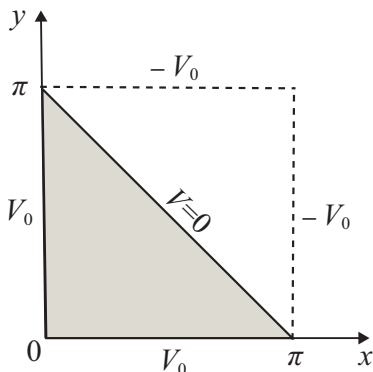




Θέμα 1^ο:

Σωλήνας απείρου μήκους έχει διατομή σχήματος ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου, βλέπε σχήμα. Να βρεθεί το δυναμικό $V(x, y)$ στο εσωτερικό του σωλήνα αν το δυναμικό στις έδρες στις οποίες ανήκουν οι κάθετες είναι V_0 και στην έδρα της υποτείνουσας είναι μηδέν.

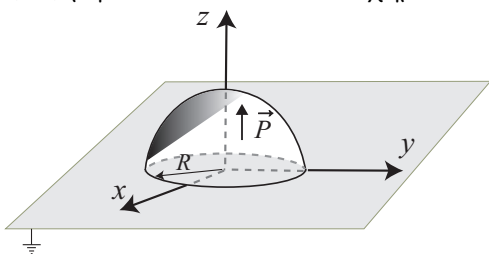


Υπόδειξη: Συμπληρώστε ώστε να σχηματιστεί τετράγωνη διατομή όπως στο σχήμα και θεωρήστε σαν λύση επαλληλία ειδικών συναρτήσεων της μορφής:

$$V_n(x, y) = \sin(nx) \{A_n \sinh[n(\pi - y)] + B_n \sinh(ny)\} + \sin(ny) \{A_n \sinh[n(\pi - x)] + B_n \sinh(nx)\}.$$

Θέμα 2^ο:

Ημισφαιρικός ηλεκτρίτης, ακτίνας R , φέρει μόνιμη ομογενή πόλωση $\vec{P}$ κάθετη στην επίπεδη επιφάνειά του. Ο ηλεκτρίτης τοποθετείται πάνω σε άπειρη γειωμένη αγωγίμη πλάκα, όπως στο σχήμα.



- (α) Να βρεθούν τα δέσμια φορτία του ηλεκτρίτη.
 (β) Να βρεθεί το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο πάνω από την πλάκα ($z > 0$).
 (γ) Να βρεθεί η επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου πάνω στην πλάκα.

Θέμα 3^ο:

(α) Κυλινδρικός μαγνήτης απείρου μήκους και ακτίνας R είναι ομογενώς μαγνητισμένος. Η μαγνήτισή του $\vec{M}$ σχηματίζει γωνία λ με τον άξονά του, δηλ. σε σύστημα με z τον άξονα του μαγνήτη $\vec{M} = M \sin \lambda \hat{x} + M \cos \lambda \hat{z}$ ή ισοδύναμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\vec{M} = M \sin \lambda \cos \phi \hat{r} - M \sin \lambda \sin \phi \hat{\phi} + M \cos \lambda \hat{z}$. Βρείτε τα δέσμια ρεύματα (χωρικά και επιφανειακά).

(β) Έστω διανυσματικό δυναμικό

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} \vec{M} \times (x\hat{x} + y\hat{y}), & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^2}{2} \vec{M} \times \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{x^2 + y^2}, & r \geq R \end{cases}$$

ή ισοδύναμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 M}{2} (r \cos \lambda \hat{\phi} + r \sin \lambda \sin \lambda \hat{z}), & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^2 M}{2} \left(\frac{\cos \lambda}{r} \hat{\phi} + \frac{\sin \lambda \sin \lambda}{r} \hat{z} \right), & r \geq R \end{cases}$$

Βρείτε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και το χωρικό ρεύμα $\vec{J}$.

(γ) Δείξτε ότι το $\vec{A}$ του ερωτήματος (β) ικανοποιεί τις σωστές εξισώσεις και οριακές συνθήκες και άρα είναι η λύση για τον μαγνήτη του ερωτήματος (α).

Θέμα 4^ο:

Έστω ομογενώς μαγνητισμένο κέρμα με μαγνήτιση $\vec{M} = M \hat{z}$ παράλληλη στον άξονά του. Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί πάνω στον άξονά του είναι

$$\vec{B}_{\alpha z} = \frac{\mu_0 M L R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}, \text{ όπου } R \text{ η ακτίνα του κέρματος, } L (\ll R) \text{ το πάχος του και } z \text{ η απόσταση από το κέντρο του κέρματος το οποίο θεωρούμε αρχή των αξόνων.}$$

Βρείτε το μαγνητικό πεδίο σε όλα τα σημεία που απέχουν από το κέντρο απόσταση $r > R$ ακολουθώντας τα ακόλουθα βήματα.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει βαθμωτό δυναμικό Φ για το οποίο $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi$ και $\vec{\nabla}^2 \Phi = 0$ έξω από το κέρμα.

(β) Γνωρίζοντας το $\vec{B}_{\alpha z}$ δείξτε ότι το δυναμικό πάνω στον ημιάξονα z είναι $\Phi|_{\theta=0} = \frac{ML}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$.

(γ) Θεωρώντας ότι για $r > R$ το δυναμικό έχει μορφή $\Phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$ βρείτε τους συντελεστές b_{ℓ} .

(δ) Βρείτε και σχολιάστε τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα του μαγνητικού πεδίου.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ:

Σε σφαιρικές $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$.

Σε κυλινδρικές $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_{\phi}}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r v_{\phi})}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \hat{z}$.

Για τα πολώνυμα Legendre $P_{\ell}(1) = 1$, $P_1(\mu) = \mu$.
 Για $|u| < 1$ δίνεται $\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}u^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}u^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n$ με $c_n = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.