) = a_0 + b_0 \ln \varpi + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(a_k \varpi^k + \frac{b_k}{\varpi^k} \right) \cos(k\phi) + \left(c_k \varpi^k + \frac{d_k}{\varpi^k} \right) \sin(k\phi) \right]$. Πρέπει σε κάθε περίπτωση να γράψουμε λύσεις τέτοιας μορφής στις περιοχές $\varpi < R$ και $\varpi > R$ όπου ισχύει η Laplace και να βρούμε τις σταθερές από τις οριακές συνθήκες.

(α) Για $\varpi < R$ διώχνουμε τους όρους με $\ln \varpi$ και $1/\varpi^k$ που απειρίζονται στο $\varpi = 0$. Για $\varpi > R$ διώχνουμε τους όρους ϖ^k που απειρίζονται στο $\varpi \rightarrow \infty$. Δεν διώχνουμε όμως τον όρο με το $\ln \varpi$, παρότι απει-

ρίζεται, γιατί σε μεγάλες αποστάσεις το κέλυφος θα «φαίνεται» σαν μια γραμμική κατανομή φορτίου γραμμικής πυκνότητας λ στην οποία αντιστοιχεί δυναμικό $-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \varpi + \text{σταθερά}$.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα το φορτίο σε ένα μήκος Δz του κελύφους είναι $\int_0^{2\pi} \sigma(\phi) R d\phi \Delta z$, οπότε $\lambda = R \int_0^{2\pi} \sigma(\phi) d\phi = R\sigma_1 \int_0^\pi d\phi + R\sigma_2 \int_\pi^{2\pi} d\phi = \pi R(\sigma_1 + \sigma_2)$ το οποίο περιμένουμε να δώσει $V \approx -\frac{R(\sigma_1 + \sigma_2)}{2\varepsilon_0} \ln \varpi + \text{σταθερά}$ σε μεγάλες αποστάσεις.

Έτσι η λύση γράφεται (για να απλουστεύσουμε τις εκφράσεις του δυναμικού στην ακτίνα $\varpi = R$, οι οποίες θα χρειαστούν στις οριακές συνθήκες) δημιουργούμε παντού το λόγο ϖ/R μετονομάζοντας τις σταθερές (οι οποίες ούτως ή άλλως είναι άγνωστες) $V =$

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln \frac{\varpi}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k \cos(k\phi) + d_k \sin(k\phi)}{(\varpi/R)^k}, & \varpi \geq R \\ A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\phi) + c_k \sin(k\phi)] \left(\frac{\varpi}{R}\right)^k, & \varpi \leq R \end{cases}$$

Η συνέχεια του δυναμικού για $\varpi = R$ δίνει αμέσως (τα δύο ίσα αναπτύγματα Fourier πρέπει να έχουν ίσους συντελεστές των ημιτόνων, συνημιτόνων και ίσους σταθερούς όρους):

$$A_0 = a_0, b_k = a_k, d_k = c_k \text{ για κάθε } k.$$

Άρα $V =$

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln \frac{\varpi}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos(k\phi) + c_k \sin(k\phi)}{(\varpi/R)^k}, & \varpi \geq R \\ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\phi) + c_k \sin(k\phi)] \left(\frac{\varpi}{R}\right)^k, & \varpi \leq R \end{cases}$$

$$\text{και η } E_\varpi = -\frac{\partial V}{\partial \varpi} =$$

$$\begin{cases} -\frac{b_0}{\varpi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{ka_k}{R} \cos(k\phi) + \frac{kc_k}{R} \sin(k\phi)}{(\varpi/R)^{k+1}}, & \varpi > R \\ -\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{ka_k}{R} \cos(k\phi) + \frac{kc_k}{R} \sin(k\phi) \right] \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{k-1}, & \varpi < R \end{cases}$$

$$\text{οπότε η οριακή } E_\varpi|_{\varpi=R^+} - E_\varpi|_{\varpi=R^-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{b_0}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2ka_k}{R} \cos(k\phi) + \frac{2kc_k}{R} \sin(k\phi) \right] = \frac{\sigma(\phi)}{\varepsilon_0} \otimes$$

Άφου στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν είναι τετριμμένο να γράψουμε το δεξί μέλος σαν επαλληλία των $1, \cos(k\phi), \sin(k\phi)$, με $k \in \mathbb{N}^*$ θα χρησιμοποιήσουμε το τέχνασμα Fourier, δηλ. θα πολλαπλασιάσουμε διαδοχικά με $1, \cos(n\phi), \sin(n\phi)$, με $n \in \mathbb{N}^*$ και θα ολοκληρώσουμε στο διάστημα $0 < \phi < 2\pi$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας. Τα ολοκληρώματα $\int_0^{2\pi} \sigma(\phi) \dots d\phi$ υπολογίζονται σαν

$$\sigma_1 \int_0^\pi \dots d\phi + \sigma_2 \int_\pi^{2\pi} \dots d\phi.$$

$$\int_0^{2\pi} \otimes \times 1 d\phi \rightsquigarrow -\frac{b_0}{R} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2ka_k}{R} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(k\phi) d\phi}_0 + \frac{2kc_k}{R} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(k\phi) d\phi}_0 \right] = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sigma(\phi) d\phi}_{\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \Leftrightarrow$$

$$b_0 = -\frac{R(\sigma_1 + \sigma_2)}{2\varepsilon_0}.$$

$$\int_0^{2\pi} \otimes \times \cos(n\phi) d\phi \rightsquigarrow -\frac{b_0}{R} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(n\phi) d\phi}_{0 \text{ για } n \neq 0} +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2ka_k}{R} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(k\phi) \cos(n\phi) d\phi}_{\pi \delta_{kn}} + \right.$$

$$\left. \frac{2kc_k}{R} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(k\phi) \cos(n\phi) d\phi}_0 \right] = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sigma(\phi) \cos(n\phi) d\phi}_0$$

$$\Leftrightarrow a_n = 0 \text{ για κάθε } n \neq 0.$$

$$\int_0^{2\pi} \otimes \times \sin(n\phi) d\phi \rightsquigarrow -\frac{b_0}{R} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(n\phi) d\phi}_0 +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2ka_k}{R} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(k\phi) \sin(n\phi) d\phi}_0 + \right.$$

$$\left. \frac{2kc_k}{R} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(k\phi) \sin(n\phi) d\phi}_{\pi \delta_{kn}} \right] = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sigma(\phi) \sin(n\phi) d\phi}_{(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{1 - (-1)^n}{n}}$$

$$\Leftrightarrow c_n = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \text{ άρτιο} \\ \frac{R(\sigma_1 - \sigma_2)}{\pi \varepsilon_0} \frac{1}{n^2} & \text{αν } n \text{ περιττό} \end{cases}$$

Η τελική λύση είναι (αφού διώξουμε την αυθαίρετη προσθετική σταθερά a_0 , κάτι που σημαίνει ότι θεωρούμε σημείο αναφοράς με μηδενικό δυναμικό το $\varpi = R, \phi = 0$)

$$V = \begin{cases} \frac{R(\sigma_1 + \sigma_2)}{2\varepsilon_0} \ln \frac{R}{\varpi} + \frac{R(\sigma_1 - \sigma_2)}{\pi \varepsilon_0} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(n\phi)}{n^2 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^n}, & \varpi \geq R \\ \frac{R(\sigma_1 - \sigma_2)}{\pi \varepsilon_0} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(n\phi)}{n^2} \left(\frac{\varpi}{R}\right)^n, & \varpi \leq R \end{cases}$$

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης της $\otimes$ είναι να αναπτύξουμε το δεξί μέλος σε σειρά Fourier και στη συνέχεια να εξισώσουμε τους συντελεστές των αντίστοιχων όρων στα δύο μέλη της $\otimes$.

Από τη θεωρία Fourier για περιοδικές συναρτήσεις $f(x)$ με περίοδο T ξέρουμε ότι γράφονται σαν

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos \frac{2k\pi x}{T} + B_k \sin \frac{2k\pi x}{T} \right] \text{ με}$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2k\pi x}{T} dx \text{ για } k \in \mathbb{N} \text{ και}$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{T} dx \text{ για } k \in \mathbb{N}^*.$$

Η εφαρμογή για την $\sigma(\phi)$ η οποία είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ δίνει το ανάπτυγμα της $\sigma(\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi)]$

$$\text{με } A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\phi) \cos(k\phi) d\phi \text{ για } k \in \mathbb{N} \text{ και}$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\phi) \sin(k\phi) d\phi \text{ για } k \in \mathbb{N}^*.$$

Μάλιστα η συγκεκριμένη $\sigma(\phi)$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα μιας σταθεράς και ενός τετραγωνικού παλμού,

$$\sigma(\phi) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \times \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < \phi < \pi \\ -1 & \text{αν } -\pi < \phi < 0 \end{cases}$$

με ανάπτυγμα

$$\sigma(\phi) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \sin(k\phi).$$

Αντικαθιστώντας στην $\otimes$, η εξίσωση των συντελεστών των $1, \cos(k\phi)$ και $\sin(k\phi)$ στα δύο μέλη δίνει τα b_0, a_k, c_k .

(β) Βοηθάει η γραφή της $\sigma(\phi)$ σαν σειρά Fourier.

$$\text{Αυτό γίνεται εύκολα αφού } \sin^2(5\phi) = \frac{1 - \cos(10\phi)}{2},$$

οπότε $\sigma(\phi) = \frac{\sigma_0}{2} \cos(10\phi)$. Υποθέτουμε ότι από τη γενική λύση θα μείνουν μόνο οι όροι με $\cos(10\phi)$ και μάλιστα μόνο αυτοί που δεν απειρίζονται στην κάθε περιοχή. Αφήνουμε επίσης το σταθερό όρο (θα μας δώσει μια προσθετική σταθερά) και τον όρο με το λογάριθμο στην εξωτερική περιοχή.

Αν προσέξουμε ότι το συνολικό φορτίο ανά μήκος είναι $\int_0^{2\pi} \sigma(\phi) R d\phi = \frac{\sigma_0 R}{2} \int_0^{2\pi} \cos(10\phi) d\phi = 0$ μπορούμε να καταλάβουμε ότι ο όρος με το λογάριθμο τελικά δεν θα υπάρχει.

Άρα η λύση είναι της μορφής

$$V = \begin{cases} a_0 + a_{10} \varpi^{10} \cos(10\phi), & \varpi \leq R \\ A_0 + B_0 \ln \varpi + b_{10} \frac{\cos(10\phi)}{\varpi^{10}}, & \varpi \geq R \end{cases}$$

Η συνέχεια του δυναμικού στην ακτίνα $\varpi = R$ δίνει

$$\left. \begin{matrix} a_0 = A_0 + B_0 \ln R \\ a_{10} R^{10} = \frac{b_{10}}{R^{10}} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} A_0 = a_0 - B_0 \ln R \\ b_{10} = a_{10} R^{20} \end{matrix} \right.$$

οπότε το δυναμικό γράφεται

$$V = \begin{cases} a_0 + a_{10} \varpi^{10} \cos(10\phi), & \varpi \leq R \\ a_0 + B_0 \ln \frac{\varpi}{R} + a_{10} R^{20} \frac{\cos(10\phi)}{\varpi^{10}}, & \varpi \geq R \end{cases}$$

Η δεύτερη οριακή συνθήκη στην ακτίνα $\varpi = R$ γρά-

$$\text{φεται } E_{\varpi}|_{\varpi=R^+} - E_{\varpi}|_{\varpi=R^-} = \frac{\sigma(\phi)}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=R^+} + \frac{\partial V}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=R^-} = \frac{\sigma(\phi)}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{B_0}{R} + 20a_{10}R^9 \cos(10\phi) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \cos(10\phi) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} B_0 = 0 \\ a_{10} = \frac{\sigma_0}{40\varepsilon_0 R^9} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } V = \begin{cases} a_0 + \frac{\sigma_0 R}{40\varepsilon_0} \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{10} \cos(10\phi), & \varpi \leq R \\ a_0 + \frac{\sigma_0 R}{40\varepsilon_0} \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{-10} \cos(10\phi), & \varpi \geq R \end{cases}$$

(γ) Στην περιοχή $\varpi < R$ το δυναμικό επεκτείνεται μοναδικά σε $V_0 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^5 \sin(5\phi)$. (Στην εσωτερική περιοχή δεν πρέπει να υπάρχουν οι όροι που απειρίζονται στο $\varpi = 0$, δηλ. ο όρος με το λογάριθμο $\ln \varpi$ και οι όροι $1/\varpi^k$, οπότε η λύση είναι της μορφής $a_0 + a_5 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^5 \sin(5\phi)$. Η απαίτηση στο $\varpi = R$ να ισχύει $V = V_0 \sin(5\phi)$ δίνει $a_0 = 0$ και $a_5 = V_0$.)

Στην εξωτερική περιοχή το δυναμικό επεκτείνεται σε $B_0 \ln \frac{\varpi}{R} + V_0 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{-5} \sin(5\phi)$. (Στην εξωτερική περιοχή δεν πρέπει να υπάρχουν οι όροι ϖ^k που απειρίζονται στο $\varpi = \infty$, αλλά ο όρος με το λογάριθμο $\ln \varpi$ μένει και αντιστοιχεί στο δυναμικό γραμμικής κατανομής φορτίου, αν το συνολικό φορτίο ανά μήκος του φλοιού δεν είναι μηδέν. Επομένως η λύση είναι της μορφής $A_0 + B_0 \ln \varpi + B_5 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{-5} \sin(5\phi)$.

Η απαίτηση στο $\varpi = R$ να ισχύει $V = V_0 \sin(5\phi)$ δίνει $A_0 = -B_0 \ln R$ και $B_5 = V_0$.)

Η σταθερά B_0 σχετίζεται με την γραμμική πυκνότητα λ . Ο νόμος Gauss σε μια κυλινδρική επιφάνεια $\varpi > R$, μήκους L δίνει $\frac{Q_{\text{εγκλ}}}{\varepsilon_0} = \iint E_{\varpi} \varpi d\phi dz \Leftrightarrow$

$$\frac{\lambda L}{\varepsilon_0} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial V}{\partial \varpi}\right) \varpi d\phi L. \text{ Αφού } \int_0^{2\pi} \cos(n\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \sin(n\phi) d\phi = 0, \text{ μόνο ο όρος που προέρχεται από το κομμάτι του δυναμικού } B_0 \ln \varpi \text{ δίνει μη μηδενική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα, δηλ.}$$

$$\frac{\lambda L}{\varepsilon_0} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{B_0}{\varpi}\right) \varpi d\phi L \Leftrightarrow B_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}.$$

Στο ίδιο καταλήγουμε να σκεφτούμε την μορφή του δυναμικού σε αποστάσεις $\varpi \gg R$, από τις οποίες το κυλινδρικό κέλυφος «φαίνεται» σαν μια γραμμική κατανομή φορτίου γραμμικής πυκνότητας λ , η οποία δημιουργεί δυναμικό $-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \varpi$ + σταθερά. Συγκρίνοντας με την μορφή της λύσης της εξίσωσης Laplace σε μεγάλες αποστάσεις (όπου κυριαρχεί ο όρος με το λογάριθμο) προκύπτει $B_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}$.

Ένας τρίτος τρόπος να βρεθεί η σταθερά B_0 βασί-

ζεται στην απαίτηση $\lambda = \int_0^{2\pi} \sigma(\phi) R d\phi$, αφού πρώτα υπολογιστεί η $\sigma(\phi)$ από την ασυνέχεια του ηλεκτρικού πεδίου στην ακτίνα $\varpi = R$. Έχουμε

$$\text{βρει } V = \begin{cases} V_0 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^5 \sin(5\phi), & \varpi \leq R \\ B_0 \ln \frac{\varpi}{R} + V_0 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{-5} \sin(5\phi), & \varpi \geq R \end{cases}$$

$$\text{οπότε } \sigma(\phi) = \varepsilon_0 \left(-\frac{\partial V}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=R^+} + \frac{\partial V}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=R^-}\right) =$$

$$-\varepsilon_0 \frac{B_0}{R} + \frac{10\varepsilon_0 V_0}{R} \sin(5\phi) \text{ και } \lambda = \int_0^{2\pi} \sigma(\phi) R d\phi =$$

$$-2\pi\varepsilon_0 B_0 \Leftrightarrow B_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}.$$

Καταλήξαμε λοιπόν στη λύση

$$V = \begin{cases} V_0 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^5 \sin(5\phi), & \varpi \leq R \\ -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\varpi}{R} + V_0 \left(\frac{\varpi}{R}\right)^{-5} \sin(5\phi), & \varpi \geq R \end{cases}$$

η οποία ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες και άρα είναι η μοναδική λύση του προβλήματος (σωστά κάναμε τις υποθέσεις σχετικά με το ποιοι όροι της γενικής λύσης αρκούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα). Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του κελύφους προκύπτει από την ασυνέχεια του ηλεκτρικού πεδίου:

$$\sigma(\phi) = \varepsilon_0 \left(-\frac{\partial V}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=R^+} + \frac{\partial V}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=R^-}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma(\phi) = \frac{\lambda}{2\pi R} + \frac{10\varepsilon_0 V_0}{R} \sin(5\phi).$$

[8]: (α) Για $\varpi \leq R$ το δυναμικό είναι $V = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \varpi^n \cos(n\phi) + c_n \varpi^n \sin(n\phi)]$ (από τη γενική λύση διώχνουμε τους όρους που απειρίζονται στο $\varpi = 0$).

Για $\varpi = R$ είναι $\sum_{n=0}^{\infty} [a_n R^n \cos(n\phi) + c_n R^n \sin(n\phi)] =$

$\begin{cases} V_0, & \phi \in (0, \pi) \\ 0, & \phi \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$ και με τέχνασμα Fourier βρίσκουμε τους συντελεστές.

Η ολοκλήρωση της σχέσης στο διάστημα $(0, 2\pi)$ δίνει $\int_0^{2\pi} a_0 d\phi = \int_0^{\pi} V_0 d\phi \Leftrightarrow a_0 = \frac{V_0}{2}$.

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση με $\cos(m\phi)$ και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $(0, 2\pi)$ έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n R^n \int_0^{2\pi} \cos(n\phi) \cos(m\phi) d\phi \right.$

$$\left. + c_n R^n \int_0^{2\pi} \sin(n\phi) \cos(m\phi) d\phi \right] = \int_0^{\pi} V_0 \cos(m\phi) d\phi$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [a_n R^n \pi \delta_{nm} + c_n R^n \times 0] = \left[\frac{V_0}{m} \sin(m\phi) \right]_0^{\pi} \Leftrightarrow$$

$$a_m = 0 \text{ για } m \geq 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση με $\sin(m\phi)$ και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $(0, 2\pi)$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n R^n \int_0^{2\pi} \cos(n\phi) \sin(m\phi) d\phi + c_n R^n \int_0^{2\pi} \sin(n\phi) \sin(m\phi) d\phi \right] = \int_0^{\pi} V_0 \sin(m\phi) d\phi$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [a_n R^n \times 0 + c_n R^n \pi \delta_{nm}] = \left[-\frac{V_0}{m} \cos(m\phi) \right]_0^{\pi} \Leftrightarrow$$

$$c_m = \frac{V_0}{\pi m R^m} [1 - (-1)^m].$$

Παραλείποντας όρους που φθίνουν πιο γρήγορα από $(\varpi/R)^2$ το δυναμικό είναι $V \approx \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi R} \varpi \sin \phi$, ή $V \approx \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi R} y$.
 (β) Στον άξονα ($x = y = 0$) το δυναμικό είναι $V = \frac{V_0}{2}$ (ο μέσος όρος των δυναμικών των δύο ημισκυλίνδρων) και το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{2V_0}{\pi R} \hat{y}$. (Το αποτέλεσμα είναι ακριβές, γιατί οι υπόλοιποι όροι που παραλείψαμε στο δυναμικό μηδενίζονται στο $\varpi = 0$.)

[9]: Η μόνη εξάρτηση από το ϕ στο πρόβλημα προέρχεται από τη μορφή της σ . Αυτή μας οδηγεί να υποθέσουμε ότι η λύση θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$V = \begin{cases} C, & \varpi \leq \frac{1}{2} \\ a_0 + b_0 \ln \varpi + \left(a_1 \varpi + \frac{b_1}{\varpi} \right) \cos \phi, & \frac{1}{2} \leq \varpi \leq 1 \\ A_0 + B_0 \ln \varpi + \left(A_1 \varpi + \frac{B_1}{\varpi} \right) \cos \phi, & 1 \leq \varpi \leq 2 \\ 0, & \varpi \geq 2 \end{cases}$$

Επίσης γράφουμε την συνιστώσα $E_{\varpi} = -\frac{\partial V}{\partial \varpi}$ η οποία θα χρειαστεί στις οριακές συνθήκες:

$$E_{\varpi} = \begin{cases} 0, & \varpi < \frac{1}{2} \\ -\frac{b_0}{\varpi} + \left(-a_1 + \frac{b_1}{\varpi^2} \right) \cos \phi, & \frac{1}{2} < \varpi < 1 \\ -\frac{B_0}{\varpi} + \left(-A_1 + \frac{B_1}{\varpi^2} \right) \cos \phi, & 1 < \varpi < 2 \\ 0, & \varpi > 2 \end{cases}$$

Οι ακόλουθες συνθήκες θα καθορίσουν τις σταθε-

ρές.

$\Rightarrow$ Ο αγωγός $\varpi = R_1 = 1/2$ είναι αφόρτιστος: Στην επιφάνεια $\varpi = 1/2$ είναι $\sigma_1(\phi) = \varepsilon_0 (E_{\varpi}|_{\varpi=R_1^+} - E_{\varpi}|_{\varpi=R_1^-}) = -2\varepsilon_0 b_0 + \varepsilon_0 (-a_1 + 4b_1) \cos \phi$, άρα πρέπει $0 = \int_0^{2\pi} \sigma_1(\phi) R d\phi = -4\pi\varepsilon_0 b_0 R \Leftrightarrow b_0 = 0$ ①

Στις ακόλουθες συνθήκες έχουμε ήδη αντικαταστήσει $b_0 = 0$.

$\Rightarrow$ Συνέχεια του δυναμικού στην ακτίνα $\varpi = 1/2$:

$$C = a_0 + \left(\frac{1}{2} a_1 + 2b_1 \right) \cos \phi \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = C & \textcircled{2} \\ a_1 + 4b_1 = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Συνέχεια του δυναμικού στην ακτίνα $\varpi = 1$:

$$a_0 + (a_1 + b_1) \cos \phi = A_0 + (A_1 + B_1) \cos \phi \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = a_0 & \textcircled{4} \\ A_1 + B_1 = a_1 + b_1 & \textcircled{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Στην επιφάνεια $\varpi = R_2 = 1$ η επιφανειακή πυκνότητα είναι $\sigma_2(\phi) = \varepsilon_0 (1 + 10 \cos \phi)$. Άρα $\varepsilon_0 (1 + 10 \cos \phi) = \varepsilon_0 (E_{\varpi}|_{\varpi=R_2^+} - E_{\varpi}|_{\varpi=R_2^-}) \Leftrightarrow 1 + 10 \cos \phi = -B_0 + (-A_1 + B_1) \cos \phi - (-a_1 + b_1) \cos \phi \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} B_0 = -1 & \textcircled{6} \\ a_1 - b_1 - A_1 + B_1 = 10 & \textcircled{7} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Συνέχεια του δυναμικού στην ακτίνα $\varpi = 2$:

$$A_0 + B_0 \ln 2 + \left(2A_1 + \frac{1}{2} B_1 \right) \cos \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln 2 = 0 & \textcircled{8} \\ B_1 + 4A_1 = 0 & \textcircled{9} \end{cases}$$

Οι σχέσεις ①–⑨ δίνουν τις εννέα σταθερές $b_0 = 0$, $C = a_0 = A_0 = \ln 2$, $b_1 = A_1 = B_0 = -1$, $a_1 = B_1 = 4$. Καταλήξαμε λοιπόν στη λύση

$$V = \begin{cases} \ln 2, & \varpi \leq \frac{1}{2} \\ \ln 2 + \left(4\varpi - \frac{1}{\varpi} \right) \cos \phi, & \frac{1}{2} \leq \varpi \leq 1 \\ \ln 2 - \ln \varpi + \left(-\varpi + \frac{4}{\varpi} \right) \cos \phi, & 1 \leq \varpi \leq 2 \\ 0, & \varpi \geq 2 \end{cases}$$

η οποία ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες και άρα είναι η μοναδική λύση του προβλήματος (σωστά κάναμε τις υποθέσεις σχετικά με το ποιοι όροι της γενικής λύσης αρκούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα).