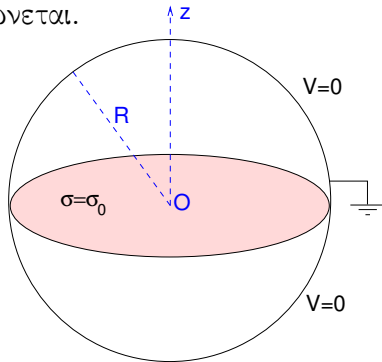




Θέμα 1^ο:

Το εσωτερικό λεπτού σφαιρικού αγωγίμου φλοιού, ακτίνας R , χωρίζεται σε δύο ημισφαίρια από λεπτό δίσκο ίδιας ακτίνας που φέρει στην περιφέρειά του λεπτή μόνωση. Ο δίσκος φορτίζεται με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \sigma_0$ ενώ ο σφαιρικός φλοιός γειώνεται.



Το δυναμικό στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού έχει μορφή $V = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} r |\cos \theta| + \sum_{\ell=0,2,4,\dots}^{\infty} a_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$.

(α) Δείξτε ότι το δυναμικό αυτό ικανοποιεί τις σωστές συνοριακές συνθήκες στο επίπεδο $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(β) Εφαρμόστε τη συνοριακή συνθήκη $V|_{r=R} = 0$ για να υπολογίσετε τους συντελεστές a_{ℓ} .

Δίνεται σε σφαιρικές $\vec{\nabla} V(r, \theta) = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}$.

Για τα άρτια πολυώνυμα Legendre (άρτιος δείκτης) δίνονται: $P_{\ell}(-x) = P_{\ell}(x)$ οπότε ισχύει $P'_{\ell}(0) = 0$,

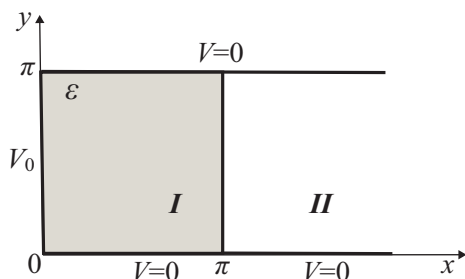
$$\int_{-1}^1 P_{\ell}(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{\ell n} \text{ και } \int_0^1 x P_n(x) dx =$$

$$f_{n,1} = (-1)^{1+n/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n+2)}, \text{ δηλ. } f_{0,1} = \frac{1}{2},$$

$$f_{2,1} = \frac{1}{2 \cdot 4}, f_{4,1} = -\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}, f_{6,1} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \dots$$

Θέμα 2^ο:

Δύο ημιάπειρες παράλληλες γειωμένες πλάκες που απέχουν απόσταση π , συνδέονται στο άκρο τους με μεταλλική ταινία που διατηρείται σε δυναμικό V_0 (βλέπε σχήμα). Ανάμεσα στις πλάκες τοποθετείται διηλεκτρικό σταθεράς ϵ , με τετράγωνη διατομή πλευράς π .



(α) Δείξτε ότι το δυναμικό τόσο στην περιοχή I που περιέχει το διηλεκτρικό, όσο και στην κενή περιοχή II είναι αρμονική συνάρτηση και δίνεται από τις σχέσεις:

$$V_I(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{n x} + B_n e^{-n x}) \sin(n y)$$

$$V_{II}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n x} \sin(n y)$$

(β) Υπολογίστε χρησιμοποιώντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες τους συντελεστές A_n , B_n και C_n .

Θέμα 3^ο:

Έστω διανυσματικό δυναμικό

$$\vec{A} = \begin{cases} Cr \sin \theta \hat{\phi}, & r \leq R \\ C \frac{R^3}{r^2} \sin \theta \hat{\phi}, & r \geq R \end{cases}$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες (με C και R σταθερές). Βρείτε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και τα ρεύματα (χωρικά και επιφανειακά) που το δημιουργούν.

$$\Delta \text{ίδεται } \vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(v_{\phi} \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r v_{\phi})}{\partial r} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r v_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}.$$

Θέμα 4^ο:

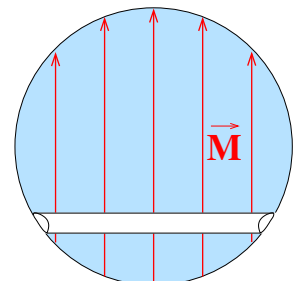
(α) Κύλινδρος απείρου μήκους και ακτίνας R είναι ομογενώς μαγνητισμένος, με μαγνήτιση $\vec{M} = M \hat{x}$ κάθετη στον άξονά του z .

Αν το πεδίο $\vec{H}$ που δημιουργεί έχει μορφή $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_M$ με $\Phi_M = \begin{cases} ar \cos \phi, & r < R \\ \frac{b}{r} \cos \phi, & r > R \end{cases}$, βρείτε μέσω

οριακών συνθηκών τους συντελεστές a , b και δείξτε ότι στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι $\vec{B} = \mu_0 \vec{M} / 2$.

(β) Σφαίρα ακτίνας R φέρει ομογενή μαγνήτιση $\vec{M}$, οπότε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό της είναι $\vec{B}_s = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$.

Στο εσωτερικό της σφαίρας σμιλεύουμε κυλινδρική κοιλότητα μικρής ακτίνας $R' \ll R$, κάθετη στην $\vec{M}$. Αν η κοιλότητα έχει μήκος $L \gg R'$ να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στην κεντρική περιοχή της.



$$\Delta \text{ίνεται σε κυλινδρικές } \vec{\nabla} f(r, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}.$$

Επίσης ότι $\hat{x} = \cos \phi \hat{r} - \sin \phi \hat{\phi}$.