

[1]: Γραμμική πυκνότητα φορτίου λ βρίσκεται στον άξονα αγωγισμού κυλινδρικού φλοιού εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2 .

(α) Να υπολογιστεί η επαγόμενη πυκνότητα φορτίου στις δύο όψεις του φλοιού, αν το συνολικό του φορτίο είναι μηδέν.

(β) Επαναλάβετε αν ο φλοιός είναι γειωμένος.

[2]: Η χρονική μέση τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού του ουδέτερου ατόμου του υδρογόνου είναι

$$V = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0} \right) e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

όπου e το φορτίο του ηλεκτρονίου και a_0 η ακτίνα Bohr. Ποια η κατανομή φορτίου στο άτομο αυτό; Ποιο το συνολικό φορτίο της κατανομής; Αφού υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο βρείτε το ολικό φορτίο εφαρμόζοντας νόμο Gauss $\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{εγκ}}}{\epsilon_0}$. Συμφωνούν τα δυο αποτελέσματα;

[3]: Πρόβλημα 3.41 από Griffiths:

Δείξτε ότι η μέση τιμή του πεδίου στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας R , που οφείλεται σε όλα τα φορτία που περικλείει η σφαίρα, είναι $\vec{E}_{\text{μέσο}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{R^3}$,

όπου $\vec{p}$ η συνολική διπολική ροπή. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να αποδείξετε αυτό το καταπληκτικά απλό αποτέλεσμα. Μία μέθοδος είναι η παρακάτω:

(α) Δείξτε ότι η μέση τιμή του πεδίου που οφείλεται σε ένα φορτίο q , το οποίο βρίσκεται στο σημείο $\vec{r}$ μέσα στη σφαίρα, είναι ίση με το πεδίο στο $\vec{r}$ που οφείλεται σε μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα ακτίνας R και πυκνότητας φορτίου $\rho = -\frac{q}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}$, δηλαδή είναι

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} \iiint \frac{q}{z^2} \hat{z} d\tau' \text{ όπου } \vec{z} \text{ είναι το διάνυσμα από το } \vec{r} \text{ στο } d\tau'.$$

(β) Το τελευταίο πεδίο μπορεί να βρεθεί από το νόμο του Gauss. Εκφράστε την απάντηση συναρτήσει της διπολικής ροπής του q .

(γ) Γενικεύστε αυτό το αποτέλεσμα για μια αυθαίρετη κατανομή φορτίου χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας.

(δ) Δείξτε ότι η μέση τιμή του πεδίου στον όγκο της σφαίρας, που οφείλεται σε όλα τα φορτία που βρίσκονται στο εξωτερικό της, είναι ίση με το πεδίο που παράγουν στο κέντρο της.

Η διπολική ροπή φορτίου q ορίζεται σαν $\vec{p} = q\vec{r}$.

[4]: (α) Δύο κατανομές φορτίων ρ_1 και ρ_2 δημιουργούν ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_1$ και $\vec{E}_2$ αντίστοιχα. Όταν βρίσκονται μακριά η μια από την άλλη έχουν ενέργειες W_1 και W_2 αντίστοιχα. Αν τις φέρουμε κον-

τά, η ολική ενέργεια του συστήματος είναι $W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \iiint E^2 d\tau$ και μπορεί να γραφεί σαν $W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \iiint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 d\tau = W_1 + W_2 + W_{\text{int}}$, όπου $W_{\text{int}} = \epsilon_0 \iiint \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau$ η ενέργεια αλληλεπίδρασης. Δείξτε ότι η τελευταία μπορεί να γραφεί σαν $W_{\text{int}} = \iiint V_2 \rho_1 d\tau$.

(β) Έστω δυο φορτισμένες σφαίρες με φορτία q_1 και q_2 , των οποίων τα κέντρα βρίσκονται σε απόσταση d (δεν επικαλύπτονται). Δείξτε ότι η αν η πυκνότητα φορτίου κάθε μιας σφαίρας εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο της, η ενέργεια αλληλεπίδρασης είναι $W_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d}$.

(γ) Δείξτε ότι αν οι σφαίρες έχουν ίσες ακτίνες R και είναι ομογενώς φορτισμένες με αντίθετα φορτία $q_1 = Q$, $q_2 = -Q$, είναι $W_1 = W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{5R}$.

(δ) Έστω αφήνουμε τις σφαίρες του προηγούμενου ερωτήματος από απόσταση d . Αν έχουν ίσες μάζες m πόση είναι η ταχύτητά τους όταν μόλις ακουμπούν (δηλ. όταν η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους είναι $2R$); (Αγνοήστε το μαγνητικό πεδίο και την χρονοεξάρτηση των πεδίων.)

(ε) Έστω ότι με κάποιο τρόπο οι σφαίρες καθώς κινούνται μπορούν να μπουν η μια μέσα στην άλλη, χωρίς να αλλάξει η κατανομή φορτίου τους. Ποια είναι η ταχύτητά τους τη στιγμή που αλληλεπικαλύπτονται πλήρως;

[5]: Ένας πυκνωτής αποτελείται από δύο σφαιρικούς αγωγούς ακτίνων R_1 και R_2 , που βρίσκονται σε απόσταση d . Αν η απόσταση d είναι αρκετά μεγάλη σε σύγκριση με τις ακτίνες, οπότε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί κάθε μια από τις σφαίρες όταν φορτιστεί είναι σε καλή προσέγγιση σφαιρικά συμμετρικό γύρω από το κέντρο της, ναδειχθεί ότι η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι $C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$.

[6]: Πρόβλημα 2.36 από Griffiths:

Δύο σφαιρικές κοιλότητες ακτίνων a και b έχουν δημιουργηθεί στο εσωτερικό μιας (ουδέτερης) αγωγίμης σφαίρας ακτίνας R . Στο κέντρο κάθε κοιλότητας τοποθετείται από ένα σημειακό φορτίο – ονομάστε αυτά τα φορτία q_a και q_b .

(α) Βρείτε τις επιφανειακές πυκνότητες φορτίου σ_a , σ_b και σ_R .

(β) Ποιο είναι το πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού;

(γ) Ποιο είναι το πεδίο μέσα σε κάθε κοιλότητα;

(δ) Πόση είναι η δύναμη στα q_a και q_b ;

(ε) Ποια από αυτές τις απαντήσεις θα άλλαζε αν ένα

τρίτο φορτίο q_c ερχόταν κοντά στον αγωγό;

[7]: (α) Έστω γραμμική κατανομή φορτίου απείρου μήκους με γραμμική πυκνότητα λ , η οποία είναι παράλληλη στον άξονα z και περνά από το σημείο $(x = d, y = 0)$. Δείξτε ότι η μέση τιμή του δυναμικού σε σημεία του κύκλου ακτίνας $R < d$ που βρίσκεται στο επίπεδο xy και έχει κέντρο το $(x = 0, y = 0)$, είναι ίση με το δυναμικό στο κέντρο, δηλ. ισχύει $\frac{1}{2\pi R} \oint V d\ell = V_{\text{κέντρο}}$.

Δίνεται ότι για $c_1 > c_2 > 0$ ισχύει

$$\int_0^{2\pi} \ln \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 \cos \phi} d\phi = 2\pi \ln c_1.$$

(β) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα και την αρχή της επαλληλίας, δείξτε ότι η λύση της εξίσωσης Laplace σε δυο διαστάσεις $V(x, y)$ έχει την ιδιότητα $V(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \oint V d\ell$, δηλ. η τιμή του δυναμικού σε σημείο (x, y) ισούται με το μέσο όρο του δυναμικού σε σημεία κύκλου ακτίνας R με κέντρο το (x, y) .¹

¹Ένας άλλος τρόπος απόδειξης της ιδιότητας αυτής προκύπτει από τον τύπο του Cauchy $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z')}{z' - z} dz'$ για αναλυτικές συναρτήσεις (των οποίων το πραγματικό και φανταστικό μέρος ικανοποιούν την εξίσωση Laplace). Με $z = x + iy$, $z' = z + Re^{i\phi}$, προκύπτει $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z') d\phi \Leftrightarrow f(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \oint f d\ell$.

ΛΥΣΕΙΣ:

[1]: (α) Λόγω συμμετρίας $\sigma|_{\varpi=R_1} = \sigma_1 = \text{σταθερό}$. Αφού στο εσωτερικό του αγωγού $\vec{E} = 0$, ο νόμος Gauss σε επιφάνεια κυλίνδρου μήκους L και άξονα την γραμμική πυκνότητα φορτίου δίνει $0 = Q_{\text{εγκ}} \Leftrightarrow \sigma_1 2\pi R_1 L + \lambda L = 0 \Leftrightarrow \sigma_1 = -\frac{\lambda}{2\pi R_1}$.

Αλλιώς: Λόγω συμμετρίας $\vec{E} = E(\varpi)\hat{\varpi}$. Από νόμο Gauss σε επιφάνεια κυλίνδρου μήκους L , άξονα την γραμμική πυκνότητα φορτίου και ακτίνα $\varpi < R_1$, $E 2\pi \varpi L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varpi}$, ενώ για $R_1 < \varpi < R_2$ είναι $E = 0$ (εσωτερικό αγωγού). Άρα $E|_{\varpi=R_1^+} - E|_{\varpi=R_1^-} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \sigma_1 = -\frac{\lambda}{2\pi R_1}$.

Αφού το συνολικό φορτίο του φλοιού είναι μηδέν κάθε μήκος του L έχει αντίθετο φορτίο στις δύο όψεις. Επίσης $\sigma|_{\varpi=R_2} = \sigma_2 = \text{σταθερό}$ λόγω συμμετρίας. Άρα $\sigma_1 2\pi R_1 L + \sigma_2 2\pi R_2 L = 0 \Leftrightarrow \sigma_2 = \frac{\lambda}{2\pi R_2}$. (β) Η διαφορά είναι ότι τώρα δεν υπάρχουν φορτία στην έξω όψη.

[2]: Για $r > 0$ το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} = \frac{|e|}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{a_0 r} + \frac{2}{a_0^2} \right) e^{-\frac{2r}{a_0}} \hat{r}$ και η πυκνότητα φορτίου $\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) = -\frac{|e|}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$.

Για $r \ll a_0$ είναι $\vec{E} \approx \frac{|e|}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$, δηλ. πεδίο σημειακού φορτίου $|e|$ στη θέση $r = 0$, με $\rho = |e|\delta(\vec{r})$.

Αλλιώς: Για $r \approx 0$, είναι $\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \approx \frac{|e|}{4\pi} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}}_{4\pi\delta(\vec{r})}$

$|e|\delta(\vec{r})$.

Συνολικά λοιπόν $\rho = |e|\delta(\vec{r}) - \frac{|e|}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$.

Το συνολικό φορτίο $Q = \iiint \rho d\tau = |e| \underbrace{\iiint \delta(\vec{r}) d\tau}_1 - \frac{|e|}{\pi a_0^3} \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2 dr}_{\text{θέτω } 2r/a_0 = \xi} = |e| -$

$\frac{|e|}{2} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^2 d\xi = 0$, διότι $\int \xi^2 e^{-\xi} d\xi = -\int \xi^2 d e^{-\xi} = -\xi^2 e^{-\xi} + \int e^{-\xi} d\xi^2 = -\xi^2 e^{-\xi} - 2 \int \xi d e^{-\xi} = -\xi^2 e^{-\xi} - 2\xi e^{-\xi} + 2 \int e^{-\xi} d\xi = -(\xi^2 + 2\xi + 2) e^{-\xi}$.

Από νόμο Gauss το φορτίο που περικλείει η σφαιρική επιφάνεια $r = \text{σταθερό}$ είναι $Q_{\text{εγκ}}(r) = \varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \varepsilon_0 E 4\pi r^2 = |e| \left(1 + \frac{2r}{a_0} + \frac{2r^2}{a_0^2} \right) e^{-\frac{2r}{a_0}}$. Το συνολικό φορτίο είναι $Q = \lim_{r \rightarrow \infty} Q_{\text{εγκ}}(r) = 0$, (διότι

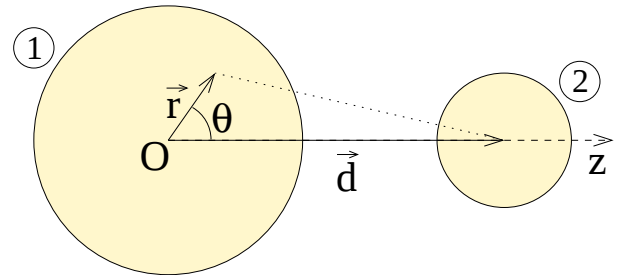
$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\xi + 2\xi^2}{e^{2\xi}} \stackrel{\infty}{\approx} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{2 + 4\xi}{2e^{2\xi}} \stackrel{\infty}{\approx} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{4}{4e^{2\xi}} = 0$),

σε συμφωνία με το προηγούμενο αποτέλεσμα.

[3]:

[4]: (α) $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = -\vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla} V_2 = -\vec{\nabla} (V_2 \vec{E}_1) + V_2 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = -\vec{\nabla} (V_2 \vec{E}_1) + V_2 \rho_1 / \varepsilon_0$, οπότε $W_{\text{int}} = -\varepsilon_0 \underbrace{\iiint \vec{\nabla} (V_2 \vec{E}_1) d\tau}_{\oiint V_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}=0} + \iiint V_2 \rho_1 d\tau = \iiint V_2 \rho_1 d\tau$.

(β) Η σφαίρα ② δημιουργεί δυναμικό V_2 σφαιρικά συμμετρικό ως προς το κέντρο της.



Σε κάθε σημείο της σφαίρας ① είναι $V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{d}|}$

όπου $|\vec{r} - \vec{d}| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{d})^2} = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}$.

Αλλιώς: Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο με πλευρές τις $\vec{r}$, $\vec{d}$, η πλευρά απέναντι από τη γωνία θ έχει μήκος $\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}$.

Άρα σε σφαιρικές συντεταγμένες συστήματος με αρχή το κέντρο της σφαίρας ① και άξονα z προς το κέντρο της σφαίρας ② εί-

ναι $W_{\text{int}} = \iiint_{\text{σφαίρα ①}} \frac{q_2 \rho_1(r) d\tau}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} = \int_{r=0}^{R_1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{q_2 \rho_1(r) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{r=0}^{R_1} dr \rho_1(r) r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}}$. Θέτοντας $\xi = r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta$, $d\xi = 2rd \sin \theta d\theta$, το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} = \frac{1}{2rd} \int \xi^{-1/2} d\xi = \frac{\xi^{1/2}}{rd}$, οπότε $\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} = \frac{[\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}]_{\theta=0}^{\pi}}{rd} = \frac{|r + d| - |r - d|}{rd} \stackrel{d \geq r}{=} \frac{2}{d}$.

Έτσι $W_{\text{int}} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} \underbrace{\int_{r=0}^{R_1} \rho_1(r) 4\pi r^2 dr}_{q_1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$.

(γ) Η σφαίρα με φορτίο Q έχει σταθερή πυκνότητα $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$. Έστω δημιουργούμε το φορτίο μεταφέροντας κάθε φλοιό με ακτίνα από r' ως $r' + dr'$ από το ∞ στην τελική του θέση. Όταν έχουμε δημιουργήσει ήδη το φορτίο μέχρι ακτίνα r' , το δυναμικό

για $r \geq r'$ είναι $V_{r'} = \frac{\rho 4\pi r'^3/3}{4\pi\epsilon_0 r}$. Κατά τη μεταφορά του επόμενου φλοιού με φορτίο $dq = \rho 4\pi r'^2 dr'$ από το $r = \infty$ στο $r = r'$ προστίθεται στο σύστημα ενέργεια $dW = dq(V_{r'} - V_\infty) = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r'^4 dr'$. Άρα

$$W = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r'^4 dr' = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

Αλλιώς: Το φορτίο δημιουργεί ακτινικό, σφαιρικά συμμετρικό πεδίο $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Από νόμο Gauss σε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r βρί-

$$\text{σκουμε } E4\pi r^2 = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3} \rho & \text{αν } r \leq R \\ \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi R^3}{3} \rho & \text{αν } r \geq R \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$E = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{αν } r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{αν } r \geq R \end{cases} \quad \text{Η ενέργεια είναι}$$

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \iiint E^2 d\tau = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_0^\infty E^2 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} \left(\int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{R^6}{r^2} dr \right) = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

Αλλιώς: Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $W = \frac{1}{2} \iiint V \rho d\tau = \frac{1}{2} \int_0^R V \rho 4\pi r^2 dr$. Στο εσωτερικό της σφαίρας το δυναμικό μπορεί να βρεθεί από $V(r) - \underbrace{V(\infty)}_0 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$. Χρησιμο-

ποιώντας το πεδίο που βρήκαμε από νόμο Gauss, $V(r) = \int_r^R E dr + \int_R^\infty E dr = \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\epsilon_0}$ και τελι-

$$\text{κά } W = \frac{\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R (3R^2 r^2 - r^4) dr = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

(δ) Η ολική ενέργεια του συστήματος των δυο σφαιρών, υπολογισμένη στη θέση όπου είναι ακίνητες, είναι ίση με την ηλεκτροστατική τους ενέργεια

$$W = W_1 + W_2 + W_{\text{int}} = 2 \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q(-Q)}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{6}{5R} - \frac{1}{d} \right).$$

Όταν η απόστασή τους είναι $2R$ έχουν κινητική ενέργεια $2 \frac{mv^2}{2}$ (αφού έχουν ίσες μάζες οι ταχύτητές τους είναι αντίθετες ώστε η ολική ορμή να είναι μηδέν, ίση με την αρχική) και ηλεκτροστατική ενέργεια $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{6}{5R} - \frac{1}{2R} \right)$. Άρα

$$2 \frac{mv^2}{2} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{6}{5R} - \frac{1}{2R} \right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{6}{5R} - \frac{1}{d} \right) \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{d} \right)}.$$

Αλλιώς: Αφού στη διαδικασία που μας ενδιαφέρει τα φορτία δεν δημιουργούνται ή καταστρέφονται θα μπορούσαμε να αγνοήσουμε την ιδιοενέργειά τους (μιας που είναι ίδια στην αρχική και τελική κατάσταση) και στη σχέση διατήρησης ενέργειας να χρησιμοποιήσουμε την ενέργεια αλληλεπίδρασης W_{int} στη θέση της ολικής ηλεκτροστατικής ενέργειας. Όπως δείξαμε στο ερώτημα (β) η ενέργεια αυτή, εφόσον τα φορτία δεν επικαλύπτονται, είναι $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$. Έτσι θα

$$\text{είχαμε } 2 \frac{mv^2}{2} + \frac{Q(-Q)}{4\pi\epsilon_0 (2R)} = 0 + \frac{Q(-Q)}{4\pi\epsilon_0 d} \Leftrightarrow v =$$

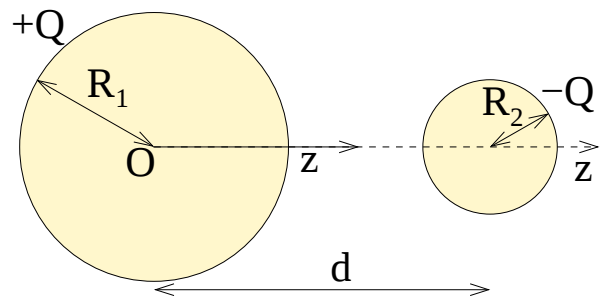
$$\sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{d} \right)}.$$

(ε) Στην τελική κατάσταση η ηλεκτροστατική ενέργεια είναι μηδέν (αφού το ολικό ηλεκτρικό πεδίο - για το οποίο ισχύει η αρχή της επαλληλίας - είναι μηδέν) οπότε $2 \frac{mv^2}{2} + 0 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{6}{5R} - \frac{1}{d} \right) \Leftrightarrow v =$

$$\sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{6}{5R} - \frac{1}{d} \right)}.$$

Σημειώστε ότι εδώ δεν θα ήταν σωστό να χρησιμοποιηθεί η $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ σαν ηλεκτροστατική ενέργεια, διότι ακόμα και αν αγνοήσουμε τις ιδιοενέργειες των φορτίων η ενέργεια αλληλεπίδρασης δεν είναι $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ λόγω της επικάλυψης (μερικής ή ολικής).

[5]: Η διαφορά δυναμικού $V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{r}$ μπορεί εύκολα να βρεθεί για διαδρομή μεταξύ των πλησιέστερων σημείων των σφαιρών, πάνω στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα τους.



Αφού το πεδίο κάθε σφαίρας είναι συμμετρικό γύρω από το κέντρο της, σε κάθε σημείο της διαδρομής αυτής είναι $\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \hat{z}$

$$\text{και } \vec{E}_2 = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (d-z)^2} (-\hat{z}). \quad \text{Άρα } V_+ -$$

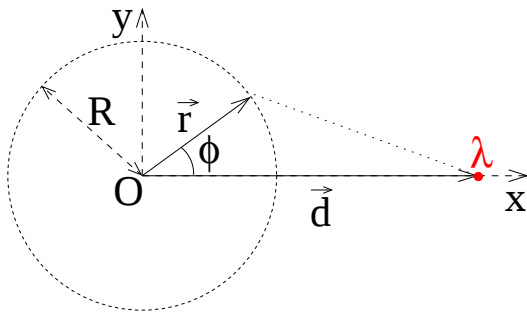
$$V_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{d-R_2} \left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(d-z)^2} \right] dz = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{z} + \frac{1}{d-z} \right]_{R_1}^{d-R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{d-R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{d-R_1} \right) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

διότι $\frac{1}{d - R_{1,2}} \approx \frac{1}{d} \ll \frac{1}{R_{1,2}}$ (λόγω της $d \gg R_{1,2}$).

$$\text{Η χωρητικότητα } C = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

[6]:

[7]: (α) Το δυναμικό από τη γραμμική κατανομή σε σημείο που απέχει απόσταση ϖ' από αυτή, είναι $V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\varpi'}{c}$, όπου c αυθαίρετη θετική σταθερά. Αυτό μπορεί να βρεθεί από το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, μέσω της $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Από νόμο Gauss προκύπτει ότι, σε κυλινδρικές συντεταγμένες με άξονα z' τη γραμμική κατανομή, το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\varpi'} \hat{\varpi}' - \text{δес}$ πρόβλημα [1] – και $V = V(\varpi')$, οπότε $\frac{dV}{d\varpi'} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\varpi'} \Leftrightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{d\varpi'}{\varpi'} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\varpi'}{c}$.



$$\begin{aligned} \text{Στην περίπτωση μας, } \varpi' &= |\vec{r} - \vec{d}| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{d})^2} = \sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \phi} \text{ και άρα} \\ \frac{1}{2\pi R} \oint V \underbrace{d\ell}_{Rd\phi} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \right) \ln \frac{|\vec{r} - \vec{d}|}{c} d\phi = \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{R}{c}\right)^2 + \left(\frac{d}{c}\right)^2 - 2\frac{R}{c}\frac{d}{c} \cos \phi} d\phi. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον τύπο που δίδεται και αφού $\frac{d}{c} > \frac{R}{c} > 0$, το ολοκλήρωμα της προηγούμενης σχέσης ισούται με $2\pi \ln \frac{d}{c}$. Άρα $\frac{1}{2\pi R} \oint V \underbrace{d\ell}_{Rd\phi} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{c} =$

$V_{\text{κέντρο}}$

(β) Κάθε διδιάστατη κατανομή φορτίου $\rho(x, y)$ μπορεί να θεωρηθεί επαλληλία γραμμικών κατανομών παράλληλων στον z άξονα.² Έστω σημείο (x, y) και κύκλος ακτίνας R γύρω από αυτό, κενός από γραμμικές κατανομές φορτίου (οπότε το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace). Για το δυναμικό $V_i(x, y)$ από κάθε γραμμική κατανομή φορτίου λ_i (η οποία βρίσκεται έξω από τον κύκλο), ισχύει όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα $\frac{1}{2\pi R} \oint V_i d\ell = V_{i,\text{κέντρο}}$. Η αρχή της επαλληλίας δίνει αμέσως $\frac{1}{2\pi R} \oint V d\ell = \sum_i \frac{1}{2\pi R} \oint V_i = \sum_i V_{i,\text{κέντρο}} = V_{\text{κέντρο}}$.

²Το συνολικό φορτίο ανά μονάδα μήκους του z άξονα είναι $\frac{dq}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dx dy$, δηλ. επαλληλία γραμμικών κατανομών με φορτίο ανά μήκος $\rho(x, y) dx dy$.