

[1]: Θέμα 4^ο από εξέταση της 4/9/2007:

(α) Σχετικά με τις οριακές συνθήκες των πεδίων $\vec{B}$ και $\vec{H}$, αποδείξτε τα ακόλουθα.

(α₁) Η συνιστώσα του $\vec{B}$ κάθετα στην επιφάνεια διαχωρισμού δύο μέσων είναι συνεχής.

(α₂) Η εφαπτομενική συνιστώσα του $\vec{H}$ είναι συνεχής αν δεν υπάρχουν επιφανειακά ελεύθερα ρεύματα.

Δίδονται $\iiint \nabla \cdot \vec{C} d\tau = \iint \vec{C} \cdot d\vec{a}$ και $\iint \nabla \times \vec{C} \cdot d\vec{a} = \oint \vec{C} \cdot d\vec{l}$.

(β) Στο χώρο υπάρχει μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και πεδίο $\vec{H}$ τα οποία σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφονται

$$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \cos \theta \vec{r} - B_0 \sin \theta \vec{\theta}, & r < R \\ \frac{\lambda_1}{r^3} \cos \theta \vec{r} + \frac{\lambda_1}{2r^3} \sin \theta \vec{\theta}, & r > R \end{cases} \text{ και}$$

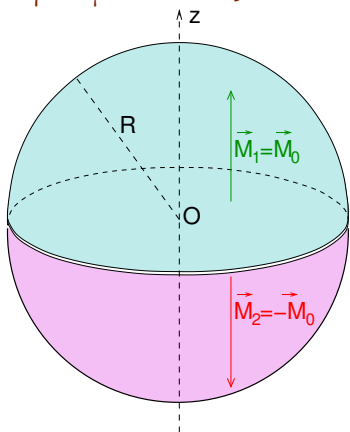
$$\vec{H} = \begin{cases} \lambda_2 \vec{B}, & r < R \\ \lambda_3 \vec{B}, & r > R \end{cases},$$

όπου $B_0, R, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ σταθερά.

Με δεδομένο ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα και ότι ο χώρος $r > R$ είναι κενός, να προσδιοριστούν τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (τα B_0 και R θεωρούνται γνωστά). Ποια κατανομή μαγνητισμού δημιουργεί τα πεδία;

[2]: Θέμα 4^ο από εξέταση της 6/2/2012:

Δύο μαγνητισμένα ημισφαίρια ίδιας ακτίνας R είναι σε επαφή και σχηματίζουν μια σφαίρα. Τα ημισφαίρια φέρουν σταθερή μαγνήτιση παράλληλη στον άξονα συμμετρίας τους, με φορά από τη βάση τους προς την ημισφαιρική επιφάνειά τους.



(α) Για να βρούμε το μαγνητικό πεδίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε βαθμωτό δυναμικό και να αντιστοιχίσουμε τις $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ και $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ στις $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m$ και $\nabla^2 \Phi_m = \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$. Στο εξωτερικό της σφαίρας ισχύει λοιπόν η εξίσωση Laplace $\nabla^2 \Phi_m = 0$. Βρείτε το δυναμικό εκτός της σφαίρας (για $r > R$) αν γνωρίζετε ότι στον άξονα z , για $|z| > R$, είναι

$$\Phi_m = M_0 |z| \left[\frac{2}{3} - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{3/2} \right].$$

Δίνεται το ανάπτυγμα $\frac{2}{3} - (1 + \xi^2)^{1/2} + \frac{1}{3} (1 + \xi^2)^{3/2}$

$$= \frac{\xi^4}{4} - \frac{1}{2} \frac{\xi^6}{6} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\xi^8}{8} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\xi^{10}}{10} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{(-1)^k}{2k+4} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)} \right]}_{c_k} \xi^{2k+4} \text{ για } |\xi| < 1.$$

Επίσης για τα πολυώνυμα Legendre $P_\ell(\pm 1) = (\pm 1)^\ell$.

(β) Πως περιμένετε να ελαττώνεται το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε μεγάλες αποστάσεις από τη σφαίρα, $r \gg R$; Σαν αντιστρόφως ανάλογο του r^3 ή του r^4 ; Επαληθεύεται αυτό από τη λύση που βρήκατε;

[3]: Θέμα 3^ο από εξέταση της 20/10/2014:

(α) Για ευθύγραμμο αγωγό κατά τον άξονα z που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I , δείξτε ότι το πεδίο $\vec{A} = A_z \hat{z}$ όπου $A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) + \text{σταθ.}$ αποτελεί διανυσματικό δυναμικό.

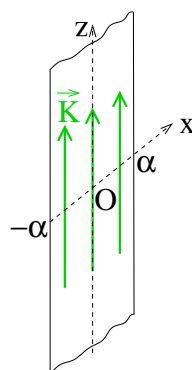
(β) Άπειρη λωρίδα πάχους 2α , στο επίπεδο xz , εκτείνεται από $x = -\alpha$ ως $x = +\alpha$ και διαρρέεται από σταθερό επιφανειακό ρεύμα έντασης $\vec{K} = K \hat{z}$, όπως στο σχήμα. Να βρεθεί διανυσματικό δυναμικό.

Υπόδειξη: Χωρίστε σε λωρίδες απειροστού πάχους dx' και ολοκληρώστε από $x' = -\alpha$ έως $x' = +\alpha$.

Μπορείτε να εκφράσετε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $f(s, c) = \int_0^s \ln(u^2 + c^2) du = s \ln(s^2 + c^2) - 2s + 2c \arctan \frac{s}{c}$.

(γ) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο της άπειρης λωρίδας του ερωτήματος (β).

$$\Delta \text{ίνονται } \frac{\partial f(s, c)}{\partial s} = \ln(s^2 + c^2), \quad \frac{\partial f(s, c)}{\partial c} = 2 \arctan \frac{s}{c}.$$



[4]: Θέμα 3^ο από εξέταση της 26/2/2013:

Το διανυσματικό δυναμικό για κυκλικό βρόχο ακτίνας ρ που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I είναι $\vec{A} = A_\phi(r, \theta) \hat{\phi}$ (σε σφαιρικές συντεταγμένες), όπου, για $r > \rho$,

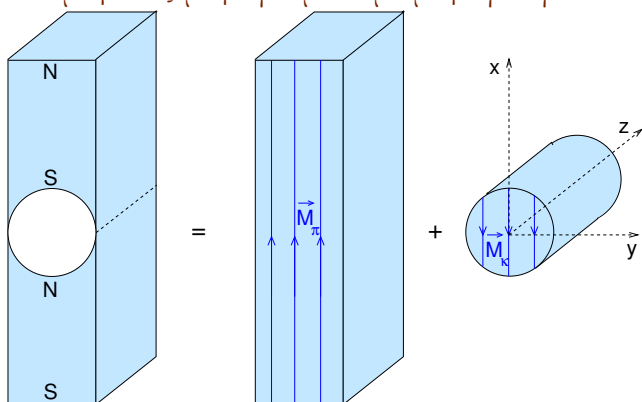
$$A_\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} I \frac{\rho^{n+1}}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} P_n(\sin \theta \sin \phi') \sin \phi' d\phi'.$$

Να γραφεί η αντίστοιχη έκφραση για το διανυσματικό δυναμικό ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου ακτίνας R με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ , που περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (η έκφραση ζητείται για $r > R$). Υπολογίστε τους δυο πρώτους όρους της σειράς. Δίνονται $P_0(u) = 1, P_1(u) = u$.

Υπόδειξη: Χωρίστε το δίσκο σε δακτυλίους πάχους dr και ολοκληρώστε από $\rho = 0$ ως $\rho = R$.

[5]: Θέμα 3^ο από εξέταση της 2/3/2015:

Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας βρείτε το μαγνητικό πεδίο στην κεντρική περιοχή του παρακάτω μαγνήτη (αριστερό σχήμα), το υλικό του οποίου είναι ομογενώς μαγνητισμένο με μαγνήτιση $\vec{M}$.



Όπως φαίνεται στο σχήμα, πρέπει να αθροίσετε (α) το πεδίο μιας πλάκας μεγάλων διαστάσεων και πάχους $2R$ με μαγνήτιση $\vec{M}_\pi = \vec{M}$ παράλληλη στις βάσεις της και

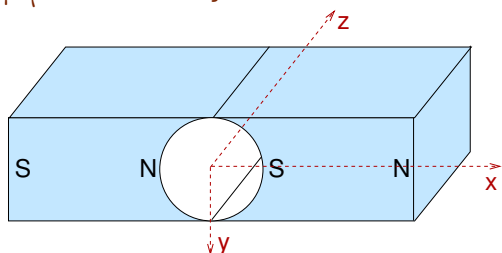
(β) το πεδίο κυλίνδρου μεγάλου μήκους και ακτίνας R με μαγνήτιση $\vec{M}_\kappa = -\vec{M}$ κάθετη στον άξονά του. Υποδείξεις: Για το (α) δείξτε πρώτα ότι το πεδίο $\vec{H}_\pi$ μηδενίζεται. Για το (β) βρείτε πρώτα τα δέσμια ρεύματα και το διανυσματικό δυναμικό το οποίο έχει μορφή $\vec{A}_\kappa = A_\kappa(\varpi, \phi) \hat{z}$ με $A_\kappa(\varpi, \phi) = \begin{cases} C\varpi \sin \phi, & \varpi \leq R \\ D\varpi^{-1} \sin \phi, & \varpi \geq R \end{cases}$

και δίνει πεδίο $\vec{B}_\kappa = \frac{1}{\varpi} \frac{\partial A_\kappa(\varpi, \phi)}{\partial \phi} \hat{\varpi} - \frac{\partial A_\kappa(\varpi, \phi)}{\partial \varpi} \hat{\phi}$.

Δίνονται $\hat{x} \times \hat{\varpi} = \sin \phi \hat{z}$ και $\cos \phi \hat{r} - \sin \phi \hat{\phi} = \hat{x}$.

[6]: Θέμα 4^ο από εξέταση της 26/2/2013:

Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στην κεντρική περιοχή του παρακάτω μαγνήτη, το υλικό του οποίου είναι ομογενώς μαγνητισμένο με μαγνήτιση $\vec{M} = M\hat{x}$. Θεωρήστε ότι το μαγνητισμένο υλικό γεμίζει το χώρο $-\infty < x < \infty$, $-R < y < R$, $-\infty < z < \infty$, εκτός της κυλινδρικής κοιλότητας απείρου μήκους και ακτίνας R γύρω από τον άξονα z .



Ένας τρόπος βασίζεται στην αναλογία ηλεκτρισμού/μαγνητισμού απουσία ελεύθερων φορτίων/ρεύματων που συνοψίζεται στον παρακάτω πί-

ηλεκτρισμός με $\rho_f = 0$	μαγνητισμός με $\vec{J}_f = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} / \epsilon_0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$
$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$	$\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m$
$\vec{\nabla}^2 V = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} / \epsilon_0$	$\vec{\nabla}^2 \Phi_m = \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$
$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$
$V_1 = V_2$	$\Phi_{m1} = \Phi_{m2}$
$D_{1\perp} = D_{2\perp}$	$B_{1\perp} = B_{2\perp}$

Επομένως το πεδίο $\vec{H}$ που δημιουργεί μια μαγνήτιση $\vec{M}$ βρίσκεται όπως το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί μια πόλωση, με τις αντιστοιχίες $\vec{P} \leftrightarrow \vec{M}$, $\epsilon_0 \vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$, $\epsilon_0 V \leftrightarrow \Phi_m$, $\vec{D} \leftrightarrow \vec{B} / \mu_0$.

(α) Βρείτε την πυκνότητα χωρικού ($\rho_m = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$) και επιφανειακού ($\sigma_m = \vec{M} \cdot \hat{n}$) «μαγνητικού φορτίου» – όπου αυτό υπάρχει – και δείξτε ότι το δυναμικό Φ_m ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στους χώρους $\varpi < R$ και $R < \varpi < \infty$.

(β) Η κατάλληλη λύση της εξίσωσης Laplace είναι

$$\Phi_m = \begin{cases} a_1 \varpi \cos \phi, & \varpi \leq R, \\ b_1 \varpi^{-1} \cos \phi, & \varpi \geq R. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες βρείτε τις σταθερές a_1 και b_1 .

(γ) Βρείτε το πεδίο $\vec{H}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ στο εσωτερικό της κυλινδρικής κοιλότητας.

[7]: Πρόβλημα 6.27 από Griffiths:

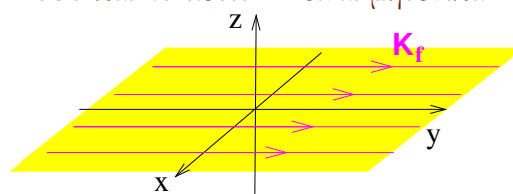
Ένα μαγνητικό δίπολο $\vec{m}$ τοποθετείται στο κέντρο μιας σφαίρας (ακτίνας R) από γραμμικό μαγνητικό υλικό (διαπερατότητας μ). Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας ($0 < r < R$) είναι

$$\frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}] + \frac{2(\mu_0 - \mu) \vec{m}}{(2\mu_0 + \mu) R^3} \right\}.$$

Πόσο είναι το πεδίο στο εξωτερικό της σφαίρας;

[8]: Θέμα 4^ο από εξέταση της 5/5/2014:

Έστω φύλλο ρεύματος στο επίπεδο $z = 0$, με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K}_f = K_f \hat{y}$. Στο χώρο λίγο κάτω από το φύλλο ($z \lesssim 0$) τόσο το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ όσο και το πεδίο $\vec{H}$ είναι μηδενικά.



(α) Χρησιμοποιώντας οριακές συνθήκες βρείτε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ στο χώρο λίγο πάνω από το φύλλο ($z \gtrsim 0$) αν αυτός είναι κενός.

(β) Ποιο είναι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το φύλλο ρεύματος και ποιο το πεδίο $\vec{B}_{\text{άλλα}}$ που δημιουργούν στην περιοχή $z \approx 0$ άλλα ρεύματα εκτός του

φύλλου;

Ποια η δύναμη ανά επιφάνεια που δέχεται το φύλλο ρεύματος;

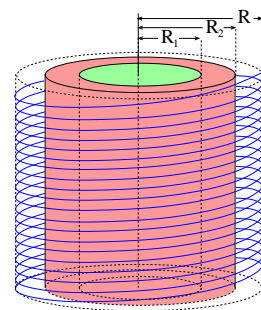
(γ) Αν ο χώρος λίγο πάνω από το φύλλο ($z \gtrsim 0$) είναι γεμάτος από γραμμικό μαγνητικό υλικό με μαγνητική διαπερατότητα μ , ποια είναι τα πεδία $\vec{H}$ και $\vec{B}$ στο χώρο αυτό;

Τσως χρειαστείτε τη διανυσματική ταυτότητα

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}.$$

N σπείρες ανά μήκος και διαρρέεται από ρεύμα I .

Στο εσωτερικό του έχει ένα μόνιμο μαγνήτη που καλύπτει το χώρο $\varpi < R_1$ και φέρει μαγνήτιση $\vec{M}_0$ παράλληλη στον άξονά του, ενώ ο χώρος $R_1 < \varpi < R_2$ είναι γεμάτος με γραμμικό μαγνητικό υλικό επιδεκτικότητας χ .



Να βρεθούν τα πεδία $\vec{H}$ και $\vec{B}$ σε όλο το χώρο καθώς και τα δέσμια ρεύματα όπου υπάρχουν.

[9]: Σωληνοειδές απείρου μήκους και ακτίνας R έχει

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

	Καρτεσιανές (x, y, z)	Κυλινδρικές (ϖ, ϕ, z)	Σφαιρικές (r, θ, ϕ)
		$\begin{cases} x = \varpi \cos \phi \\ y = \varpi \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
$\vec{v}$	$v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$	$v_\varpi \hat{\varpi} + v_\phi \hat{\phi} + v_z \hat{z}$	$v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \varpi} \hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial (\varpi v_\varpi)}{\partial \varpi} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$
$\vec{\nabla} \times \vec{v}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{x} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{y} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{z}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varpi} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi} \end{pmatrix} \hat{\varpi} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi} \end{pmatrix} \hat{\phi} +$ $\frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial (\varpi v_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi} \right] \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} +$ $\frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$
$\vec{\nabla}^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi \frac{\partial f}{\partial \varpi} \right) + \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$d\vec{l}$	$dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\varpi \hat{\varpi} + \varpi d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
$d\vec{a}$	$dydz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$	$\varpi d\phi dz \hat{\varpi} + d\varpi dz \hat{\phi} + \varpi d\varpi d\phi \hat{z}$	$r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$
$d\tau$	$dx dy dz$	$\varpi d\varpi d\phi dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

ΛΥΣΕΙΣ:

[1]: (α)

(β) Η συνέχεια της κάθετης (B_r) συνιστώσας στην σφαιρική επιφάνεια $r = R$ δίνει $B_0 \cos \theta = \frac{\lambda_1}{R^3} \cos \theta \Leftrightarrow \lambda_1 = B_0 R^3$.

Ο χώρος $r > R$ είναι κενός, άρα $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Leftrightarrow \lambda_3 = \frac{1}{\mu_0}$. Αφού δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα η εφαπτομενική συνιστώσα του πεδίου $\vec{H}$ στην σφαιρική επιφάνεια $r = R$ (η H_θ συνιστώσα) πρέπει να είναι συνεχής, οπότε $\lambda_2 B_\theta|_{r=R^-} = \lambda_3 B_\theta|_{r=R^+} \Leftrightarrow \lambda_2 (-B_0 \sin \theta) = \lambda_3 \frac{\lambda_1}{2R^3} \sin \theta \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2\mu_0}$.

Η μαγνήτιση είναι μηδέν για $r > R$ όπου ο χώρος είναι κενός, ενώ για $r < R$ είναι $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$ και αντικαθιστώντας προκύπτει $\vec{M} = \frac{\mu_0}{2\mu_0} \left(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \right) = \frac{3B_0}{2\mu_0} \hat{z}$. Πρόκειται λοιπόν για ομογενώς μαγνητισμένη σφαίρα.

(Μπορεί να ελεγχθεί ότι ισχύουν οι $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ και $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ στο εσωτερικό των περιοχών $r < R$ και $r > R$.)

[2]: Η λύση της Laplace στο εξωτερικό της σφαίρας

$$\text{είναι } \Phi_m = a_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta).$$

Οι συντελεστές θα βρεθούν από την απαίτηση η λύση αυτή πάνω στον ημιάξονα z , δηλ. για $\theta = 0$, να είναι ίση με το δοσμένο δυναμικό: $a_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} = M_0 r \left[\frac{2}{3} - \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)^{3/2} \right]$ (θέσαμε $z = r$ κάτι που ισχύει αν $\theta = 0$).

Θα μπορούσαμε να εργαστούμε όμοια στον ημιάξονα $\theta = \pi$.

Χρησιμοποιώντας το δοσμένο ανάπτυγμα με $\xi = \frac{R}{r}$ ($\xi < 1$), είναι $a_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} = M_0 r \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+4}$.

Επομένως υπάρχουν μόνο συντελεστές b_ℓ με $\ell = 2k + 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ και είναι ίσοι με $b_{2k+2} = M_0 c_k R^{2k+4}$ ($b_\ell = 0$ για περιττά ℓ και για $\ell = 0$).

Το δυναμικό είναι λοιπόν σε όλο το χώρο $r \geq R$

$$\Phi_m = M_0 R \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{R^{2k+3}}{r^{2k+3}} P_{2k+2}(\cos \theta), \text{ ή}$$

$$\Phi_m = M_0 R \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k+4)(2k)!!} \frac{R^{2k+3}}{r^{2k+3}} P_{2k+2}(\cos \theta).$$

Θα μπορούσαμε να βρούμε το δυναμικό επεκτείνοντας την μορφή του που ισχύει στον ημιάξονα $\theta = 0$

σε όλα τα υπόλοιπα θ . Κάθε όρος $\frac{A_n}{r^{n+1}}$ που ισχύει για $\theta = 0$ επεκτείνεται σε $\frac{A_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$ σε όλα τα θ (αφού αυτή είναι η λύση της Laplace που είναι ανάλογη του $1/r^{n+1}$).

Έτσι το δυναμικό για $\theta = 0$, που με χρήση του αναπτύγματος γράφεται $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_0 c_k R^{2k+4}}{r^{(2k+2)+1}}$ επεκτείνεται σε $\Phi_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_0 c_k R^{2k+4}}{r^{(2k+2)+1}} P_{2k+2}(\cos \theta)$.

(β) Αφού η συνολική διπολική ροπή της σφαίρας είναι μηδέν δεν υπάρχει διπολικός όρος στο πολυπολικό ανάπτυγμα (ο οποίος θα ήταν αντιστρόφως ανάλογο του r^3). Συνεπώς το μαγνητικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις από τη σφαίρα ελαττώνεται σαν αντιστρόφως ανάλογο του r^4 (λόγω του τετραπολικού όρου). Αυτό επαληθεύεται από τη λύση που βρήκαμε, αφού ο σημαντικότερος όρος σε μεγάλες αποστάσεις είναι ο $k = 0$, δηλ. $\Phi_m \approx \frac{M_0 c_0 R^4}{r^3} P_2(\cos \theta)$. Αφού το δυναμικό ελαττώνεται σαν αντιστρόφως ανάλογο του r^3 , το μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \Phi_m$ ελαττώνεται σαν αντιστρόφως ανάλογο του r^4 .

[3]: (α) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times [A_z(x, y) \hat{z}] = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{y}$.

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y\hat{x} - x\hat{y}}{x^2 + y^2}$, ή σε κυλινδρικές (με $x = \varpi \cos \phi$, $y = \varpi \sin \phi$), $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \varpi} (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \varpi} \hat{\phi}$, δηλ. βρήκαμε το πεδίο ευθύγραμμου αγωγού κατά τον άξονα z που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I .

(β) Κάθε λωρίδα απειροστού πάχους dx' στη θέση x' αντιστοιχεί σε ευθύγραμμο αγωγό κατά τον άξονα z που διαρρέεται από ρεύμα έντασης $dI = K dx'$. Το αντίστοιχο διανυσματικό δυναμικό είναι $d\vec{A} = -\hat{z} \frac{\mu_0 K dx'}{4\pi} \ln [(x - x')^2 + y^2]$.

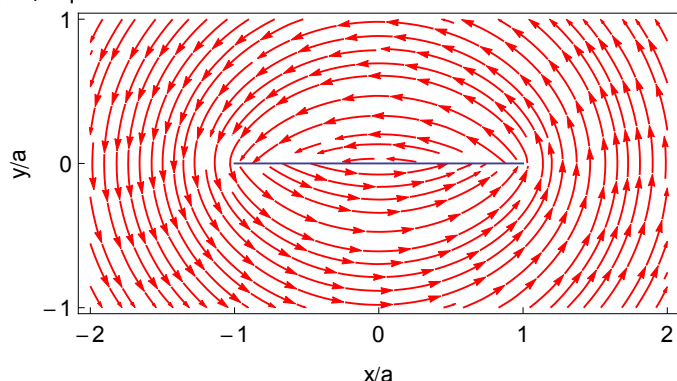
Ολοκληρώνοντας, το διανυσματικό δυναμικό της λωρίδας είναι $\vec{A} = -\hat{z} \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_{-a}^a \ln [(x - x')^2 + y^2] dx'$. Θέτοντας $x - x' = u$, μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα σαν $\vec{A} = \hat{z} \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_{x+a}^{x-a} \ln (u^2 + y^2) du = \hat{z} \frac{\mu_0 K}{4\pi} [f(x - a, y) - f(x + a, y)]$.

(γ) Το μαγνητικό πεδίο της λωρίδας είναι

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times [A_z(x, y) \hat{z}] = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{y} = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \left[\frac{\partial f(x - a, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x + a, y)}{\partial y} \right] \hat{x}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\mu_0 K}{4\pi} \left[-\frac{\partial f(x-a, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x+a, y)}{\partial x} \right] \hat{y} \\
 & = -\frac{\mu_0 K}{2\pi} \left(\arctan \frac{a-x}{y} + \arctan \frac{a+x}{y} \right) \hat{x} \\
 & + \frac{\mu_0 K}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} \hat{y}.
 \end{aligned}$$

Το επόμενο σχήμα δείχνει τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου.



Μπορεί να ελεγχθεί ότι η ασυνέχεια του B_x στην επιφάνεια $y = 0$ ικανοποιεί την σωστή οριακή συνθήκη.

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \arctan \frac{a-x}{y} = \begin{cases} \pi/2 & \text{αν } x < a \\ -\pi/2 & \text{αν } x > a \end{cases} \text{ και}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \arctan \frac{a+x}{y} = \begin{cases} \pi/2 & \text{αν } x > -a \\ -\pi/2 & \text{αν } x < -a \end{cases} \text{ επομέ-}$$

$$\text{ως } \lim_{y \rightarrow 0^+} B_x = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < -a \\ -\frac{\mu_0 K}{2} & \text{αν } -a < x < a \\ 0 & \text{αν } x > a \end{cases}$$

Η συνάρτηση B_x είναι περιττή ως προς y , επομένως

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} B_x = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < -a \\ \frac{\mu_0 K}{2} & \text{αν } -a < x < a \\ 0 & \text{αν } x > a \end{cases}$$

Έτσι η συνιστώσα B_x είναι ασυνεχής στο επίπεδο $y = 0$ μόνο στην περιοχή της λωρίδας $-a < x < a$, με την ασυνέχεια να ικανοποιεί την $\vec{B}|_{y=0^+} - \vec{B}|_{y=0^-} = \mu_0 \vec{K} \times \hat{y}$.

Η $\hat{x}$ συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου γράφεται $B_x = -\frac{\mu_0 K}{2\pi} (A + B)$, όπου $A = \arctan \frac{a-x}{y}$ και $B = \arctan \frac{a+x}{y}$.

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$ θα μπορούσαμε να απλοποιήσουμε το άθροισμα $A+B$ και κατά συνέπεια την έκφραση της B_x .

Χρειάζεται όμως προσοχή γιατί μια σχέση $\tan \xi = \eta$ αντιστρέφεται και δίνει $\xi = \arctan \eta$ μόνο αν $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Στο διάστημα $|x| > a$ τα $\tan A = \frac{a-x}{y}$, $\tan B =$

$\frac{a+x}{y}$ είναι αντίθετα. Επομένως από τις γωνίες A και B η μία ανήκει στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και η άλλη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Το άθροισμά τους ανήκει στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και άρα η $\tan(A+B) = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$ αντιστρέφεται και δίνει $A+B = \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$.

Αν $|x| < a$ και $y > 0$ τα $\tan A = \frac{a-x}{y}$,

$\tan B = \frac{a+x}{y}$ είναι και τα δύο θετικά, οπότε

$A+B \in (0, \pi)$, ή $A+B - \frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Μπορούμε

λοιπόν να αντιστρέψουμε την $\tan\left(A+B - \frac{\pi}{2}\right) =$

$$-\frac{1}{\tan(A+B)} = -\frac{x^2 + y^2 - a^2}{2ay} \text{ και να γράψουμε}$$

$$A+B = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2ay}.$$

Όμοια αν $|x| < a$ και $y < 0$, οπότε $A+B \in (-\pi, 0)$

βρίσκουμε $A+B = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2ay}$.

Έτσι μπορούμε να γράψουμε την $\hat{x}$ συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου σαν $B_x = -\frac{\mu_0 K}{2\pi} \times$

$$\begin{cases} \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} & \text{αν } |x| > a \\ \frac{\pi}{2} \frac{y}{|y|} - \arctan \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2ay} & \text{αν } |x| < a \end{cases}$$

Στην οριακή περίπτωση $a \rightarrow \infty$ η λύση γίνεται

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 K}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\arctan \frac{a-x}{y} + \arctan \frac{a+x}{y} \right) \hat{x}$$

$$+ \frac{\mu_0 K}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} \hat{y}. \text{ Αν } y > 0 \text{ εί-}$$

ναι $\lim_{a \rightarrow \infty} \arctan \frac{a \pm x}{y} = \frac{\pi}{2}$, αν $y < 0$ είναι

$\lim_{a \rightarrow \infty} \arctan \frac{a \pm x}{y} = -\frac{\pi}{2}$, ενώ το όρισμα του λογα-

ρίθμου είναι μονάδα. Έτσι βρίσκουμε το πεδίο από

$$\text{άπειρο φύλλο ρεύματος } \vec{B} = -\frac{\mu_0 K}{2} \hat{x} \text{ για } y > 0 \text{ και } \vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2} \hat{x} \text{ για } y < 0.$$

Στην άλλη οριακή περίπτωση $a \rightarrow 0$, αλλά με πεπε-

ρασμένο ολικό ρεύμα $I = 2aK$, η λύση γίνεται

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left(\arctan \frac{a-x}{y} + \arctan \frac{a+x}{y} \right) \hat{x}$$

$$+ \frac{\mu_0 I}{8\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \hat{y}. \text{ Και τα δύο όρια εί-}$$

ναι της μορφής $0/0$. Με κανόνα L'Hôpital βρίσκουμε

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left(\arctan \frac{a-x}{y} + \arctan \frac{a+x}{y} \right) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

και $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \ln \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} = \frac{4x}{x^2+y^2}$, οπότε βρίσκουμε το πεδίο ευθύγραμμου αγωγού απείρου μήκους $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2+y^2}$.

[4]: Το επιφανειακό ρεύμα που δημιουργείται λόγω της περιστροφής του δίσκου είναι $\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma \omega r \hat{\phi}$. Κάθε δακτύλιος ακτίνας ρ και πάχους $d\rho$ διαρρέεται από ρεύμα $dI = K d\rho = \sigma \omega \rho d\rho$ και δημιουργεί πεδίο με διανυσματικό δυναμικό $d\vec{A} = \hat{\phi} \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} dI \frac{\rho^{n+1}}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} P_n(\sin \theta \sin \phi') \sin \phi' d\phi'$ σε αποστάσεις $r > \rho$.

Αντικαθιστώντας το $dI = \sigma \omega \rho d\rho$ και ολοκληρώνοντας σε όλη την έκταση του δακτυλίου βρίσκουμε το συνολικό διανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^R \rho^{n+2} d\rho \int_0^{2\pi} P_n(\sin \theta \sin \phi') \sin \phi' d\phi'$
 $\vec{A} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+3}}{(n+3)r^{n+1}} \int_0^{2\pi} P_n(\sin \theta \sin \phi') \sin \phi' d\phi'$
σε αποστάσεις $r > R$.

Ο πρώτος όρος είναι $\hat{\phi} \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \frac{R^3}{3r} \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = 0$ (μηδενίζεται όπως αναμέναμε καθώς δεν υπάρχει μονοπολικός όρος στο πολυπολικό ανάπτυγμα μαγνητικού πεδίου).

Ο δεύτερος όρος είναι $\hat{\phi} \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \frac{R^4}{4r^2} \int_0^{2\pi} \sin \theta \sin^2 \phi' d\phi' = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{16r^2} \sin \theta \hat{\phi}$ και αντιστοιχεί σε διπολικό πεδίο.

Συγκρίνοντας με την έκφραση $\frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi}$ συμπεραίνουμε ότι $m = \frac{\sigma \omega \pi R^4}{4}$. Η διπολική ροπή του δίσκου είναι πράγματι $m = \int \pi r^2 dI = \int_0^R \pi r^2 \sigma \omega r dr = \frac{\sigma \omega \pi R^4}{4}$.

[5]: (α) $\vec{\nabla} \times \vec{H}_\pi = 0$ και $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_\pi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$, αφού $\vec{M} = M(y)\hat{x}$. Άρα το πεδίο $\vec{H}_\pi$ είναι μηδέν και το μαγνητικό πεδίο της πλάκας είναι $\vec{B}_\pi = \mu_0 \vec{M}$.

Β' τρόπος: Τα δέσμια ρεύματα είναι $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$ και $\vec{K}_b = \vec{M} \times (\pm \hat{y}) = \pm M \hat{z}$. Αυτά δημιουργούν μαγνητικό πεδίο της μορφής $\vec{B}_\pi = B_\pi(y)\hat{x}$ και πεδίο $\vec{H}_\pi$ της μορφής $\vec{H}_\pi = H_\pi(y)\hat{x}$. Μέσω ολοκληρωτικού νόμου Ampère για το $\vec{H}_\pi$ σε κατάλληλο ορθογώνιο βρόχο (και λόγω του ότι $H_\pi \rightarrow 0$ για $y \rightarrow \pm\infty$) δείχνουμε ότι $H_\pi = 0$, οπότε $\vec{B}_\pi = \mu_0 \vec{M}$. (Μπο-

ρούμε να βρούμε το $\vec{B}_\pi$ και μέσω ολοκληρωτικού νόμου Ampère για το $\vec{B}_\pi$ σε κατάλληλους ορθογώνιους βρόχους, λαμβάνοντας υπόψη τα δέσμια ρεύματα.)

(β) Τα δέσμια ρεύματα είναι $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}_x = 0$ και $\vec{K}_b = \vec{M}_x \times \hat{\omega} = -M \hat{x} \times \hat{\omega} = -M \sin \phi \hat{z}$. Αυτά δημιουργούν πεδίο με $\vec{A}_x = A_x(\varpi, \phi) \hat{z}$, όπου $\vec{\nabla}^2 A_x = 0$. Για την κατάλληλη λύση της Laplace (δίνεται) ισχύουν οι οριακές συνθήκες:

$$A_x|_{\varpi=R^+} = A_x|_{\varpi=R^-} \Leftrightarrow D = CR^2 \text{ και } \frac{\partial A_x}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=R^+} - \frac{\partial A_x}{\partial \varpi} \Big|_{\varpi=R^-} = -\mu_0 K_b \Leftrightarrow -\frac{D}{R^2} - C = -\mu_0(-M) \text{ με λύση } C = -\mu_0 M/2, D = -\mu_0 M R^2/2.$$

Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούσαμε την οριακή συνθήκη $\vec{B}_x|_{\varpi=R^+} - \vec{B}_x|_{\varpi=R^-} = \mu_0 \vec{K}_b \times \hat{\omega}$.

Άρα, μέσα στον κύλινδρο είναι $\vec{A}_x = -(\mu_0 M/2)y\hat{z}$ και $\vec{B}_x = \vec{\nabla} \times \vec{A}_x = -(\mu_0 M/2)\hat{x} = -\mu_0 \vec{M}/2$.

Το ίδιο από $\vec{B}_x = \frac{1}{\varpi} \frac{\partial A_x}{\partial \phi} \hat{\omega} - \frac{\partial A_x}{\partial \varpi} \hat{\phi} \Leftrightarrow \frac{\mu_0 M}{2} (\cos \phi \hat{r} - \sin \phi \hat{\phi}) = -\frac{\mu_0 M}{2} \hat{x}$. Το συνολικό πεδίο στην κεντρική περιοχή του μαγνήτη προκύπτει $\mu_0 \vec{M} + \left(-\frac{\mu_0 \vec{M}}{2} \right) = \frac{\mu_0 \vec{M}}{2}$.

[6]: (α) $\rho_m = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$ αφού $\vec{M} = \text{σταθερό}$. Στις επιφάνειες $y = \pm R$ είναι $\sigma_m = 0$ διότι $\vec{M} \perp \hat{n}$. Επομένως τα μόνα «φορτία» είναι τα επιφανειακά στην κυλινδρική επιφάνεια $\varpi = R$, με $\sigma_m = \vec{M} \cdot \hat{n} = M \hat{x} \cdot (-\hat{\omega}) = -M \cos \phi$.

Υπάρχουν και επιφανειακά φορτία $\vec{M} \cdot (\pm \hat{x}) = \pm M$ στις πλευρές $x = \pm\infty$, $-R < y < R$, τα οποία όμως δεν επηρεάζουν αφού είναι στο άπειρο και το πλάτος $2R$ της φορτισμένης λωρίδας είναι πεπερασμένο.

Το δυναμικό Φ_m ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στους χώρους $\varpi < R$ και $R < \varpi < \infty$ αφού σε αυτές δεν υπάρχουν φορτία.

$$(\beta) \Phi_m = \begin{cases} a_1 \varpi \cos \phi, & \varpi \leq R \\ b_1 \varpi^{-1} \cos \phi, & \varpi \geq R \end{cases}$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m = \begin{cases} -a_1 (\cos \phi \hat{\omega} - \sin \phi \hat{\phi}), & \varpi < R \\ \frac{b_1}{\varpi^2} (\cos \phi \hat{\omega} + \sin \phi \hat{\phi}), & \varpi > R \end{cases}$$

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M} \text{ με } \vec{M} = M \hat{x} \text{ για } \varpi > R \text{ και } \hat{x} = (\hat{x} \cdot \hat{\omega}) \hat{\omega} + (\hat{x} \cdot \hat{\phi}) \hat{\phi} = \cos \phi \hat{\omega} - \sin \phi \hat{\phi}, \text{ επομένως } \frac{\vec{B}}{\mu_0} =$$

$$\begin{cases} -a_1 (\cos \phi \hat{\omega} - \sin \phi \hat{\phi}), & \varpi < R \\ \left(\frac{b_1}{\varpi^2} + M \right) \cos \phi \hat{\omega} + \left(\frac{b_1}{\varpi^2} - M \right) \sin \phi \hat{\phi}, & \varpi > R \end{cases}$$

Οι σταθερές θα βρεθούν από την συνέχεια του δυνα-

μικού και την συνέχεια της κάθετης συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου στην επιφάνεια $\varpi = R$. Έτσι προκύπτουν $a_1 R = \frac{b_1}{R}$ και $-a_1 = \frac{b_1}{R^2} + M$, η λύση των οποίων δίνει $a_1 = -\frac{M}{2}$, $b_1 = -\frac{MR^2}{2}$.

Αντί της συνέχειας της κάθετης συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου στην επιφάνεια $\varpi = R$ θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ασυνέχεια της κάθετης συνιστώσας του πεδίου $\vec{H}$, δηλ. την οριακή συνθήκη $H_{\varpi|\varpi=R^+} - H_{\varpi|\varpi=R^-} = \sigma_m$.

(γ) Στο εσωτερικό της κοιλότητας προκύπτουν ομογενή πεδία $\vec{H} = \frac{M}{2} (\cos \phi \hat{\varpi} - \sin \phi \hat{\phi}) = \frac{\vec{M}}{2}$ και $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{M}}{2}$.

[7]: Εκτός από τη λύση του Griffiths, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με τη βοήθεια του βαθμωτού δυναμικού στον μαγνητισμό:

Το μαγνητικό πεδίο του διπόλου $\vec{m}$ θα μαγνητίσει τη σφαίρα και η μαγνήτιση $\vec{M}$ θα αντιστοιχεί σε δέσμια ρεύματα $\vec{J}_b$ στο εσωτερικό και $\vec{K}_b$ στην επιφάνεια $r = R$. Αφού το μέσο είναι γραμμικό θα ισχύει $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \chi \vec{\nabla} \times \vec{H}$ για $r < R$ όπου η επιδεκτικότητα χ είναι σταθερή. Άρα $\vec{J}_b = \chi \vec{J}_f$ και αφού το μόνο ελεύθερο ρεύμα είναι αυτό που αντιστοιχεί στη διπολική ροπή $\vec{m}$ στο κέντρο της σφαίρας, θα υπάρχει ένα ανάλογο δέσμιο ρεύμα που θα δημιουργεί «δέσμιο» δίπολο ροπής $\vec{m}_b = \chi \vec{m}$ στο ίδιο σημείο. Έτσι στο κέντρο της σφαίρας θα υπάρχει συνολική διπολική ροπή $\vec{m}_{ολ} = (1 + \chi) \vec{m} = \frac{\mu}{\mu_0} \vec{m}$.

Παρότι υπάρχουν και επιφανειακά δέσμια ρεύματα στην ακτίνα $r = R$, το μαγνητικό πεδίο σε αποστάσεις $r \ll R$ κυριαρχείται από το πεδίο της $\vec{m}_{ολ}$, δηλ. $\vec{B}|_{r \ll R} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m}_{ολ} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}_{ολ}] =$

$$\frac{\mu}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}]. \text{ Για το πεδίο } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \text{ εί-$$

ναι $\vec{H}|_{r \ll R} \approx \frac{1}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}]$ ή σε σφαιρικές συντεταγμένες συστήματος με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και $\hat{z}$ ομόροπο της $\vec{m}$,

$$\vec{H}|_{r \ll R} \approx \frac{m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) = -\vec{\nabla} \left(\frac{m \cos \theta}{4\pi r^2} \right).$$

Αφού $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ σε όλο το χώρο $r > 0$ (μόνο στο $r = 0$ υπάρχει το ελεύθερο ρεύμα που αντιστοιχεί στη διπολική ροπή $\vec{m}$) μπορούμε να ορίσουμε βαθμωτό δυναμικό Φ_m και να γράψουμε το πεδίο $\vec{H}$ σαν $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m$. Είναι $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu_0(1 + \chi)} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \Leftrightarrow$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi_m = 0 \text{ για } r < R \text{ όπου το } \chi = \text{σταθερό και όμοια}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \Leftrightarrow \vec{\nabla}^2 \Phi_m = 0$ για $r > R$. Το δυναμικό Φ_m δηλ. ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στις δύο περιοχές $0 < r < R$, $r > R$ και λόγω συμμετρίας είναι συνάρτηση $\Phi_m(r, \theta)$. Η γενική λύση της Laplace γράφεται μέσω των πολωνύμων Legendre. Αφού γράψουμε λύση τέτοιας μορφής στις δυο περιοχές, οι συντελεστές θα προσδιοριστούν από τις οριακές συνθήκες:

❶ στην επιφάνεια $r = R$ η εφαπτομενική συνιστώσα του $\vec{H}$ είναι συνεχής, δηλ. $H_{\theta}|_{r=R^+} = H_{\theta}|_{r=R^-} \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi_m}{\partial \theta} \Big|_{r=R^+} = \frac{\partial \Phi_m}{\partial \theta} \Big|_{r=R^-}$, ή ισοδύναμα το δυναμικό είναι συνεχές: $\Phi_m|_{r=R^+} = \Phi_m|_{r=R^-}$

❷ στην επιφάνεια $r = R$ η κάθετη συνιστώσα του $\vec{B}$ είναι συνεχής, δηλ. $B_r|_{r=R^+} = B_r|_{r=R^-} \Leftrightarrow \mu_0 H_r|_{r=R^+} = \mu H_r|_{r=R^-} \Leftrightarrow \mu_0 \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \Big|_{r=R^+} = \mu \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \Big|_{r=R^-}$.

❸ κοντά στο σημείο $r = 0$: $\Phi_m \approx \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2}$ ώστε το πεδίο $\vec{B} = \mu \vec{H} = -\mu \vec{\nabla} \Phi_m$ να είναι το πεδίο της $\vec{m}_{ολ}$ (το οποίο θέλουμε να απειρίζεται όπως απειρίζεται το πεδίο του διπόλου).

❹ σε μεγάλες αποστάσεις $r \gg R$ το πεδίο μηδενίζεται, $\Phi_m|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ (γενικότερα το δυναμικό μπορεί να είναι σταθερό· μπορούμε να επιλέξουμε αυτή τη σταθερά ίση με μηδέν χωρίς βλάβη της γενικότητας).

❺ Πρέπει επίσης να εξασφαλίσουμε ότι ισχύει $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$ (δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα). Αυτό αντικατοπτρίζεται στην απουσία του μονοπολικού όρου σε μεγάλες αποστάσεις.

Το πρόβλημα – η εξίσωση και οι οριακές συνθήκες – είναι μαθηματικά ισοδύναμο με το πρόβλημα όπου ηλεκτρικό δίπολο ροπής $\vec{p}$ είναι εμφυτευμένο στο κέντρο σφαίρας ακτίνας R από διηλεκτρικό υλικό ηλεκτρικής επιδεκτικότητας ϵ , αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $\frac{\vec{p}}{\epsilon} \leftrightarrow \vec{m}$, $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \leftrightarrow \frac{\mu}{\mu_0}$, $V \leftrightarrow \Phi_m$, $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$, $\vec{D} \leftrightarrow \vec{B}$.

Η οριακή ❸ είναι η μόνη που «επιλέγει» την θ -εξάρτηση της λύσης, άρα η μορφή του Φ_m που ικανοποιεί αυτόματα τις οριακές ❸, ❹ και την απαίτηση ❺ είναι

$$\Phi_m = \begin{cases} a_0 + a_1 r \cos \theta + \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2}, & r < R \\ \frac{B_1 \cos \theta}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

Οι οριακές ❶, ❷ δίνουν $a_0 = 0$, $B_1 = a_1 R^3 + \frac{m}{4\pi}$, $\frac{\mu_0}{\mu} B_1 = \frac{m}{4\pi} - \frac{a_1 R^3}{2}$ η λύση των οποίων οδηγεί στις

$$\Phi_m = \begin{cases} \frac{m}{4\pi R^3} \frac{2(\mu - \mu_0)}{2\mu_0 + \mu} r \cos \theta + \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2}, & r \leq R \\ \frac{m}{4\pi} \frac{3\mu}{2\mu_0 + \mu} \frac{\cos \theta}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

Το πεδίο $\vec{H}$ στο εσωτερικό της σφαίρας είναι επαλληλία του πεδίου από το δίπολο $\vec{m}$ με ομογενές

$$-\vec{\nabla} \left[\frac{m}{4\pi R^3} \frac{2(\mu - \mu_0)}{2\mu_0 + \mu} \underbrace{r \cos \theta}_z \right] = \frac{2(\mu_0 - \mu)}{2\mu_0 + \mu} \frac{\vec{m}}{4\pi R^3},$$

ενώ στο εξωτερικό της σφαίρας είναι πεδίο διπόλου διπολικής ροπής $\frac{3\mu}{2\mu_0 + \mu} \vec{m}$.

$$\text{Είναι } \vec{H} = \begin{cases} \frac{2(\mu_0 - \mu)}{2\mu_0 + \mu} \frac{\vec{m}}{4\pi R^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{4\pi r^3}, & r < R \\ \frac{3\mu}{2\mu_0 + \mu} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{4\pi r^3}, & r > R \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{2\mu(\mu_0 - \mu)}{2\mu_0 + \mu} \frac{\vec{m}}{4\pi R^3} + \mu \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{4\pi r^3}, & r < R \\ \frac{3\mu\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{4\pi r^3}, & r > R \end{cases}$$

ενώ η μαγνήτιση της σφαίρας είναι (για $r < R$)

$$\vec{M} = -\frac{2(\mu_0 - \mu)^2}{(2\mu_0 + \mu)\mu_0} \frac{\vec{m}}{4\pi R^3} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{4\pi r^3}.$$

[8]: (α) Από την οριακή $\vec{B}|_{z=0+} - \vec{B}|_{z=0-} = \mu_0 \vec{K} \times \hat{z}$, με $\vec{K} = K_f \hat{y}$ και $\vec{B}|_{z=0-} = 0$ προκύπτει $\vec{B} = \mu_0 K_f \hat{x}$.

(β) Το φύλλο ρεύματος δημιουργεί πεδίο $\frac{1}{2}\mu_0 K_f \hat{x}$ στο χώρο $z > 0$ και $-\frac{1}{2}\mu_0 K_f \hat{x}$ στο χώρο $z < 0$. Αφού το συνολικό πεδίο είναι $\mu_0 K_f \hat{x}$ στο χώρο $z > 0$ και 0 στο χώρο $z < 0$ είναι $\vec{B}_{\text{άλλα}} = \frac{1}{2}\mu_0 K_f \hat{x}$.

Η δύναμη ανά επιφάνεια είναι $\frac{Id\vec{\ell} \times \vec{B}_{\text{άλλα}}}{\text{επιφάνεια}} = \frac{(K_f dx)(dy\hat{y}) \times \vec{B}_{\text{άλλα}}}{dx dy} = \vec{K}_f \times \vec{B}_{\text{άλλα}} = -\frac{\mu_0 K_f^2}{2} \hat{z} = -\frac{B|_{z=0+}^2}{2\mu_0} \hat{z}$.

(γ) Τώρα υπάρχει και δέσμιο επιφανειακό φορτίο στο επίπεδο $z = 0$. Αυτό όμως δεν επηρεάζει την ασυνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας του πεδίου $\vec{H}$:

$\vec{H}_{\parallel}|_{z=0+} - \vec{H}_{\parallel}|_{z=0-} = \vec{K}_f \times \hat{z}$. Άρα, μηδενίζοντας το πεδίο κάτω από το φύλλο προκύπτει $\vec{H}_{\parallel}|_{z=0+} = K_f \hat{x}$ και $\vec{B}_{\parallel}|_{z=0+} = \mu \vec{H}_{\parallel}|_{z=0+} = \mu K_f \hat{x}$.

Η κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου είναι συνεχής, άρα $\vec{B}_{\perp}|_{z=0+} = 0$ αφού κάτω από το φύλλο είναι μηδέν.

Συνολικά λοιπόν $\vec{B}|_{z=0+} = \mu K_f \hat{x}$.

[9]: Λόγω συμμετρίας θα είναι $\vec{H} = H(\varpi)\hat{z}$ με $\lim_{\varpi \rightarrow \infty} H(\varpi) = 0$. Εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό

νόμο Ampère $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{f,\text{εγκ}}$ σε ορθογώνιους βρόχους $\varpi_1 < \varpi < \varpi_2$, $z_1 < z < z_2$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα μόνα ελεύθερα ρεύματα βρίσκονται στην επιφάνεια του σωληνοειδούς $\varpi = R$, προκύπτουν τα εξής:

Αν $\varpi_1 > R$ και $\varpi_2 = +\infty$ προκύπτει $H(\varpi_1) = 0$.

Αν $\varpi_1 < R$ και $\varpi_2 > R$ προκύπτει $H(\varpi_1) = NI$.

$$\Delta\eta\lambda. \vec{H} = \begin{cases} NI\hat{z}, & \varpi < R \\ 0, & \varpi > R \end{cases}$$

Από τη σχέση $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ μέσα στον μόνιμο μαγνήτη και $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}$ στο γραμμικό μαγνητικό υλικό και στο κενό βρίσκουμε

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0(NI + M_0)\hat{z}, & \varpi < R_1 \\ \mu_0(1 + \chi)NI\hat{z}, & R_1 < \varpi < R_2 \\ \mu_0NI\hat{z}, & R_2 < \varpi < R \\ 0, & \varpi > R \end{cases}$$

Στον μόνιμο μαγνήτη τα δέσμια ρεύματα είναι $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}_0 = 0$ και $\vec{K}_b = \vec{M}_0 \times \hat{\varpi} = M_0 \hat{\phi}$ στην επιφάνειά του $\varpi = R_1$.

Η μαγνήτιση στο γραμμικό υλικό είναι $\vec{M} = \chi\vec{H} = \chi NI\hat{z}$. Τα δέσμια ρεύματα είναι $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$, $\vec{K}_b = \vec{M} \times (-\hat{\varpi}) = -\chi NI\hat{\phi}$ στην εσωτερική επιφάνειά του ($\varpi = R_1$) και $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{\varpi} = \chi NI\hat{\phi}$ στην εξωτερική επιφάνειά του ($\varpi = R_2$).

Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι οι ασυνέχειες του μαγνητικού πεδίου στις ακτίνες R_1 , R_2 και R συμφωνούν με τα επιφανειακά ρεύματα (το άθροισμα δέσμιων και ελεύθερων).