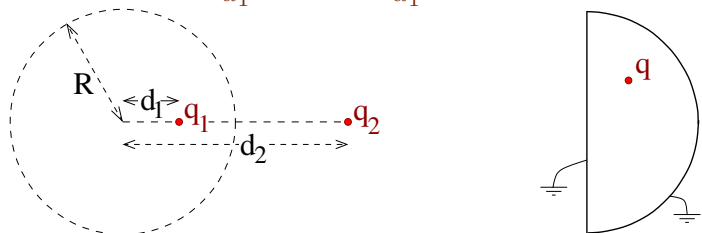


[1]: Ένα απλοϊκό μοντέλο για την κατανομή φορτίου σε ένα σύννεφο κατά τη διάρκεια καταιγίδας είναι ότι υπάρχουν δυο σημειακά φορτία $+Q$ και $-Q$ πάνω στον ίδιο κατακόρυφο άξονα και σε ύψη h_p και h_n αντίστοιχα. Τυπικές τιμές είναι $Q = 40$ C, $h_n = 5$ km, $h_p = 10$ km. Η γη μπορεί να θεωρηθεί ιδανικός-επίπεδος αγωγός. Ποιο το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στην επιφάνεια της γης σαν συνάρτηση της απόστασης από την κατακόρυφο που περνάει από το σύννεφο και ποια η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου; Σε ποια περιοχή είναι θετική και σε ποια αρνητική; Ποιο το συνολικό φορτίο που επάγεται στην επιφάνεια της γης;

[2]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 5/5/2014:

Όπως ξέρουμε από τη μέθοδο ειδώλων τα φορτία q_1 και q_2 του αριστερού σχήματος δημιουργούν μηδενικό δυναμικό στην σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R αν ισχύει $q_2 = -q_1 \frac{R}{d_1}$ και $d_2 = \frac{R^2}{d_1}$.

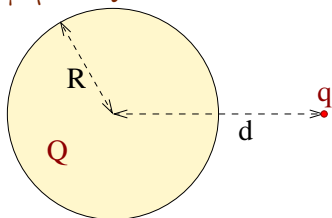


Χρησιμοποιώντας αυτό σαν δεδομένο βρείτε το δυναμικό στο εσωτερικό του γειωμένου ημισφαιρικού αγωγίμου κελύφους του δεξιού σχήματος (και η βάση είναι αγωγή και γειωμένη), στο οποίο υπάρχει φορτίο q σε κάποια θέση μέσα στο κέλυφος. Ζητούνται δηλαδή η θέση και το φορτίο των ειδώλων που απαιτούνται ώστε να μηδενίζεται το δυναμικό τόσο στην ημισφαιρική επιφάνεια, όσο και στη βάση του κελύφους.

Ποιο το συνολικό φορτίο που επάγεται στο κέλυφος;

[3]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 10/6/2014:

Σημειακό φορτίο q βρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο αγωγίμης σφαίρας ακτίνας R (με $R < d$). Η σφαίρα φέρει φορτίο Q .



(α) Να βρεθεί η δύναμη μεταξύ του σημειακού φορτίου και της σφαίρας.

(β) Αν τα φορτία Q και q είναι ομώνυμα να βρεθεί η συνθήκη ώστε η δύναμη αυτή να είναι ελκτική.

Θεωρήστε γνωστό ότι δύο φορτία q και q' που βρίσκονται στις θέσεις $\vec{r} = d\hat{z}$ και $\vec{r}' = d'\hat{z}$ αντίστοιχα

(με $d > d' > 0$), δημιουργούν πεδίο με μηδενικό δυναμικό σε σφαίρα ακτίνας $r = R$ αν ισχύει $d' = R^2/d$ και $q'/q = -R/d$.

[4]: Έχουμε τρεις πλάκες ίδιων διαστάσεων και εμβαδού A , δυο αγωγίμες και μια από μονωτικό υλικό. Το πάχος των πλακών είναι απειροστό και οι διαστάσεις τους πολύ μεγάλες (σε σχέση με τις αποστάσεις στις οποίες τις πλησιάζουμε), οπότε μπορούμε να αγνοήσουμε τα περατωτικά πεδία στις παρυφές τους. Σε κάθε ένα από τα ακόλουθα βήματα (α)–(ζ) ζητούνται το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο, καθώς και οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίου οπουδήποτε αυτές επάγονται.

(α) Η μονωτική πλάκα φορτίζεται με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ και τοποθετείται στη θέση $z = 0$.

(β) Παράλληλα στην μονωτική πλάκα και σε απόσταση d_1 από αυτή, δηλ. στη θέση $z = d_1$, φέρνουμε την μια αγωγή πλάκα, η οποία έχει μηδενικό συνολικό φορτίο.

(γ) Φέρνουμε την δεύτερη αγωγή πλάκα (με επίσης μηδενικό συνολικό φορτίο) στη θέση $z = -d_2$.

(δ) Βραχυκυκλώνουμε τις δύο αγωγίμες πλάκες.

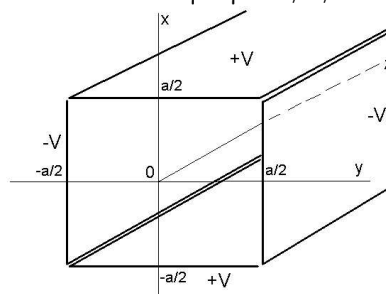
(ε) Η πλάκα από μονωτικό υλικό στη θέση $z = 0$ αντικαθίσταται από αγωγή ίδιων διαστάσεων και συνολικό φορτίο $Q = \sigma A$.

(στ) Φορτίζουμε το βραχυκυκλωμένο ζευγάρι αγωγίμων πλακών (στις θέσεις $z = d_1$ και $z = -d_2$) με συνολικό φορτίο $-Q$ (η αγωγή πλάκα στο $z = 0$ παραμένει φορτισμένη με φορτίο Q).

(ζ) Γειώνουμε το βραχυκυκλωμένο ζευγάρι αγωγίμων πλακών (στις θέσεις $z = d_1$ και $z = -d_2$ · η αγωγή πλάκα στο $z = 0$ παραμένει φορτισμένη με φορτίο Q).

(η) Αν το σύστημα θεωρηθεί πυκνωτής (με την πλάκα $z = 0$ να αποτελεί τον ένα οπλισμό και το βραχυκυκλωμένο ζευγάρι των πλακών $z = d_1$ και $z = -d_2$ να αποτελεί τον άλλο οπλισμό) ποια είναι η χωρητικότητά του C ; Διαπιστώστε ότι το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί παράλληλη σύνδεση δυο απλούστερων πυκνωτών και ελέγξτε αν ισχύει $C = C_1 + C_2$.

[5]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 20/2/2004:



Σύστημα αγωγών απείρου μήκους, βλέπε σχήμα, φέρει δυναμικά $+V$ και $-V$. Να υπολογίσετε:

- (α) την κατανομή του δυναμικού στο χώρο $|x|, |y| < a/2$, και
 (β) την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία $(x = 0, y = 0)$.

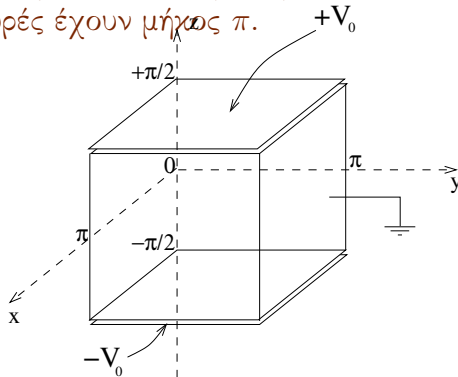
Να δικαιολογήσετε κάθε απάντησή σας.

(Ο χωρισμός των μεταβλητών θεωρείται γνωστός.)

Σχεδιάστε τη συνάρτηση $V(x, y)$ και διαπιστώστε ότι δεν έχει ακρότατα στο εσωτερικό του σωλήνα.

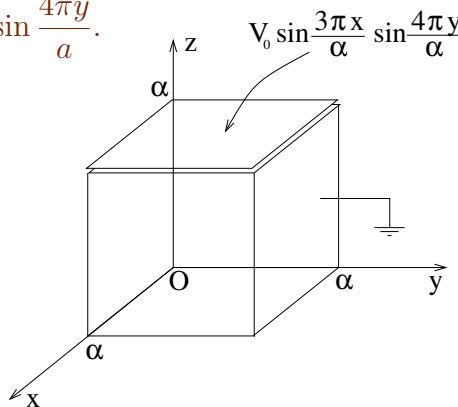
[6]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 26/05/2005:

Ένα μεταλλικό κουτί, σε σχήμα κύβου, αποτελείται από τέσσερις πλάγιες πλευρές που έχουν συγκολληθεί μαζί και γειωθεί (βλέπε σχήμα). Η οροφή και το πάτωμα είναι κατασκευασμένα από άλλα μεταλλικά φύλλα που έχουν μονωθεί από τις πλάγιες πλευρές και διατηρούνται σε σταθερά δυναμικά $+V_0$ και $-V_0$ αντίστοιχα. Βρείτε το δυναμικό μέσα στο κουτί. Όλες οι πλευρές έχουν μήκος π .



[7]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 18/02/2009:

Κυβικό μεταλλικό κιβώτιο ακμής a γειώνεται, ενώ το καπάκι του από μονωτικό υλικό φορτίζεται σε δυναμικό $V_0 \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{a}$.



Να βρεθεί το δυναμικό $V(x, y, z)$ εντός του κιβωτίου $(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a)$.

Βρείτε επίσης την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στις εσωτερικές επιφάνειες των μεταλλικών πλευρών του κουτιού $(x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0)$.

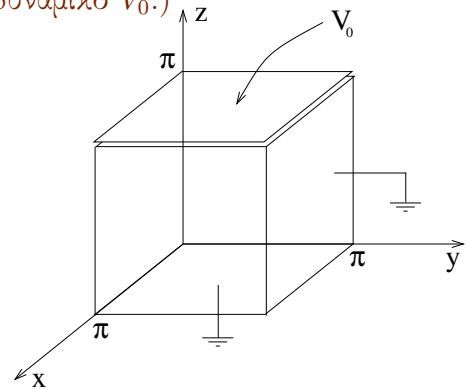
[8]: Θέμα 1^ο από εξέταση της 6/2/2012:

Κυβικό μεταλλικό κιβώτιο ακμής π έχει γειωμένες τις πλάγιες πλευρές και τη βάση του. Η οροφή του έχει μονωθεί από τις πλάγιες πλευρές και φορτίζεται σε σταθερό δυναμικό V_0 .

(α) Να βρεθεί το δυναμικό εντός του κιβωτίου.

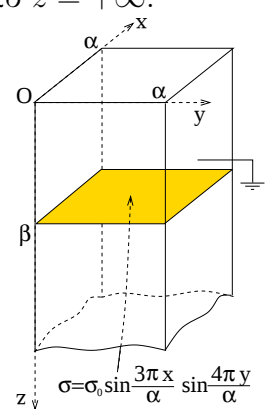
(β) Ποιο είναι το δυναμικό στο κέντρο του κιβωτίου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Σκεφτείτε τι δυναμικό θα είχε το κέντρο αν και οι έξι έδρες είχαν δυναμικό V_0 .)



[9]: Ο ημιάπειρος σωλήνας του σχήματος έχει τετράγωνη διατομή πλευράς a $(0 < x < a, 0 < y < a)$ και εκτείνεται από το $z = 0$ ως το $z = +\infty$.

Η βάση του $z = 0$ καθώς και η παράπλευρη επιφάνειά του είναι γειωμένες. Στη θέση $z = \beta > 0$ υπάρχει τετράγωνη πλάκα η οποία χωρίζει το σωλήνα σε δύο μέρη $(\text{τα } 0 < z < \beta, \beta < z < +\infty)$ και φέρει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \sigma_0 \sin \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{4\pi y}{a} \right)$.



(α) Να βρεθεί το δυναμικό σε όλο το χώρο.

(β) Αν η πλάκα έχει πάχος $mg\hat{z}$ και είναι ελεύθερη να κινείται στην z διεύθυνση, δείξτε ότι ισορροπεί στη θέση $\beta = \frac{a}{10\pi} \ln \frac{\sigma_0^2 a^2}{8\epsilon_0 mg}$ (σημείο ισορροπίας υπάρχει μόνο αν $mg < \sigma_0^2 a^2 / 8\epsilon_0$).

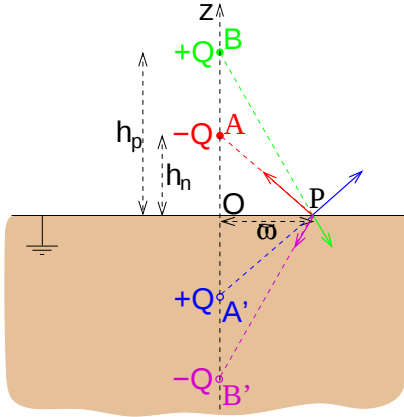
Υπόδειξη: Η δύναμη που ασκεί το ηλεκτρικό πεδίο στην πλάκα μπορεί να βρεθεί με δύο τρόπους. Είτε σαν $\vec{F} = \hat{z} \iint \vec{E}_{\text{άλλ}\alpha} \cdot \hat{z} \sigma \, dx \, dy$, όπου $\vec{E}_{\text{άλλ}\alpha} \sigma \, dx \, dy$ είναι η δύναμη που ασκείται στο στοιχειώδες φορτίο της πλάκας $\sigma \, dx \, dy$ από όλα τα άλλα φορτία (το $\vec{E}_{\text{άλλ}\alpha}$ πρέπει να δείξετε ότι είναι ίσο με το μέσο όρο των $\vec{E}|_{z=\beta-}$ και $\vec{E}|_{z=\beta+}$), είτε σαν $\vec{F} = -\frac{dW}{d\beta} \hat{z}$, όπου W

η ηλεκτροστατική ενέργεια της κατανομής (η οποία είναι συνάρτηση του β και μπορεί να υπολογιστεί σαν $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint E^2 \, d\tau$ ή πολύ ευκολότερα σαν $W = \frac{1}{2} \iiint V \rho \, d\tau = \frac{1}{2} \left[\iint V \sigma \, dx \, dy \right]_{z=\beta}$).

(γ) Έστω η πλάκα τοποθετείται πάρα πολύ κοντά στην πλευρά $z = 0$. Από την απαίτηση η ηλεκτροστατική ενέργεια της κατανομής να είναι ελάχιστη βρείτε ποιο είναι το πεδίο στο σωλήνα. Ποιο το φορτίο που επάγεται στην πλευρά $z = 0$; Ποια η δύναμη που ασκείται στην πλάκα;

ΛΥΣΕΙΣ:

[1]: Το πεδίο στο χώρο $z > 0$ μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο των ειδώλων. Τα φορτία $\pm Q$ μαζί με τα επαγόμενα στην επιφάνεια της γης φορτία δημιουργούν πεδίο στο χώρο $z > 0$ του οποίου το δυναμικό στο όριο του χώρου (στην επιφάνεια $z = 0$ καθώς και σε άπειρη απόσταση από το O) είναι μηδέν. Τις ίδιες οριακές συνθήκες ικανοποιεί και το πεδίο από τα φορτία $\pm Q$ μαζί με τα είδωλά τους $\mp Q$ στις συμμετρικές θέσεις ως προς την επιφάνεια της γης (δες σχήμα), οπότε το πεδίο των δυο κατανομών είναι ίδιο.



Σε σημείο P στην επιφάνεια της γης (ελάχιστα πάνω από το έδαφος) με κυλινδρικές συντεταγμένες $(\varpi, z = 0^+)$ το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E}|_{z=0^+} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\vec{AP}}{|\vec{AP}|^3} + \frac{\vec{A'P}}{|\vec{A'P}|^3} + \frac{\vec{BP}}{|\vec{BP}|^3} - \frac{\vec{B'P}}{|\vec{B'P}|^3} \right]$.

Με $\vec{AP} = \varpi\hat{\varpi} - h_n\hat{z}$, $\vec{A'P} = \varpi\hat{\varpi} + h_n\hat{z}$, $\vec{BP} = \varpi\hat{\varpi} - h_p\hat{z}$, $\vec{B'P} = \varpi\hat{\varpi} + h_p\hat{z}$, προκύπτει

$$\vec{E}|_{z=0^+} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{h_n}{(\varpi^2 + h_n^2)^{3/2}} - \frac{h_p}{(\varpi^2 + h_p^2)^{3/2}} \right] \hat{z}.$$

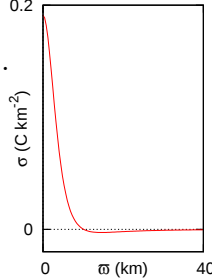
Κάτω από την επιφάνεια της γης είναι $\vec{E}|_{z<0} = 0$. Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ στην επιφάνεια της γης θα βρεθεί από την οριακή συνθήκη $\sigma = \epsilon_0 (E_z|_{z=0^+} - E_z|_{z=0^-}) =$

$$\frac{Q}{2\pi} \left[\frac{h_n}{(\varpi^2 + h_n^2)^{3/2}} - \frac{h_p}{(\varpi^2 + h_p^2)^{3/2}} \right].$$

$$\sigma > 0 \iff \frac{h_n^{2/3}}{\varpi^2 + h_n^2} > \frac{h_p^{2/3}}{\varpi^2 + h_p^2}$$

$$h_p > h_n \iff \varpi < h_p^{1/3} h_n^{1/3} \sqrt{h_p^{2/3} + h_n^{2/3}}$$

ή $\varpi < 10.13 \text{ km}$.



Το συνολικό φορτίο στην επιφάνεια της γης είναι μηδέν, όπως προκύπτει με εφαρμογή του νόμου Gauss $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{εγκ}}}{\epsilon_0}$ στην κλειστή επιφάνεια που αποτελείται από ημισφαιρική επιφάνεια άπειρης ακτίνας στο χώρο $z > 0$ και μια βάση στο χώρο $z < 0$ που περιλαμβάνει όλα τα επαγόμενα φορτία. Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια

αυτή είναι μηδέν, οπότε και $Q_{\text{εγκ}} = 0 \iff (+Q) + (-Q) + Q_{\text{επαγόμενο}} = 0 \iff Q_{\text{επαγόμενο}} = 0$. (Το επαγόμενο φορτίο προέκυψε ίσο με το άθροισμα του φορτίου των ειδώλων.) Το $Q_{\text{επαγόμενο}}$ μπορεί να βρεθεί και από την ολοκλήρωση του σ πάνω σε όλη την επιφάνεια: $Q_{\text{επαγόμενο}} = \int_0^\infty \sigma(\varpi) 2\pi\varpi d\varpi =$

$$\int_0^\infty \frac{Q h_n \varpi d\varpi}{(\varpi^2 + h_n^2)^{3/2}} - \int_0^\infty \frac{Q h_p \varpi d\varpi}{(\varpi^2 + h_p^2)^{3/2}} =$$

$$Q \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 + 1)^{3/2}} - Q \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 + 1)^{3/2}} = 0.$$

Αλλιώς: Έστω ένα μικρό τμήμα της επιφάνειας της γης da σε απόσταση ϖ από τον κατακόρυφο άξονα που βρίσκονται τα φορτία $\pm Q$, στο οποίο έχουν επαχθεί φορτία με επιφανειακή πυκνότητα σ . Το ηλεκτρικό πεδίο κοντά στην επιφάνεια αυτή είναι

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } z > 0 \\ 0, & \text{αν } z < 0 \end{cases} \quad (\text{αφού το πεδίο στο εσωτερικό αγωγού είναι μηδέν ενώ λίγο έξω από την επιφάνειά του είναι } \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}).$$

Το πεδίο αυτό μπορεί να θεωρηθεί επαλληλία τριών πεδίων: του $\vec{E}_\pm$ από τα φορτία $\pm Q$ (που βρίσκονται στα σημεία A και B), του $\vec{E}_{da}$ από το τμήμα da και του $\vec{E}_{\text{άλλα}}$ από τα υπόλοιπα φορτία του επιπέδου $z = 0$. Το πεδίο $\vec{E}_{da}$, σε σημεία λίγο πάνω και λίγο κάτω από το τμήμα da (για $|z|$ πολύ μικρότερα των διαστάσεών του) είναι πεδίο φύλου απείρων διαστάσεων φορτισμένου με σταθερή

$$\sigma, \text{ δηλ. } \vec{E}_{da} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{στη θέση } z = 0^+ \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{στη θέση } z = 0^- \end{cases}$$

Το πεδίο $\vec{E}_{\text{άλλα}}$ έχει συνιστώσα μόνο πάνω στο επίπεδο της γης (η $\hat{z}$ συνιστώσα του είναι μηδέν).

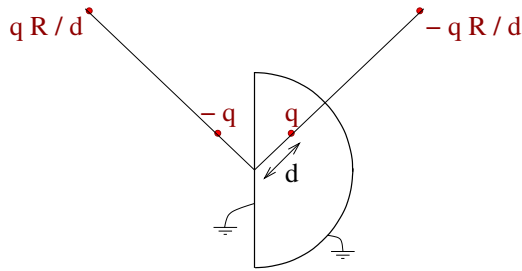
$$\text{Η } \hat{z} \text{ συνιστώσα της } \vec{E} = \vec{E}_\pm + \vec{E}_{da} + \vec{E}_{\text{άλλα}} \text{ σε σημείο } (\varpi, z = 0^-) \text{ δίνει } 0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h_n}{(\varpi^2 + h_n^2)^{3/2}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h_p}{(\varpi^2 + h_p^2)^{3/2}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + 0 \iff$$

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{h_n}{(\varpi^2 + h_n^2)^{3/2}} - \frac{h_p}{(\varpi^2 + h_p^2)^{3/2}} \right].$$

(Το ίδιο προκύπτει και από την $\hat{z}$ συνιστώσα της $\vec{E} = \vec{E}_\pm + \vec{E}_{da} + \vec{E}_{\text{άλλα}}$ σε σημείο $(\varpi, z = 0^+)$, ενώ η συνιστώσα παράλληλα στην επιφάνεια της γης μας δίνει το πεδίο $\vec{E}_{\text{άλλα}}$.)

Αφού βρέθηκε το σ , το $\vec{E}|_{z=0^+} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$ και για τα υπόλοιπα ερωτήματα συνεχίζουμε όπως πριν.

[2]: Αν το φορτίο είναι σε απόσταση d από το κέντρο του ημισφαιρίου και υπό γωνία θ_0 ως προς τον άξονα συμμετρίας του, δηλ. στο σημείο $(r = d, \theta = \theta_0, \phi = 0)$ σε σφαιρικές, τότε έχουμε είδωλα $-qR/d$ στο σημείο $(r = R^2/d, \theta = \theta_0, \phi = 0)$, $-q$ στο σημείο $(r = d, \theta = \pi - \theta_0, \phi_0 = 0)$, qR/d στο σημείο $(r = R^2/d, \theta = \pi - \theta_0, \phi_0 = 0)$.



Η έκφραση του δυναμικού είναι $\frac{4\pi\epsilon_0}{q}V =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd(\sin\theta_0 \sin\theta \cos\phi + \cos\theta_0 \cos\theta)}} \\ & - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 d^2}{R^2} + R^2 - 2rd(\sin\theta_0 \sin\theta \cos\phi + \cos\theta_0 \cos\theta)}} \\ & - \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd(\sin\theta_0 \sin\theta \cos\phi - \cos\theta_0 \cos\theta)}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 d^2}{R^2} + R^2 - 2rd(\sin\theta_0 \sin\theta \cos\phi - \cos\theta_0 \cos\theta)}}. \end{aligned}$$

Σε καρτεσιανές, με το φορτίο στο σημείο $(x_0, 0, z_0)$ είναι $\frac{4\pi\epsilon_0}{q}V = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + (z-z_0)^2}}$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2 + y^2 + z^2)(x_0^2 + z_0^2)}{R^2} + R^2 - 2x_0x - 2z_0z}} \\ & - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + (z+z_0)^2}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2 + y^2 + z^2)(x_0^2 + z_0^2)}{R^2} + R^2 - 2x_0x + 2z_0z}}. \end{aligned}$$

Το συνολικό φορτίο που επάγεται στο κέλυφος είναι $-q$, όπως προκύπτει από νόμο Gauss σε κλειστή επιφάνεια που περικλείει το κέλυφος (το πεδίο είναι μηδέν έξω από το κέλυφος άρα και το συνολικό έγκλειστο φορτίο είναι μηδέν).

[3]: (α) Το πεδίο έξω από τη σφαίρα είναι ίδιο με το πεδίο από το q και φορτία-είδωλα $q' = -(R/d)q$ σε απόσταση R^2/d από το κέντρο και $q'' = Q - q' = Q + (R/d)q$ στο κέντρο (έτσι η επιφάνεια της σφαίρας είναι ισοδυναμική και το συνολικό φορτίο μέσα στη σφαίρα είναι Q).

Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο q είναι το άθροισμα των δυνάμεων από τα δύο φορτία-

είδωλα $\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q - q'}{d^2} + \frac{q'}{(d - R^2/d)^2} \right) \hat{z} =$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Qd + qR}{d^3} - \frac{qRd}{(d^2 - R^2)^2} \right) \hat{z}$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(\frac{Q}{q} + \frac{R^5/d^5 - 2R^3/d^3}{(1 - R^2/d^2)^2} \right) \hat{z}$$

(β) $\vec{F} \cdot \hat{z} < 0 \Leftrightarrow \frac{Q}{q} < \frac{2R^3/d^3 - R^5/d^5}{(1 - R^2/d^2)^2}$.

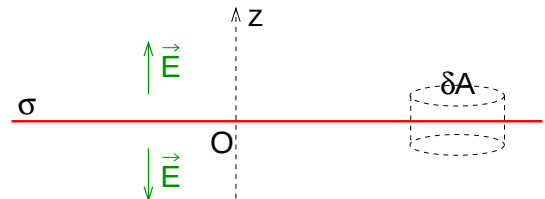
Το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι μια συνάρτηση του R/d , η οποία είναι αύξουσα και μεταβάλλεται από 0 όταν $R/d = 0$ σε $+\infty$ όταν $R/d \rightarrow 1$. Επομένως για οποιαδήποτε R και d υπάρχει οριακή (θετική) τιμή του Q/q κάτω από την οποία ισχύει η ανισότητα.

[4]: (α) Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος το δυναμικό είναι συνάρτηση του z και μάλιστα άρτια. Η εξίσωση Laplace στο χώρο $z > 0$ δίνει $\frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \Leftrightarrow V = C_0 z + C$, όπου C_0 και C σταθερές ολοκλήρωσης. Για $z < 0$ είναι $V = -C_0 z + C$ (ώστε η συνάρτηση $V(z)$ να είναι άρτια). Άρα $V = C_0 |z| + C$ και $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \begin{cases} -C_0 \hat{z}, & \text{αν } z > 0 \\ C_0 \hat{z}, & \text{αν } z < 0 \end{cases}$

Οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $z = 0$ είναι $\begin{cases} V|_{z=0+} = V|_{z=0-} \text{ (ισχύει αφού η } V \text{ άρτια)} \\ E_z|_{z=0+} - E_z|_{z=0-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Leftrightarrow C_0 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{cases}$

Θεωρώντας την αυθαίρετη σταθερά $C = 0$ έχουμε τελικά $V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|$ και $\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } z < 0 \end{cases}$

Αλλιώς: Λόγω συμμετρίας το πεδίο είναι ομογενές στους χώρους $z > 0$ και $z < 0$, με αντίθετη φορά, δηλ. $\vec{E} = \begin{cases} E_+ \hat{z}, & \text{αν } z > 0, \\ E_- \hat{z} = -E_+ \hat{z}, & \text{αν } z < 0 \end{cases}$



Από νόμο Gauss στην επιφάνεια του σχήματος:

$$\underbrace{\iint_{\text{πάνω βάση}} \vec{E} \cdot d\vec{a}}_{(E_+ \hat{z}) \cdot (\delta A \hat{z})} + \underbrace{\iint_{\text{κάτω βάση}} \vec{E} \cdot d\vec{a}}_{(E_- \hat{z}) \cdot (-\delta A \hat{z})} + \underbrace{\iint_{\text{παράπλευρη}} \vec{E} \cdot d\vec{a}}_0 = \frac{Q_{\text{εγκ}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \delta A}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \text{ δηλ. } \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } z < 0 \end{cases}$$

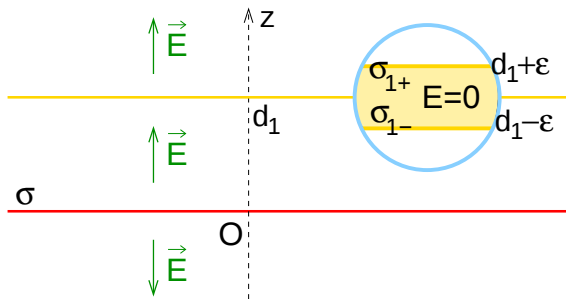
Το δυναμικό στο χώρο $z > 0$ βρίσκεται από $\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Leftrightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{dV}{dz} \Leftrightarrow V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + C$, όπου C αυθαίρετη σταθερά. Όμοια $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + C'$

για $z < 0$, με $C' = C$ ώστε $V|_{z=0+} = V|_{z=0-}$.

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί από $V(z) - V(z_0) = - \int_{z_0}^z \vec{E} \cdot d\vec{r}$, θεωρώντας το δυναμικό μηδέν

στο επίπεδο $z = z_0$, δηλ. $V(z) = - \int_{z_0}^z E dz = \dots = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(|z| - |z_0|)$.

(β) Το φορτίο μέσα στην αγωγίμη πλάκα θα διαχωριστεί σε σ_{1-} στην κάτω της επιφάνεια $z = d_1 - \epsilon$ και σ_{1+} στην πάνω της επιφάνεια $z = d_1 + \epsilon$ ώστε το πεδίο στο εσωτερικό της να είναι μηδέν, δες σχήμα όπου φαίνεται και η μεγέθυνση τμήματος της αγωγίμης πλάκας (μέσα στον μπλε κύκλο).



Αφού η αγωγίμη πλάκα έχει συνολικό φορτίο μηδέν, θα είναι $\sigma_{1+} = -\sigma_{1-}$. Χρησιμοποιώντας την αρχή επαλληλίας μπορούμε να γράψουμε το ολικό πεδίο σαν άθροισμα των πεδίων από τις επιφανειακές πυκνότητες σ , σ_{1-} και σ_{1+} . Στο εσωτερικό της αγωγίμης πλάκας το πεδίο αυτό είναι $0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} + \frac{\sigma_{1-}}{2\epsilon_0}\hat{z} - \frac{\sigma_{1+}}{2\epsilon_0}\hat{z} \xLeftrightarrow{\sigma_{1-}=-\sigma_{1+}} \sigma_{1+} = -\sigma_{1-} = \frac{\sigma}{2}$. Η αγωγίμη πλάκα δεν δημιουργεί πεδίο στο εξωτερικό της και άρα το μόνο που αλλάζει σε σχέση με το ερώτημα (α) είναι ότι στο εσωτερικό της το πεδίο είναι μηδέν (και το δυναμικό σταθερό).

Αλλιώς: Η λύση της Laplace είναι

$$V = \begin{cases} -E_1 z + C_1, & \text{αν } z \geq d_1 \\ -E_2 z + C_2, & \text{αν } 0 \leq z \leq d_1 \\ -E_3 z + C_3, & \text{αν } z \leq 0 \end{cases} \quad \text{και το πεδίο}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_1 \hat{z}, & \text{αν } z > d_1 \\ E_2 \hat{z}, & \text{αν } 0 < z < d_1 \\ E_3 \hat{z}, & \text{αν } z < 0 \end{cases}$$

Σε μεγάλες αποστάσεις από τις πλάκες, για $z \rightarrow +\infty$ και $z \rightarrow -\infty$, «βλέπουμε» μόνο τη συνολική επιφανειακή πυκνότητα της κατανομής σ , οπότε $E_1 = -E_3 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Με τη χρήση και των οριακών

$$\text{συνθηκών} \left\{ \begin{array}{l} V|_{z=0+} = V|_{z=0-} \\ E_z|_{z=0+} - E_z|_{z=0-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ V|_{z=d_1+} = V|_{z=d_1-} \\ E_z|_{z=d_1+} - E_z|_{z=d_1-} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{βρίσκουμε}$$

$$E_1 = E_2 = -E_3 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad C_1 = C_2 = C_3.$$

Στην επιφάνεια $z = d_1 - \epsilon$, $\sigma_{1-} =$

$$\epsilon_0 (E_z|_{z=(d_1-\epsilon)+} - E_z|_{z=(d_1-\epsilon)-}) = \epsilon_0(0 - E_2) = -\frac{\sigma}{2}$$

και στην επιφάνεια $z = d_1 + \epsilon$, $\sigma_{1+} = -\sigma_{1-} = \frac{\sigma}{2}$.

(γ) Όμοια με πριν, στην πάνω επιφάνεια $z = -d_2 + \epsilon$ της δεύτερης αγωγίμης πλάκας θα επαχθεί επιφανειακό φορτίο $\sigma_{2-} = -\frac{\sigma}{2}$ και στην κάτω επιφάνειά της $z = -d_2 - \epsilon$ θα επαχθεί επιφανειακό φορτίο $\sigma_{2+} = \frac{\sigma}{2}$. (Σημειώστε ότι η ύπαρξη της πρώτης αγωγίμης πλάκας δεν επηρεάζει τη διαδικασία αφού δεν δημιουργεί πεδίο στη θέση $z = -d_2$.) Η μόνη διαφορά με το πεδίο του ερωτήματος (β) είναι ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της δεύτερης πλάκας είναι μηδέν (και το δυναμικό σταθερό).

(δ) Η λύση της Laplace είναι

$$V = \begin{cases} -E_1 z + C_1, & \text{αν } z \geq d_1 \\ -E_2 z + C_2, & \text{αν } 0 \leq z \leq d_1 \\ -E_3 z + C_3, & \text{αν } -d_2 \leq z \leq 0 \\ -E_4 z + C_4, & \text{αν } z \leq -d_2 \end{cases} \quad \text{και το πεδίο}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_1 \hat{z}, & \text{αν } z > d_1 \\ E_2 \hat{z}, & \text{αν } 0 < z < d_1 \\ E_3 \hat{z}, & \text{αν } -d_2 < z < 0 \\ E_4 \hat{z}, & \text{αν } z < -d_2 \end{cases}$$

Οι βραχυκυκλωμένες πλάκες έχουν κοινό δυναμικό $V|_{z=d_1} = V|_{z=-d_2}$ ①

Σε μεγάλες αποστάσεις από τις πλάκες, για $z \rightarrow +\infty$ και $z \rightarrow -\infty$, «βλέπουμε» μόνο τη συνολική επιφανειακή πυκνότητα της κατανομής σ , οπότε

$$E_1 = -E_4 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{②}$$

Οι οριακές συνθήκες στις επιφάνειες $z = d_1$, $z = 0$

$$\text{και } z = -d_2: \left\{ \begin{array}{l} V|_{z=d_1+} = V|_{z=d_1-} \quad \text{③} \\ E_z|_{z=d_1+} - E_z|_{z=d_1-} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \quad \text{④} \\ V|_{z=0+} = V|_{z=0-} \quad \text{⑤} \\ E_z|_{z=0+} - E_z|_{z=0-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{⑥} \\ V|_{z=-d_2+} = V|_{z=-d_2-} \quad \text{⑦} \\ E_z|_{z=-d_2+} - E_z|_{z=-d_2-} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \quad \text{⑧} \end{array} \right.$$

Οι ①,⑤,⑥ δίνουν $C_2 = C_3$, $E_2 = \frac{d_2}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$,

$E_3 = -\frac{d_1}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Οι υπόλοιπες συνθήκες δίν

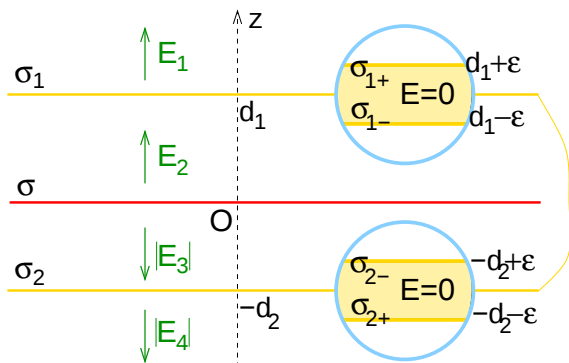
ουν $C_1 = C_2 + \frac{d_1(d_1 - d_2)}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, $C_4 = C_3 - \frac{d_2(d_1 - d_2)}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, οπότε έχουμε

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } z > d_1 \\ \frac{d_2}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } 0 < z < d_1 \\ -\frac{d_1}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } -d_2 < z < 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } z < -d_2 \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + \frac{d_1(d_1 - d_2)}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + C, & \text{αν } z \geq d_1 \\ -\frac{d_2}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}z + C, & \text{αν } 0 \leq z \leq d_1 \\ \frac{d_1}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}z + C, & \text{αν } -d_2 \leq z \leq 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z - \frac{d_2(d_1 - d_2)}{d_1 + d_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + C, & \text{αν } z \leq -d_2 \end{cases}$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά.

Οι ④ και ⑧ δίνουν τη συνολική (και από τις δυο πλευρές) επιφανειακή πυκνότητα των αγωγίμων πλακών $\sigma_1 = \frac{\sigma d_1 - d_2}{2 d_1 + d_2}$, $\sigma_2 = -\sigma_1$. Οι επιφανειακές αυτές πυκνότητες κατανέμονται στις δύο επιφάνειες κάθε πλάκας με τρόπο ώστε $E = 0$ στο εσωτερικό των πλακών. Με εφαρμογή του νόμου Gauss (δες σχήμα) προκύπτει $\sigma_{1+} = \varepsilon_0(E_1 - 0) = \sigma/2$, $\sigma_{1-} = \varepsilon_0(0 - E_2) = -\frac{d_2}{d_1 + d_2} \sigma$ (ισχύει $\sigma_{1+} + \sigma_{1-} = \sigma_1$), $\sigma_{2+} = \varepsilon_0(0 - E_4) = \sigma/2$, $\sigma_{2-} = \varepsilon_0(E_3 - 0) = -\frac{d_1}{d_1 + d_2} \sigma$ (ισχύει $\sigma_{2+} + \sigma_{2-} = \sigma_2$). Όπως αναμενόταν, το συνολικό φορτίο που επάγεται στις πλευρές του βραχυκυκλωμένου ζευγαριού των αγωγίμων πλακών που κοιτούν προς τη φορτισμένη πλάκα στο $z = 0$ (δηλ. οι επιφάνειες $z = d_1 - \varepsilon$ και $z = -d_2 + \varepsilon$) είναι αντίθετο του φορτίου της φορτισμένης πλάκας, δηλ. $\sigma_{1-}A + \sigma_{2-}A = \sigma A$. Επίσης, η επιφανειακή κατανομή φορτίου στην εξωτερική πλευρά του βραχυκυκλωμένου ζευγαριού των αγωγίμων πλακών είναι ίδια και στις δυο πλάκες και ίση με $\sigma/2$, ώστε το συνολικό φορτίο $(\sigma/2)(2A)$ να εξουδετερώνει το επαγόμενο στις πλευρές που κοιτούν προς το $z = 0$.



Αλλιώς: Το πεδίο σε κάθε περιοχή μπορεί να γραφεί σαν επαλληλία των πεδίων από επιφανειακά φορτία σ , σ_1 , σ_2 . Η απαίτηση το πεδίο για $z \rightarrow \pm\infty$ να είναι $\pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{z}$ (αφού η συνολική επιφανειακή πυκνότητα της κατανομής είναι σ), και η συνθήκη του βραχυκυκλώματος $V|_{z=-d_2} - V|_{z=d_1} = 0 \Leftrightarrow \int_{-d_2}^{d_1} E dz = 0$ καθορίζει τα σ_1 και σ_2 .

(ε) Η συνολική (και από τις δυο πλευρές) επιφανειακή πυκνότητα της πλάκας στο $z = 0$ είναι σ , όπως και στο ερώτημα (δ), οπότε τα πεδία θα είναι

ίδια στο εξωτερικό της. Θα υπάρξει όμως διαχωρισμός φορτίου μέσα στην πλάκα ώστε το πεδίο να μηδενιστεί στο εσωτερικό της. Από νόμο Gauss βρίσκουμε ότι στην πλευρά προς τα θετικά z θα υπάρχει $\sigma_+ = \varepsilon_0(E_2 - 0) = \frac{d_2}{d_1 + d_2} \sigma$ και στην πλευρά προς τα

αρνητικά z θα υπάρχει $\sigma_- = \varepsilon_0(0 - E_3) = -\frac{d_1}{d_1 + d_2} \sigma$. (στ) Η διαφορά σε σχέση με το ερώτημα (ε) είναι ότι δεν υπάρχει φορτίο στις εξωτερικές πλευρές του βραχυκυκλωμένου ζευγαριού πλακών (δηλ. στις πλευρές $z = d_1 + \varepsilon$, $z = -d_2 - \varepsilon$) και το πεδίο για $z > d_1$ και $z < -d_2$ είναι μηδέν.

$$\text{Άρα } V = \begin{cases} C - \frac{d_2}{d_1 + d_2} \frac{Q}{\varepsilon_0 A} z, & \text{αν } 0 \leq z \leq d_1 \\ C + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \frac{Q}{\varepsilon_0 A} z, & \text{αν } -d_2 \leq z \leq 0 \\ C - \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \frac{Q}{\varepsilon_0 A}, & \text{αν } z \geq d_1 \text{ ή } z \leq -d_2 \end{cases}$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά.

(ζ) Θα επαχθεί φορτίο $-Q$ στο γειωμένο αγωγό και το πεδίο στο εξωτερικό του συστήματος (για $z > d_1$ και $z < -d_2$) θα είναι μηδέν. Αυτή είναι ακριβώς η κατάσταση του ερωτήματος (στ), επομένως δεν αλλάζει τίποτα, παρά το ότι η σταθερά C δεν είναι πια αυθαίρετη, αλλά καθορίζεται από τη συνθήκη $V = 0$ στη γείωση.

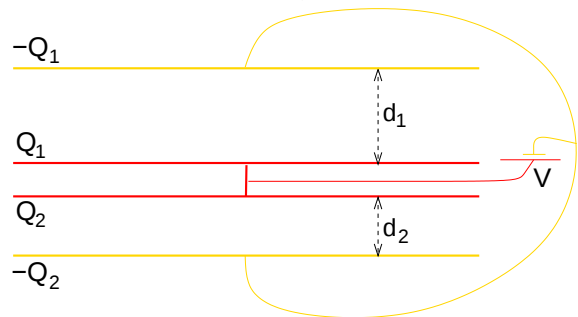
$$\text{Άρα } V = \begin{cases} \frac{d_2}{d_1 + d_2} \frac{Q}{\varepsilon_0 A} (d_1 - z), & \text{αν } 0 \leq z \leq d_1 \\ \frac{d_1}{d_1 + d_2} \frac{Q}{\varepsilon_0 A} (z + d_2), & \text{αν } -d_2 \leq z \leq 0 \\ 0, & \text{αν } z \geq d_1 \text{ ή } z \leq -d_2 \end{cases}$$

(η) Από το δυναμικό του ερωτήματος (στ) προκύπτει ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών είναι $V_+ - V_- = V|_{z=0} - V|_{z=d_1} = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$, οπότε η

$$\text{χωρητικότητα } C = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)$$

Η χωρητικότητα είναι το άθροισμα χωρητικοτήτων δυο επίπεδων πυκνωτών με εμβαδό οπλισμών A και αποστάσεις μεταξύ των πλακών d_1 και d_2 , δηλ.

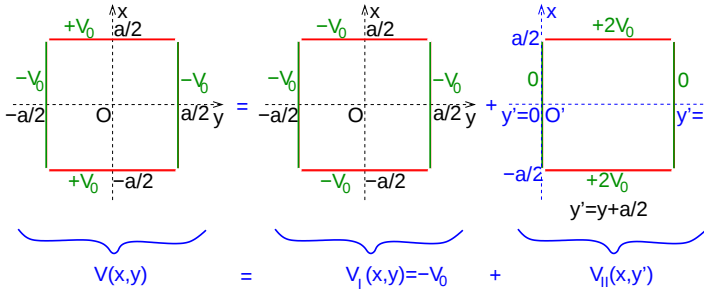
$$C = C_1 + C_2 \text{ με } C_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 A}{d_{1,2}}.$$



Πράγματι, ο πυκνωτής του προβλήματος μπορεί να θεωρηθεί σαν η παράλληλη συνδεσμολογία του σχήματος, με τον οπλισμό στο $z = 0$ να χωρίζεται σε δυο

οπλισμούς που αντιστοιχούν στις δυο του επιφάνειες. Η διαφορά δυναμικού σε κάθε ένα από τους επιμέρους πυκνωτές είναι ίδια, ενώ το φορτίο Q χωρίζεται σε $Q_1 = \sigma_+ A = \frac{d_2}{d_1 + d_2} Q$ και $Q_2 = \sigma_- A = \frac{d_1}{d_1 + d_2} Q$ (τα $\sigma_{\pm}$ έχουν βρεθεί στο ερώτημα (ε)). Ισχύει $C_{1,2} = Q_{1,2}/V$, ενώ από $Q = Q_1 + Q_2$ προκύπτει $CV = C_1V + C_2V \Leftrightarrow C = C_1 + C_2$.

[5]: (α) Όπως φαίνεται στο σχήμα, μπορούμε να απλοποιήσουμε το πρόβλημα χωρίζοντάς το σε δυο κατανομές με τις οριακές συνθήκες που φαίνονται:



Το πρώτο πρόβλημα έχει τετριμμένη λύση $V_I = -V_0$ (η οποία ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες και άρα είναι η μοναδική λύση του προβλήματος).

Για το δεύτερο, μετά από μια μεταφορά του y άξονα ώστε οι πλευρές με μηδενικό δυναμικό να βρίσκονται στις θέσεις $y' = 0$ και $y' = a$, μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση σαν $V_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y'}{a}$

(διαλέξαμε δηλαδή τα ημίτονα στη διεύθυνση y' ώστε η οριακή $V_{II}|_{y'=0} = 0$ να ικανοποιείται ταυτοτικά, διαλέξαμε το όρισμα των ημιτόνων $\frac{n\pi y'}{a}$ με $n \in \mathbb{N}^*$ ώστε η οριακή $V_{II}|_{y'=a} = 0$ να ικανοποιείται ταυτοτικά και διαλέξαμε τον άρτιο συνδυασμό των εκθετικών (το υπερβολικό συνημίτονο) αφού περιμένουμε η λύση να είναι άρτια ως προς x). Οι σταθερές C_n θα προσδιοριστούν από την απαίτηση

$$V_{II}|_{x=\pm a/2} = 2V_0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi y'}{a} = 2V_0.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\sin \frac{\ell\pi y'}{a}$ και ολοκληρώνουμε ως προς y' στο διάστημα $(0, a)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{2} \int_0^a \sin \frac{n\pi y'}{a} \sin \frac{\ell\pi y'}{a} dy' = 2V_0 \int_0^a \sin \frac{\ell\pi y'}{a} dy' \Leftrightarrow C_{\ell} = \begin{cases} \frac{8V_0}{\pi \ell \cosh \frac{\ell\pi}{2}}, & \text{αν } \ell \text{ περιττό} \\ 0, & \text{αν } \ell \text{ άρτιο} \end{cases}$$

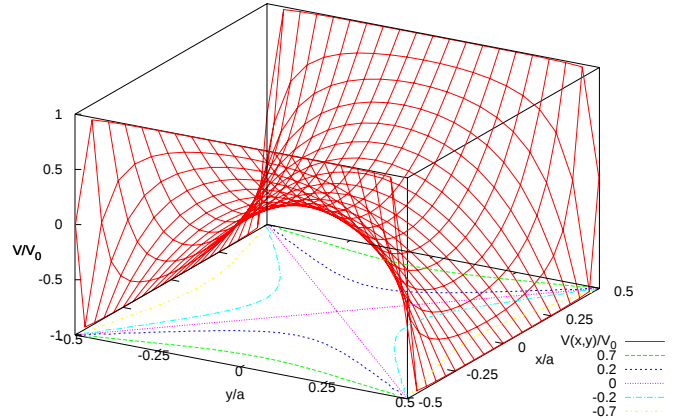
Άρα, θέτοντας $\ell = 2n + 1$ (γραφή περιττού) και

$$\sin \frac{(2n+1)\pi y'}{a} = \sin \frac{(2n+1)\pi (y + a/2)}{a} = (-1)^n \cos \frac{(2n+1)\pi y}{a}$$

γράφουμε την τελική λύση σαν

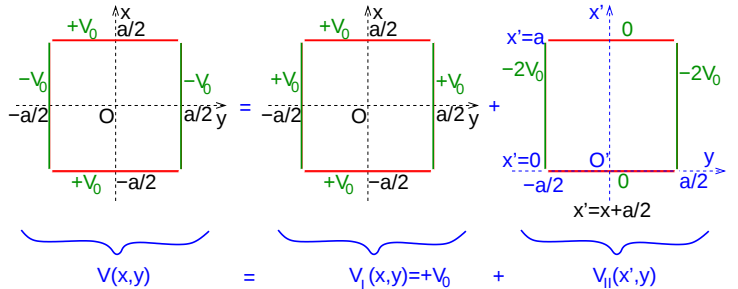
$$V = -V_0 + \frac{8V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cosh \frac{(2n+1)\pi x}{a} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{a}}{(2n+1) \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2}}.$$

Στο επόμενο γράφημα φαίνεται η λύση (τριδιάστατο γράφημα, αλλά και οι ισοϋψείς στο επίπεδο Oxy).



Η λύση δεν έχει ακρότατο στην περιοχή που ισχύει η Laplace, όπως περιμέναμε. Έχει ένα σαγματικό σημείο στο $(x = 0, y = 0)$.

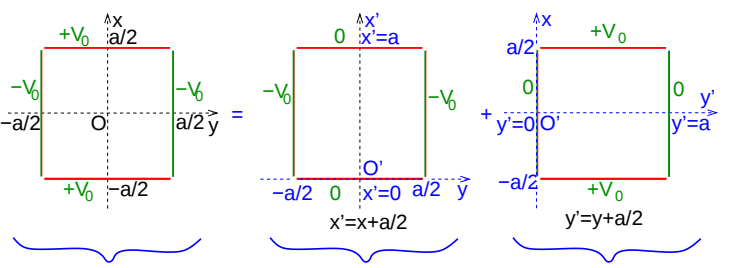
Ο τρόπος που λύθηκε το πρόβλημα δεν είναι μοναδικός. Θα μπορούσαμε να το θεωρήσουμε επαλληλία δυναμικού όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Δουλεύοντας όπως πριν (ή κάνοντας τις αντικαταστάσεις $V_0 \rightarrow -V_0$ και $x \leftrightarrow y$ στην προηγούμενη λύση) βρίσκουμε μια ισοδύναμη μορφή της λύσης (αυτό δεν είναι τετριμμένο από μαθηματικής άποψης):

$$V = V_0 - \frac{8V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cosh \frac{(2n+1)\pi y}{a} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{a}}{(2n+1) \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2}}.$$

Ένας τρίτος τρόπος θα ήταν ο παρακάτω:



Στην ουσία τα δυο νέα προβλήματα έχουν ήδη

λυθεί προηγουμένως (αρκεί να αντικαταστήσουμε $2V_0 \rightarrow V_0$ στις λύσεις $V_{II}(x, y')$ και $V_{II}(x', y)$ που βρήκαμε πριν). Η λύση που προκύπτει είναι το ημί-άθροισμα των προηγούμενων δυο λύσεων που βρήκαμε

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cosh \frac{(2n+1)\pi x}{a} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{a} - \cosh \frac{(2n+1)\pi y}{a} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{a} \right] \frac{(-1)^n / (2n+1)}{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{2}}.$$

(β) Η λύση $V(x, y)$ είναι άρτια και ως προς x και ως προς y . Αυτό μπορούμε να το συμπεράνουμε και πριν βρούμε την μορφή της λύσης, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι οριακές συνθήκες έχουν άρτια μορφή. Επομένως, οι $\hat{x}$ και $\hat{y}$ συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, θα είναι περιττές συναρτήσεις, σαν παράγωγοι άρτιων. Συμπέρασμα αυτού είναι ότι $E_x|_{x=0} = 0$ (δηλ. σε όλο το επίπεδο $x = 0$ είναι $E_x = 0$) και $E_y|_{y=0} = 0$. Στην ευθεία $(x = 0, y = 0)$ και οι δύο συνιστώσες μηδενίζονται ταυτόχρονα.

[6]: Ο χωρισμός μεταβλητών σε καρτεσιανές συντεταγμένες $V = X(x)Y(y)Z(z)$ οδηγεί σε $\vec{\nabla}^2 V = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{C_1} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{C_2} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{C_3} = 0$, όπου C_1, C_2, C_3 στα-

θερές με μηδενικό άθροισμα. Οι οριακές συνθήκες $V|_{x=0} = 0$ και $V|_{x=\pi} = 0$ οδηγούν στην επιλογή $C_1 < 0$ και σε λύση $X = \sin(\sqrt{-C_1}x)$, με $\sqrt{-C_1} = n \in \mathbb{N}^*$. Όμοια οι οριακές συνθήκες $V|_{y=0} = 0$ και $V|_{y=\pi} = 0$ οδηγούν στην επιλογή $C_2 < 0$ και σε λύση $Y = \sin(\sqrt{-C_2}y)$, με $\sqrt{-C_2} = m \in \mathbb{N}^*$. Επομένως $C_1 = -n^2$, $C_2 = -m^2$, $C_3 = -C_1 - C_2 = n^2 + m^2 > 0$ και η λύση για την $Z(z)$ είναι επαλληλία εκθετικών $e^{\pm\sqrt{C_3}z}$ ή επαλληλία υπερβολικών συναρτήσεων, $\sinh(\sqrt{C_3}z)$ και $\cosh(\sqrt{C_3}z)$, με $\sqrt{C_3} = \sqrt{n^2 + m^2}$. Λόγω των περιττών οριακών συνθηκών $V|_{z=-\pi/2} = -V|_{z=\pi/2}$ περιμένουμε η $Z(z)$ να είναι περιττή. Ο περιττός συνδυασμός των εκθετικών είναι το υπερβολικό ημίτονο, οπότε η γενική λύση είναι $V = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \sinh(\sqrt{n^2 + m^2}z) \sin(nx) \sin(my)$. Οι οριακές συνθήκες $V|_{z=\pm\pi/2} = \pm V_0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \sinh\left(\sqrt{n^2 + m^2} \frac{\pi}{2}\right) \sin(nx) \sin(my) = V_0$ θα καθορίσουν τις σταθερές $C_{n,m}$. Πολλαπλασιάζουμε με $\sin(\ell x) \sin(ky)$ και ολοκληρώνουμε και ως προς x και ως προς y στο διάστημα $(0, \pi)$:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \sinh\left(\sqrt{n^2 + m^2} \frac{\pi}{2}\right)}_{\frac{\pi}{2} \delta_{mk}} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin(nx) \sin(\ell x) dx}_{\frac{1 - (-1)^{\ell}}{\ell}} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin(my) \sin(ky) dy}_{\frac{1 - (-1)^k}{k}} = V_0 \int_0^{\pi} \sin(\ell x) dx \int_0^{\pi} \sin(ky) dy$$

$$\Leftrightarrow C_{\ell,k} = \begin{cases} \frac{16V_0/\pi^2}{\ell k \sinh\left(\sqrt{\ell^2 + k^2} \frac{\pi}{2}\right)}, & \text{αν } \ell \text{ και } k \text{ περιττά} \\ 0, & \text{αν } \ell \text{ ή } k \text{ άρτιο} \end{cases}$$

Άρα, $V = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{\ell=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{\sinh(\sqrt{\ell^2 + k^2} z)}{\ell k \sinh\left(\sqrt{\ell^2 + k^2} \frac{\pi}{2}\right)} \sin(\ell x) \sin(ky) \right].$

[7]: Όμοια με την προηγούμενη άσκηση [6], στις κατευθύνσεις x και y διαλέγουμε ημίτονα $\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a}$ με $n, m \in \mathbb{N}^*$ ώστε να ικανοποιούνται οι οριακές $V|_{x=0} = 0$, $V|_{x=a} = 0$, $V|_{y=0} = 0$ και $V|_{y=a} = 0$. Μάλιστα είναι λογικό να υποθέσουμε ότι λόγω της οριακής στην πλευρά $z = a$ μας ενδιαφέρει μόνο η λύση με $n = 3$ και $m = 4$. Έτσι ο χωρισμός μεταβλητών σε καρτεσιανές συντεταγμένες $V = X(x)Y(y)Z(z)$ οδηγεί σε $\vec{\nabla}^2 V = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-(3\pi/a)^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-(4\pi/a)^2} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{(5\pi/a)^2} = 0$.

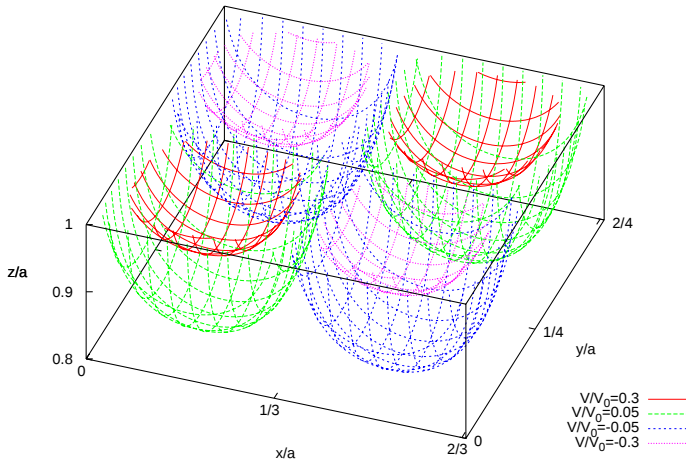
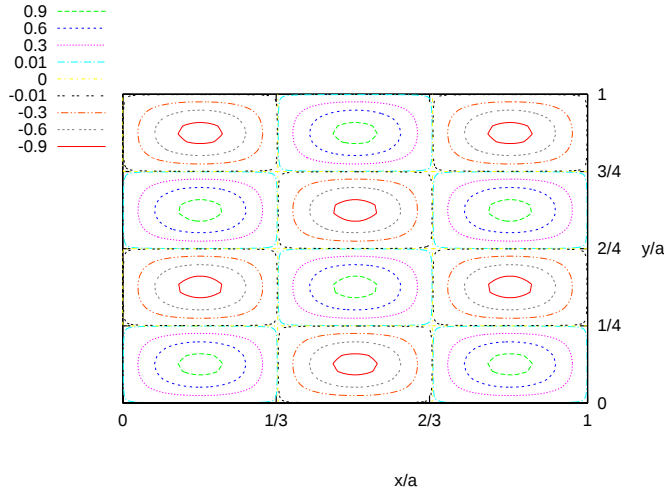
Η κατάλληλη λύση για την $Z(z)$ είναι η $\sinh \frac{5\pi z}{a}$ ώστε να ικανοποιείται η οριακή $V|_{z=0} = 0$. Άρα η λύση είναι $V = C \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{a} \sinh \frac{5\pi z}{a}$. Για να ικανοποιείται η οριακή $V|_{z=a} = V_0 \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{a}$ πρέπει $C = V_0 / \sinh(5\pi)$. Άρα η λύση στο χώρο εντός του κιβωτίου είναι

$$V = V_0 \frac{\sinh \frac{5\pi z}{a}}{\sinh(5\pi)} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{a}.$$

Πράγματι αυτή η λύση ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και όλες τις οριακές συνθήκες, οπότε είναι η μοναδική λύση του προβλήματος (σωστά υποθέσαμε ότι μένει ο όρος με $n = 3$ και $m = 4$).

Το πρώτο γράφημα από τα παρακάτω δείχνει τις τομές των ισοδυναμικών στο επίπεδο $z = a$. Κάθε ισοδυναμική επιφάνεια συνεχίζεται σε μικρότερα z σαν ένα «πηγάδι». Το δεύτερο γράφημα δείχνει κάποιες ισοδυναμικές επιφάνειες. Όσο το δυναμικό ελαττώνεται

κατά απόλυτη τιμή τόσο το «πηγάδι» αυξάνει τη διατομή του και βαθθαίνει.¹



Οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίου θα υπολογιστούν από την ασυνέχεια του ηλεκτρικού πεδίου, Στην εσωτερική επιφάνεια² της πλευράς $x = 0$ είναι

$$\sigma|_{x=0} = E_x|_{x=0^+} - E_x|_{x=0^-} = -\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=0^+} - 0 = -\frac{3\pi V_0}{a} \frac{\sinh \frac{5\pi z}{a}}{\sinh(5\pi)} \sin \frac{4\pi y}{a}.$$

Όμοια στις υπόλοιπες εσωτερικές επιφάνειες $\sigma|_{x=a} = E_x|_{x=a^+} - E_x|_{x=a^-} = 0 + \frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=a^-} =$

$$-\frac{3\pi V_0}{a} \frac{\sinh \frac{5\pi z}{a}}{\sinh(5\pi)} \sin \frac{4\pi y}{a},$$

$$\sigma|_{y=0} = E_y|_{y=0^+} - E_y|_{y=0^-} = -\frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{y=0^+} - 0 =$$

$$-\frac{4\pi V_0}{a} \frac{\sinh \frac{5\pi z}{a}}{\sinh(5\pi)} \sin \frac{3\pi x}{a},$$

$$\sigma|_{y=a} = E_y|_{y=a^+} - E_y|_{y=a^-} = 0 + \frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{y=a^-} =$$

$$\frac{4\pi V_0}{a} \frac{\sinh \frac{5\pi z}{a}}{\sinh(5\pi)} \sin \frac{3\pi x}{a} \text{ και } \sigma|_{z=0} = E_z|_{z=0^+} - E_z|_{z=0^-} = -\frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} - 0 =$$

$$-\frac{5\pi V_0}{a} \frac{1}{\sinh(5\pi)} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{a}. \quad \text{Τα συνολικά}$$

φορτία σε κάθε εσωτερική μεταλλική επιφάνεια είναι

$$Q|_{x=0} = \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a \sigma|_{x=0} dy dz = 0,$$

$$Q|_{x=a} = \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a \sigma|_{x=a} dy dz = 0,$$

$$Q|_{y=0} = \int_{x=0}^a \int_{z=0}^a \sigma|_{y=0} dx dz = -\frac{8\epsilon_0 a V_0 \cosh(5\pi) - 1}{15\pi \sinh(5\pi)},$$

$$Q|_{y=a} = \int_{x=0}^a \int_{z=0}^a \sigma|_{y=a} dx dz = \frac{8\epsilon_0 a V_0 \cosh(5\pi) - 1}{15\pi \sinh(5\pi)},$$

$$Q|_{z=0} = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a \sigma|_{z=0} dx dy = 0.$$

Το συνολικό φορτίο στις εσωτερικές επιφάνειες των μεταλλικών πλευρών είναι μηδέν. Αυτό συμφωνεί με το αποτέλεσμα από το νόμο Gauss σε κλειστή επιφάνεια που περνά από το εσωτερικό των μεταλλικών πλευρών και κλείνει μέσα στο κιβώτιο στην θέση $z = a^-$. Σε όλες της επιφάνειες αυτής της κλειστής επιφάνειας η ροή $\iint \vec{E} \cdot d\vec{a}$ είναι μηδέν: στο εσωτερικό των αγωγών διότι $\vec{E} = 0$, ενώ στην επιφάνεια $z = a^-$

διότι $\iint \vec{E} \cdot d\vec{a} = -\int_{x=0}^a \int_{y=0}^a \frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=a^-} dx dy = 0$. Άρα το έγκλειστο φορτίο είναι μηδέν.

[8]: Όπως στην άσκηση [6] η μορφή της λύσης για το δυναμικό, η οποία μηδενίζεται σε όλες τις γειωμένες έδρες, είναι $V = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \sinh(\sqrt{n^2 + m^2} z) \sin(nx) \sin(my)$

(επιλέγουμε το υπερβολικό ημίτονο για την z εξάρτηση ώστε να μηδενίζεται το δυναμικό στο $z = 0$). Η οριακή συνθήκη $V|_{z=\pi} = V_0$ δίνει τους συντελεστές (με τέχνασμα Fourier όπως στην άσκηση [6])

$$C_{\ell,k} = \begin{cases} \frac{16V_0/\pi^2}{\ell k \sinh(\sqrt{\ell^2 + k^2} \pi)}, & \text{αν } \ell \text{ και } k \text{ περιττά} \\ 0, & \text{αν } \ell \text{ ή } k \text{ άρτιο} \end{cases}$$

¹ Οι δυναμικές του $\vec{E}$ είναι κάθετες στις ισοδυναμικές και η φορά του πεδίου είναι προς μικρότερο δυναμικό (από $\vec{E} = -\nabla V$). Έτσι, μπορούμε κοιτώντας τις ισοδυναμικές να φανταστούμε τις δυναμικές γραμμές του $\vec{E}$.

² Να σημειωθεί ότι αν θέλαμε να βρούμε το σ και στις εξωτερικές επιφάνειες των μεταλλικών πλευρών θα χρειαζόμασταν το πεδίο έξω από το κιβώτιο. Αυτό είναι πολύ δύσκολο πρόβλημα, ακόμα και αν δεν υπάρχουν φορτία στο χώρο έξω από το κιβώτιο οπότε το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace με γνωστές οριακές συνθήκες στο κιβώτιο και στο άπειρο ($V \rightarrow 0$).

$$\text{Άρα, } V = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{\ell=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{\sinh(\sqrt{\ell^2 + k^2} z)}{\ell k \sinh(\sqrt{\ell^2 + k^2} \pi)} \sin(\ell x) \sin(ky) \right].$$

(β) Αν και οι έξι έδρες είχαν δυναμικό V_0 τότε όλο το εσωτερικό του κύβου, άρα και το κέντρο του, θα είχε δυναμικό V_0 . Αν θεωρήσουμε αυτή την κατανομή σαν επαλληλία έξι προβλημάτων σε κάθε ένα από τα οποία μόνο μια έδρα είναι σε δυναμικό V_0 και όλες οι άλλες γειωμένες, τότε η συνεισφορά του κάθε προβλήματος στο δυναμικό του κέντρου είναι ίδια λόγω συμμετρίας. Αφού το άθροισμα είναι V_0 κάθε επιμέρους πρόβλημα έχει $V_{\text{κέντρο}} = V_0/6$.

[9]: (α) Ο χωρισμός μεταβλητών σε καρτεσιανές συντεταγμένες $V = X(x)Y(y)Z(z)$ οδηγεί σε $\nabla^2 V = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{C_1} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{C_2} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{C_3} = 0$, όπου C_1, C_2

C_3 σταθερές με μηδενικό άθροισμα. Οι οριακές συνθήκες $V|_{x=0} = 0$ και $V|_{x=\alpha} = 0$ οδηγούν στην επιλογή $C_1 < 0$ και σε λύση $X = \sin(\sqrt{-C_1} x)$, με $\sqrt{-C_1} \alpha = n_1 \pi, n_1 \in \mathbb{N}^*$. Όμοια οι οριακές συνθήκες $V|_{y=0} = 0$ και $V|_{y=\alpha} = 0$ οδηγούν στην επιλογή $C_2 < 0$ και σε λύση $Y = \sin(\sqrt{-C_2} y)$, με $\sqrt{-C_2} \alpha = n_2 \pi, n_2 \in \mathbb{N}^*$. Επομένως $C_1 = -\left(\frac{n_1 \pi}{\alpha}\right)^2, C_2 = -\left(\frac{n_2 \pi}{\alpha}\right)^2, C_3 = -C_1 - C_2 = \frac{(n_1^2 + n_2^2) \pi^2}{\alpha^2} > 0$ και η λύση για την $Z(z)$ είναι επαλληλία εκθετικών $e^{\pm \sqrt{C_3} z}$ ή επαλληλία υπερβολικών συναρτήσεων, $\sinh(\sqrt{C_3} z)$ και $\cosh(\sqrt{C_3} z)$, με $\sqrt{C_3} = \frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \pi}{\alpha}$.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση Laplace στις περιοχές $0 < z < \beta$ και $\beta < z < \infty$ όπου δεν υπάρχουν φορτία. Στην περιοχή $0 < z < \beta$, λόγω της οριακής συνθήκης $V|_{z=0} = 0$, η συνάρτηση του z πρέπει να είναι υπερβολικό ημίτονο (ο συνδυασμός των εκθετικών που μηδενίζονται στο $z = 0$), επομένως η γενική λύση στην περιοχή αυτή είναι $V = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} C_{n_1, n_2} \sinh \frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \pi z}{\alpha} \sin \frac{n_1 \pi x}{\alpha} \sin \frac{n_2 \pi y}{\alpha}$.

Στην περιοχή $\beta < z < \infty$ επιλέγουμε σαν συνάρτηση του z το εκθετικό που μηδενίζεται στο $z \rightarrow \infty$, οπότε η γενική λύση στην περιοχή αυτή είναι $V = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} D_{n_1, n_2} e^{-\frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \pi z}{\alpha}} \sin \frac{n_1 \pi x}{\alpha} \sin \frac{n_2 \pi y}{\alpha}$.

Οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $z = \beta$ θα καθο-

ρίσουν τις σταθερές C_{n_1, n_2} και D_{n_1, n_2} . Μάλιστα μπορούμε να συμπεράνουμε από την μορφή της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου ότι οι μόνοι όροι που θα επιζήσουν είναι αυτοί με $n_1 = 3$ και $n_2 = 4$, οπότε γράφουμε τη λύση σαν

$$V = \begin{cases} C \sinh \frac{5\pi z}{\alpha} \sin \frac{3\pi x}{\alpha} \sin \frac{4\pi y}{\alpha}, & \text{αν } 0 \leq z \leq \beta \\ D e^{-\frac{5\pi z}{\alpha}} \sin \frac{3\pi x}{\alpha} \sin \frac{4\pi y}{\alpha}, & \text{αν } \beta \leq z < \infty \end{cases}$$

Οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $z = \beta$ είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} V|_{z=\beta^+} = V|_{z=\beta^-} \\ -\frac{\partial V}{\partial z}|_{z=\beta^+} + \frac{\partial V}{\partial z}|_{z=\beta^-} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \frac{3\pi x}{\alpha} \sin \frac{4\pi y}{\alpha} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z|_{z=\beta^+} - E_z|_{z=\beta^-} = \sigma/\varepsilon_0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D e^{-\frac{5\pi \beta}{\alpha}} = C \sinh \frac{5\pi \beta}{\alpha} \\ \frac{5\pi}{\alpha} \left(D e^{-\frac{5\pi \beta}{\alpha}} + C \cosh \frac{5\pi \beta}{\alpha} \right) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \end{array} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τις $\sinh \xi = \frac{1}{2}(e^\xi - e^{-\xi}), \cosh \xi = \frac{1}{2}(e^\xi + e^{-\xi})$ βρίσκουμε $C = \frac{\alpha \sigma_0}{5\pi \varepsilon_0} e^{-\frac{5\pi \beta}{\alpha}}, D =$

$\frac{\alpha \sigma_0}{5\pi \varepsilon_0} \sinh \frac{5\pi \beta}{\alpha}$, οπότε η λύση είναι $V =$

$$\begin{cases} \frac{\alpha \sigma_0}{5\pi \varepsilon_0} e^{-\frac{5\pi \beta}{\alpha}} \sinh \frac{5\pi z}{\alpha} \sin \frac{3\pi x}{\alpha} \sin \frac{4\pi y}{\alpha}, & 0 \leq z \leq \beta \\ \frac{\alpha \sigma_0}{5\pi \varepsilon_0} \sinh \frac{5\pi \beta}{\alpha} e^{-\frac{5\pi z}{\alpha}} \sin \frac{3\pi x}{\alpha} \sin \frac{4\pi y}{\alpha}, & \beta \leq z < \infty \end{cases}$$

(Η λύση αυτή ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες και άρα είναι η μοναδική λύση του προβλήματος· καλώς κρατήσαμε μόνο τον όρο με $n_1 = 3$ και $n_2 = 4$ από τη γενική λύση που προέκυψε από το χωρισμό μεταβλητών.)

(β) Η ηλεκτροστατική ενέργεια της κατανομής μπορεί να υπολογιστεί σαν $W = \frac{1}{2} \int V dq$. Υπάρχουν φορτία στις πλευρές και τη βάση του σωλήνα, τα οποία όμως δεν συνεισφέρουν στο ολοκλήρωμα αφού το δυναμικό του σωλήνα είναι μηδέν. Τα μόνο φορτία που μένουν είναι της πλάκας στο $z = \beta$, και αφού $dq = \sigma da$ είναι $W = \frac{1}{2} \left[\iint V \sigma da \right]_{z=\beta} =$

$$\frac{\alpha \sigma_0^2 e^{-\frac{5\pi \beta}{\alpha}} \sinh \frac{5\pi \beta}{\alpha}}{10\pi \varepsilon_0} \underbrace{\int_{x=0}^{\alpha} \sin^2 \frac{3\pi x}{\alpha} dx}_{\alpha/2} \underbrace{\int_{y=0}^{\alpha} \sin^2 \frac{4\pi y}{\alpha} dy}_{\alpha/2}$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{\sigma_0^2 \alpha^3}{80\pi \varepsilon_0} \left(1 - e^{-\frac{10\pi \beta}{\alpha}} \right)$$

$$\text{Αλλιώς: } W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \iiint E^2 d\tau =$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{x=0}^{\alpha} \int_{y=0}^{\alpha} \int_{z=0}^{\beta} (\vec{\nabla} V)^2 dx dy dz +$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{x=0}^{\alpha} \int_{y=0}^{\alpha} \int_{z=\beta}^{\infty} (\vec{\nabla} V)^2 dx dy dz = \dots$$

Αν μετακινήσουμε την πλάκα κατά $d\beta \hat{z}$ ασκώντας δύναμη $\vec{F}_{\text{εμείς}} = -\vec{F}$, όπου $\vec{F}$ η δύναμη που ασκεί το ηλεκτρικό πεδίο στην πλάκα, το έργο της δύναμης

που ασκούμεται ισούται με τη μεταβολή της ηλεκτροστατικής ενέργειας. Άρα $\underbrace{\vec{F}_{\text{εμείς}}}_{-\vec{F}} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{d\beta\hat{z}} = dW$, οπότε

$$\eta \hat{z} \text{ συνιστώσα της δύναμης που μας ενδιαφέρει είναι } F_z \hat{z} = -\frac{dW}{d\beta} \hat{z} = -\frac{\sigma_0^2 \alpha^2}{8\epsilon_0} e^{-\frac{10\pi\beta}{\alpha}} \hat{z}.$$

Ένας άλλος τρόπος να υπολογίσουμε τη δύναμη είναι σαν $\vec{F} = \hat{z} \iint \vec{E}_{\alpha\lambda\lambda} \cdot \hat{z} \sigma dx dy$, όπου $\vec{E}_{\alpha\lambda\lambda} \sigma dx dy$ είναι η δύναμη που ασκείται στο στοιχειώδες φορτίο της πλάκας $\sigma dx dy$ από όλα τα άλλα φορτία. Για να βρούμε το $\vec{E}_{\alpha\lambda\lambda}$ στη θέση κάθε στοιχειώδους επιφάνειας της πλάκας da , χωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο κομμάτι $\vec{E}_{\delta a}$ που δημιουργείται από το da , και στο $\vec{E}_{\alpha\lambda\lambda}$. Το πεδίο $\vec{E}_{\delta a}$, σε σημεία λίγο πάνω και λίγο κάτω από το τμήμα da (για $|z|$ πολύ μικρότερα των διαστάσεών του) είναι πεδίο φύλου απείρων διαστάσεων φορτισμένου με σταθερή σ , δηλ. $\vec{E}_{\delta a} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } z = \beta^+ \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } z = \beta^- \end{cases}$, οπότε το ολικό πεδίο κοντά

$$\text{στην πλάκα είναι } \vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_{\alpha\lambda\lambda} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } z = \beta^+ \\ \vec{E}_{\alpha\lambda\lambda} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & \text{αν } z = \beta^- \end{cases}$$

Αφού γνωρίζουμε το ολικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ μπορούμε να βρούμε το $\vec{E}_{\alpha\lambda\lambda}$ είτε σαν $\vec{E}|_{z=\beta^+} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$, είτε σαν $\vec{E}|_{z=\beta^-} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$, είτε σαν τον μέσο όρο των $\vec{E}|_{z=\beta^-}$ και $\vec{E}|_{z=\beta^+}$. Προκύ-

$$\text{πτει } E_{z,\alpha\lambda\lambda}|_{z=\beta} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \sin \frac{3\pi x}{\alpha} \sin \frac{4\pi y}{\alpha} e^{-\frac{10\pi\beta}{\alpha}} \text{ και}$$

$$F_z = \int_{x=0}^{\alpha} \int_{y=0}^{\alpha} E_{z,\alpha\lambda\lambda} \sigma dx dy = -\frac{\sigma_0^2 \alpha^2}{8\epsilon_0} e^{-\frac{10\pi\beta}{\alpha}}.$$

Αν η πλάκα έχει βάρος $mg\hat{z}$, στην ισορροπία $mg = \frac{\sigma_0^2 \alpha^2}{8\epsilon_0} e^{-\frac{10\pi\beta}{\alpha}} \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha}{10\pi} \ln \frac{\sigma_0^2 \alpha^2}{8\epsilon_0 mg}$. Σημείο ισορροπίας υπάρχει μόνο αν $\beta \geq 0 \Leftrightarrow mg \leq \sigma_0^2 \alpha^2 / 8\epsilon_0$.³

(γ) Αν η πλάκα τοποθετηθεί πάρα πολύ κοντά στην πλευρά $z = 0$, θα επαχθεί φορτίο με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma|_{z=0} = -\sigma$ στη βάση του σωλήνα $z = 0$, οπότε πεδίο δεν θα υπάρχει παρά μόνο στον απειροστό χώρο μεταξύ της βάσης του σωλήνα και της πλάκας. Με τον τρόπο αυτό το σύστημα ελαχιστοποιεί την ενέργειά του (η ενέργεια είναι $W = 0$, δηλ. η ελάχιστη δυνατή τιμή της $\frac{1}{2}\epsilon_0 \iint E^2 d\tau$).

Στον απειροστό χώρο μεταξύ της βάσης του σωλήνα και της πλάκας, το πεδίο είναι ομογενές και ίσο με $\frac{\sigma|_{z=0}}{\epsilon_0} \hat{z}$ (αφού το πεδίο λίγο έξω από την επιφάνεια

αγωγού είναι $\frac{\sigma|_{z=0}}{\epsilon_0} \hat{n}$). Έτσι $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$.

Η βάση του σωλήνα $z = 0$, δημιουργεί πεδίο $\frac{\sigma|_{z=0}}{2\epsilon_0} \hat{z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$ στα σημεία $z = 0^+$ όπου βρίσκεται η φορτισμένη πλάκα. Άρα η δύναμη που ασκείται στην πλάκα είναι $\int_{x=0}^{\alpha} \int_{y=0}^{\alpha} \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}\right) \sigma dx dy \hat{z} = -\frac{\sigma_0^2 \alpha^2}{8\epsilon_0} \hat{z}$. (Το αποτέλεσμα φυσικά συμφωνεί με αυτό που βρήκαμε για την δύναμη στο προηγούμενο ερώτημα (β), αν θέσουμε $\beta = 0$.)

³Η εξίσωση κίνησης της πλάκας προκύπτει $\frac{\ddot{z}}{g} = 1 - e^{\frac{10\pi(z-z_0)}{\alpha}}$, όπου $z_0 = \frac{\alpha}{10\pi} \ln \frac{\sigma_0^2 \alpha^2}{8\epsilon_0 mg}$ η θέση ισορροπίας. Υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{mv^2}{2} + W - mgz = E = \text{σταθερή}$, με $W = \frac{\sigma_0^2 \alpha^3}{80\pi\epsilon_0} \left(1 - e^{-\frac{10\pi\beta}{\alpha}}\right)$ την ηλεκτροστατική ενέργεια και $-mgz$ την βαρυτική δυναμική ενέργεια.